Алгебраические структуры и теория чисел

Лекция 1: Бинарные отношения, бинарные операции. Основные свойства отношений и операций

Осенний семестр 2021-22 учебного года

Элементы теории множеств (повторение)

- Декартовы произведения
- Бинарные отношения и их свойства
- Отношение эквивалентности и разбиение множеств
- Отображение множеств
- Операции и их свойства

Алгебраические структуры

- Алгебраические системы: модели и алгебры
- Алгебры: группы, кольца, поля. Примеры и определения

Декартовы произведения

- **Декартовым произведением** называется множество
- $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$
- **Бинарное отношение** – подмножество декартова произведения
- $\varphi \subseteq A \times B$
- Если бинарное отношение задано на множестве A, $\varphi \subseteq A \times A$, то выделяют следующие (основные) **свойства**:
    - Рефлексивность
    - Симметричность
    - Транзитивность

Отношение эквивалентности

- Если бинарное отношение φ, заданное на множестве A *рефлексивно*, *симметрично* и *транзитивно*, то его называют **отношением эквивалентности**
- **Класс эквивалентности**

$$K_a = \{x \in A | (x, a) \in \varphi\}$$

- **Свойства** классов эквивалентности:

$$\bigcup_{a \in A} K_a = A, \qquad K_a \cap K_b = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } (a, b) \notin \varphi \\ K_a, & \text{если } (a, b) \in \varphi \end{cases}$$

- Если на множестве задано отношение эквивалентности, то говорят, что задано **разбиение множества**

Отображение множеств

- **Отображение** (функция) множества X в множество Y – это такое соответствие, при котором каждому элементу из множества X соответствует не более одного элемента из множества Y

$$f:\ \ X \to Y$$

$$f:\ \ x \mapsto y$$

$$f(x) = y$$

Бинарные операции

- **Бинарная операция** – это отображение декартова произведения двух множеств в некоторое множество

$$\theta:\ X \times Y \to Z$$

- Свойства операций:
- *Замкнутость* (алгебраичность): $\forall\, x, y \in M \qquad x * y \in M$
- *Ассоциативность*: $\forall\, x, y, z \in M \quad (x * y) * z = x * (y * z)$
- *Коммутативность*: $\forall\, x, y \in M \qquad x * y = y * x$
- *Идемпотентность*: $\forall\, x \in M \qquad x * x = x$

Алгебраические структуры

- Пусть на множестве М задан набор отношений Ф и набор операций Ω .
- Тогда (М, Ф, Ω) – **алгебраическая структура** (система)
- Z – множество целых чисел, Ф – набор отношений {<, >, =}, Ω – набор операций {+, ·}

  (Z, {<, >, =}, {+, ·}) – алгебраическая структура
- Если $\Omega = \emptyset$, то (М, Ф) - модель
- Если $\Phi = \emptyset$, то (М, Ω) - алгебра

Группы

- Группа (M, *) – это множество, на котором задана одна операция *, удовлетворяющая следующим условиям (аксиомы группы):
- G0 аксиома замкнутости

$$\forall\, x, y \in M \qquad x * y \in M$$

- G1 аксиома ассоциативности

$$\forall\, x, y, z \in M \quad (x * y) * z = x * (y * z)$$

- G1’ аксиома коммутативности

$$\forall\, x, y \in M \qquad x * y = y * x$$

- G2 аксиома существования нейтрального элемента

$$\exists \theta \in M\ \forall\, x \in M \qquad x * \theta = \theta * x = x$$

- G3 аксиома существования симметричного элемента

$$\forall\, x \in M\ \exists x' \in M \quad x * x' = x' * x = \theta$$

Группоиды и полугруппы

- Пусть на множестве задана одна операция (M, *)
- Если операция удовлетворяет аксиоме замкнутости, то (M, *) – **группоид**;
- Если в группоиде выполняется аксиома ассоциативности, то (M, *) – **полугруппа**;
- Если в полугруппе существует нейтральный элемент, то ее называют **моноидом** (или полугруппой с единицей);
- Если в структуре (M, *) выполняется аксиома коммутативности, то структуру называют *коммутативной*

Формы записи операции

- **Аддитивная** форма записи (M, +):

- Нейтральный элемент называют *нулем*;

- Симметричный к x – *противоположным*, обозначают $(-x)$

- **Мультипликативная** форма записи (M, ·)

- Нейтральный элемент называют *единицей*;

- Симметричный к x – *обратным*, обозначают (x^{-1})

Кольцо

- Кольцо (К, +, ·) – это множество, на котором заданы две операции: + - сложение и · - умножение, удовлетворяющие следующим условиям:

    1. (К, +) – абелева (коммутативная) группа;
    2. (К, ·) - полугруппа;
    3. Операции + и · связаны свойством дистрибутивности

$\forall\, x, y, z \in M \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ (правая дистрибутивность)

$\forall\, x, y, z \in M \quad z \cdot (x + y) = z \cdot x + z \cdot y$ (левая дистрибутивность)

Поле

- Поле $(P, +, \cdot)$ – это множество, на котором заданы две операции: $+$ - сложение и $\cdot$ - умножение, удовлетворяющие следующим условиям:
    1. $(P, +)$ – абелева (коммутативная) группа;
    2. $(P \setminus \{0\}, \cdot)$ - коммутативная группа;
    3. Операции $+$ и $\cdot$ связаны свойством дистрибутивности

Литература

- *Курош А.Г.* **Теория групп**: Учебник. 4-е изд.,стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2005. -648с.
- *Кострикин А.И.* **Введение в алгебру**: учеб.для вузов. – 2-е изд., исправл. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. (в 3х томах)
- *Журавлев Ю.И.и др.* **Дискретный анализ. Основы высшей алгебры** – М.:МЗ Пресс, 2006. – 208 с.
- *Лидл Р., Пильц Г.* **Прикладная абстрактная алгебра**: Учеб. Пособие / Пер. с англ. – Екатеринбург: Изд-во Урал. Ун-та, 1996 г. -744 с.