# Комбинаторик
# а

# Задача 1

- Сколькими способами в группе из 6 человек можно выбрать старосту и его заместителя?

12 13 14 15 16

21 23 24 25 26

31 32 34 35 36

41 42 43 45 46

51 52 53 54 56

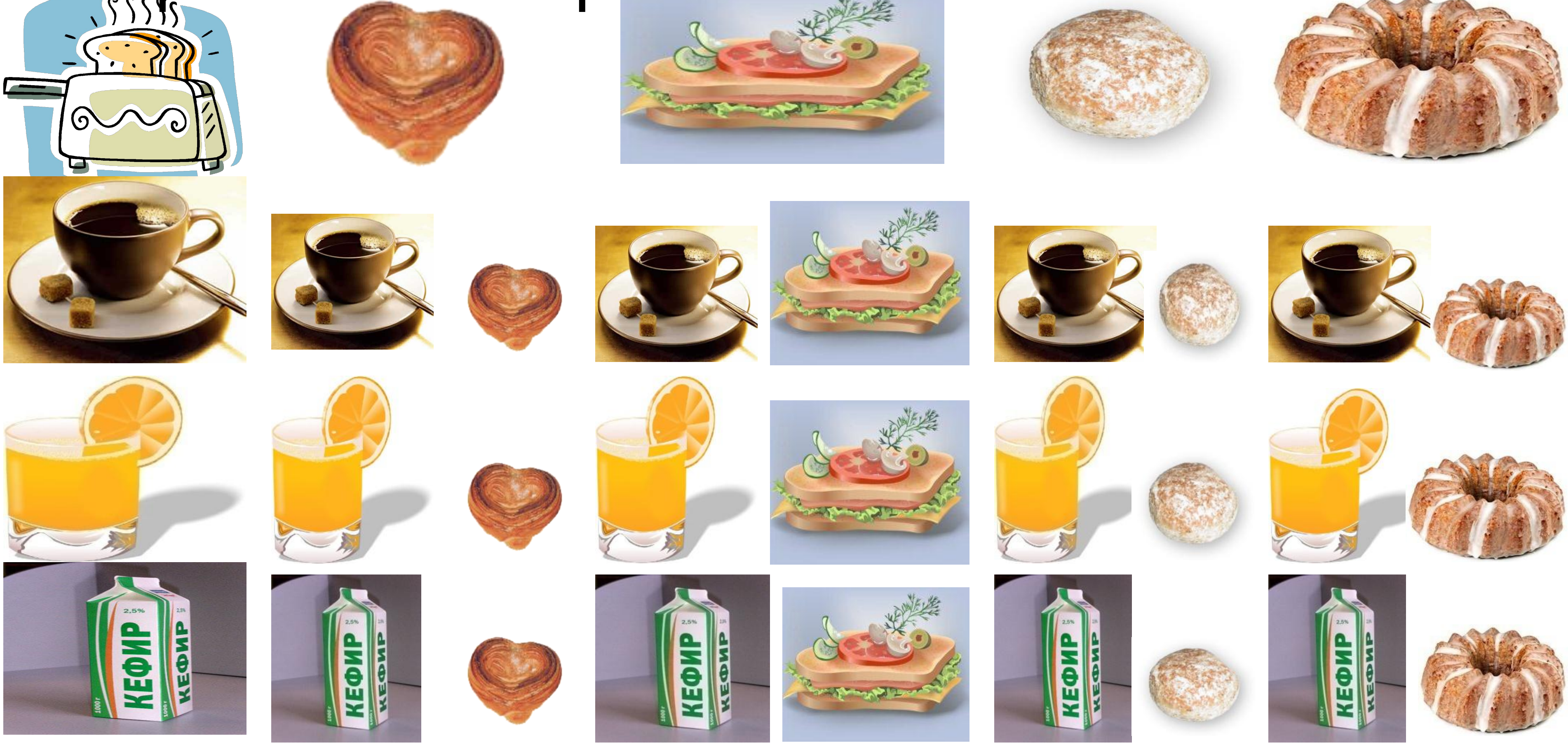
61 62 63 64 65

$n \quad m$

$n \cdot m$

$6 \cdot 5 = 30$

Задача 2 На завтрак клиент может выбрать: плюшку, бутерброд, пряник или кекс, а запить он может: кофе, соком или кефиром. Сколько существует различных вариантов завтрака?



- Комбинаторика  изучает задачи, в которых требуется из имеющихся элементов составить различные наборы, посчитать количество всевозможных комбинаций элементов, образованных по определенному правилу.
- Термин  «комбинаторика» происходит  от латинского слова «combina»,что в переводе на русский означает – сочетать, соединять.

# Правило произведения

- Если существует ***n*** вариантов выбора первого элемента, и для каждого из них имеется ***m*** вариантов выбора второго элемента, то существует ***n· m*** различных пар с выбранными первым и вторым элементами.

**Готфрид Вильгельм Лейбниц (1.07.1646 - 14.11.1716)**

Комбинаторику, как самостоятельный раздел математики первым стал рассматривать немецкий ученый Г. Лейбниц в своей работе «Об искусстве комбинаторики», опубликованной в 1666г. Он также впервые ввел термин «Комбинаторика».

**Леонард Эйлер(1707-1783)**

рассматривал задачи о разбиении чисел, о паросочетаниях, циклических расстановках, о построении магических и латинских квадратов, положил начало совершенно новой области исследований, выросшей впоследствии в большую и важную науку—топологию, которая изучает общие свойства пространства и фигур.

# *n* факториал

- Произведение ***n*** различных натуральных чисел от **1** до ***n*** обозначают ***n!*.**
- ***n!=1·2·…·(n-1) ·n***
- **1!=1, 0!=1**
- Вычислите: 5!, 6!,

$$\frac{7!}{5!}, \quad \frac{2018!}{2017!}, \quad \frac{15!}{5!\cdot 10!}, \quad \frac{5!+6!+7!}{8!-7!}, \quad \frac{1}{(n+1)!}-\frac{n^2+5n}{(n+3)!}$$

# Перестановки

- Два элемента $x_1$ и $x_2$ можно расположить двумя способами $x_1, x_2$ и $x_2, x_1$. Эти расположения являются различными перестановками двух элементов.
- Рассмотрим множество из n элементов. Упорядочить- значит расставить элементы по порядку.
- Перестановка из n элементов- это расположение их в определенном порядке.

Задача 1. Подсчитать число $P_n$ перестановок n объектов.

$$P_n = n(n-1)(n-2)\ldots n = n!$$

# Решите задачи

- 1.Выпишите все перестановки чисел 4,5,6. Чему равно $P_3$?
- 2. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4 так, чтобы никакие цифры не повторялись?
- 3.Множество, состоящее из элементов $x_{1,}$ $x_{2,}$ $x_{3,}$ $x_{4,}$ $x_{5,}$ $x_6$ упорядочили всеми возможными способами. Сколько таких способов? В скольких случаях: *а)*элемент $x_1$будет первым по порядку, б*)* $x_1$не будет ни первым ни последним, *в)* элемент $x_1$будет первым, а $x_6$ будет последним, г) элемент $x_1$будет первым, а $x_6$ не будет последним?

# Построение слов

- Рассмотрим некоторое множество символов. Символы будем называть буквами, а множество всех букв- алфавитом.
- Слово- это последовательность букв данного алфавита.
- Длина слова- число букв в данном слове.

Задача 2. Посчитать количество слов длины **n** в алфавите из **m** букв.

Решите задачи: Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 2,3,4,5, 6?

Слово- размещение с повторениями.

# Размещения

- Рассмотрим три элемента $x_{1,}$ $x_{2,}$ $x_{3.}$ Составим из них всевозможные пары. Любая из этих пар отличается либо хотя бы одним элементом, либо порядком элементов. Говорят, что каждая такая пара есть упорядоченный набор двух элементов.
- Размещениями из **n** элементов на **k** местах называют любую группу из **k** этих элементов с учётом их порядка.

Задача 3. Посчитать количество всевозможных размещений из **n** элементов на **k** местах .

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$$

# Решите задачи

- 1.Сколькими способами между 3 студентами можно распределить две стипендии разного размера?
- 2. Вычислите: $A_4^3, \quad A_5^2, \quad A_7^4, \quad A_8^1$

$$\textit{Докажите, что} \quad A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$\frac{A_{12}^4 - A_{11}^4}{A_{10}^3}, \quad \frac{A_{13}^3}{A_{14}^4 - A_{13}^4}, \quad \frac{A_{12}^4 \cdot 7!}{A_{11}^9}$$

- 3. Сколькими способами между 6 лицами можно распределить четыре различных награды?

# Сочетания

- Сочетаниями из **n** элементов на **k** местах называют любую группу из k этих элементов ( без учёта порядка) .

Задача 3.Посчитать количество сочетаний из **n** элементов на **k** местах.

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}$$

- Докажите, что

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

# Решите задачи

- 1.Вычислите $C_4^3,\ C_8^4,\ C_7^5$

$$C_{10}^3 + C_9^3,\quad \frac{C_{12}^4 - C_{12}^8}{C_{13}^7}$$

- 2. Сколькими способами можно присудить 6 лицам три одинаковые премии?
- 3. В группе 25 студентов. К доске нужно вызвать двоих. Сколькими способами можно это сделать, если а) первый должен решить задачу по алгебре, а второй по геометрии; б) они должны быстро стереть с доски?

# Решите задачи

- 1.Точки А,В,С лежат последовательно на прямой. Сколько различных отрезков образуют эти точки?
- 2. Из 4 игр шашки, лото, тетрис и эрудит нужно выбрать 3. Сколькими способами можно это сделать?
- 3.Сколькими способами между тремя друзьями можно распределить набор из 2 персиков, 2 бананов и 2 персиков так, чтобы каждому из них досталось по 2 различных фрукта?

- 4. 9 студентов написали контрольные по математике , русскому  и физике, получив 4 и  5. Можно ли утверждать, что по крайней мере двое из них получили одинаковые отметки?
- 5. На соревнования нужно отправит двоих из 5 лучших спортсменов. Сколькими способами это можно сделать?
- 6.На эстафету из 2 этапов нужно выставить двоих спортсменов. Сколькими способами из 5 кандидатов можно выбрать участников, причем важно, кто побежит первым, а кто

# Задача Эйлера

- Трое господ при входе в ресторан отдали швейцару свои шляпы, а при выходе получили обратно. Сколько существует вариантов, что каждый из них при выходе получил чужую шляпу?

- 7.Сколько существует различных пятизначных чисел, на третьей позиции которых стоит цифра 3?
- 8. Сколько существует различных пятизначных чисел, оканчивающихся нечетной цифрой?
- 9. Сколько существует различных пятизначных чисел, на нечетных позициях которых стоят нечетные цифры?
- 10. Аппаратура телефонной сети, расчитанная на номер из 6 цифр обслуживает 300000 абонентов. Хватит ли этой сети для обсуживания еще 700000 абонентов?

# Задачи

- 1.Выпишите все возможные перестановки элементов A,B,C,D. Как можно посчитать их количество?
- 2. К хозяину дома пришли гости A,B,C,D. За столом 5 стульев.
- *а*)Сколькими способами можно усадить гостей за столом?
- *б*)Сколькими способами можно усадить гостей за столом, если место хозяина занято?
- *в*)Сколькими способами можно усадить гостей за столом, если известно, что гостя А следует посадить рядом с гостем В?

# Задачи

- 3.Выпишите все возможные пары, составленные из элементов А,В,С. Как можно посчитать их количество?
- 4. Сколькими способами можно распределить два билета на разные кинофильмы между семью друзьями?
- 5.В группе 25 человек. Сколькими способами можно выбрать троих, если один должен решить задачу, второй съесть конфету, а третий остаться дежурить?

# Задачи

- 6. Из четырех гостей A,B,C,D составьте все возможные команды по три человека для участия в игре. Как можно посчитать их количество?
- 7.Сколькими способами из семи спортсменов можно выбрать двоих для участия в соревнованиях?
- 8. В группе 25 студентов.

*а*) Сколькими способами можно назначить двух дежурных?

*б*) Выбрать 23 человека для участия в концерте?

# Свойства $C_n^k$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

$$1.\ 0! = 1,\ \ 1! = 1$$

$$2.\ \ C_n^k = C_n^{n-k}$$

$$3.\ \ C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

# Треугольник Паскаля

$$C_0^0$$
$$C_1^0 \quad C_1^1$$
$$C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2$$
$$C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3$$
$$C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4$$
$$C_5^0 \quad C_5^1 \quad C_5^2 \quad C_5^3 \quad C_5^4 \quad C_5^5$$

..................................

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

..................................

# Бином Ньютона

$$(a+в)^n =$$

$$C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n$$

# Бином Ньютона

$$n = 0, \quad (a + в)^0 = 1$$

$$n = 1, \quad (a + в)^1 = 1a^1 + 1b^1$$

$$n = 2, \quad (a + в)^2 = 1a^2 + 2a^1b^1 + 1b^2$$

$$n = 3, \quad (a + в)^3 = 1a^3 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1b^3$$

......................

$$(a + b)^n =$$

$$= C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$