# СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ

**Актуальность:** прочное освоение понятия **«Система уравнений»** создаёт условия для осознанного понимания изложения теории и решения разнообразных задач путём отбора оптимального способа решения и успешной подготовки к итоговой аттестации

**Проблема:** необходимо было решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3y + 2x^2y^2 + xy^3 = 4, \\ x + y + x^2y + y^2x = 4, \end{cases}$$

но известных из школьного курса алгебры способов решения было недостаточно

## Цель работы:

обобщить научные сведения по теме «Системы уравнений» и познакомиться с новыми способами решения систем

## Основные задачи:

- научиться решать системы нелинейных уравнений методом почленного умножения и деления;
- рассмотреть способ введения новых переменных и использовать его при решении систем уравнений;
- изучить теорию, связанную с симметрическими системами уравнений, и научиться решать системы такого вида;
- познакомиться с понятием однородных систем уравнений и способом их решения

# ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

**Система двух уравнений первой степени с двумя неизвестными вида**

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

**где $a_1$, $b_1$, $c_1$, $a_2$, $b_2$, $c_2$ – заданные числа, x, y - переменные, называется *линейной*.**

## СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

**способ подстановки**

**способ сложения**

**графический спос**

Аверченко Екатерина

# НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

**Нелинейная** **система уравнений имеет вид:**

$$\begin{cases} p_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \end{cases}$$

**где** $p_1, p_2, \dots, p_m$ **– многочлены относительно переменных** $x_1, x_2, \dots, x_n$ **.**

## СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

- Графический способ
- Способ подстановки
- Способ сложения
- Метод почленного умножения и деления уравнений системы
- Метод введения новой переменной

# *СИММЕТРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ*

**Система уравнений** $\begin{cases} p_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ ................................ \\ p_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \end{cases}$

**называется *симметрической*, если все многочлены $p_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, p_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ являются *симметрическими многочленами*, то есть если их значения не изменяются при любой перестановке аргументов.**

**Основными симметрическими многочленами двух переменных x и y являются многочлены $\sigma_1 = x + y$ и $\sigma_2 = xy$, а в трёх переменных x, y и z - многочлены**

**$\sigma_1 = x + y + z$, $\sigma_2 = xy + yz + zx$ и $\sigma_3 = xyz$.**

## Теорема

***Любой симметрический многочлен от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ может быть представлен в виде многочлена от основных симметрических многочленов $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$***

# ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

**Многочлен p (x,y,…,v) степени n от переменных x, y, … , v называется *однородным*, если для любого числового набора переменных x, y,…,v и при любом фиксированном λ ≠ 0 имеет место тождество**

$$p(\lambda x, \lambda y, \dots, \lambda v) = \lambda^n p(x, y, \dots, v).$$

Симметрические системы

Однородные системы

Метод введения новых переменных

# Способ подстановки

При решении системы двух линейных уравнений с двумя переменными способом подстановки поступаем следующим образом:

- выражаем из какого-нибудь уравнения системы одну переменную через другую;
- подставляя в другое уравнение системы вместо этой переменной полученное выражение, решаем уравнение с одной переменной, определяя её значение;
- находим соответствующее значение второй переменной;
- записываем ответ в виде пары значений (x; y)

# Графический способ


Алгоритм этого метода заключается в следующем:

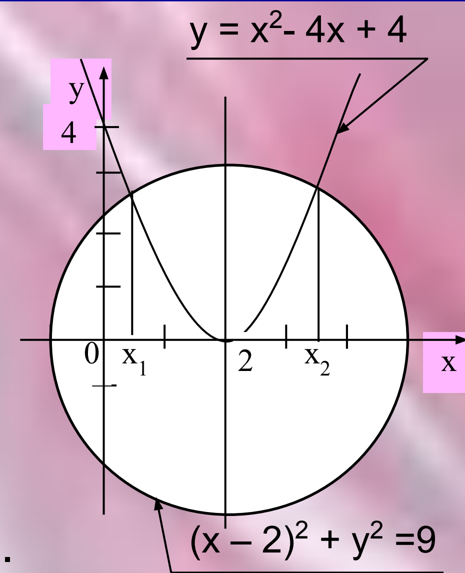
- строим графики каждого из уравнений системы;
- находим координаты точки пересечения построенных графиков;
- записываем в ответ координаты точки пересечения графиков уравнений

# Способ сложения

Суть этого метода такова:

- уравниваем модули коэффициентов при одном из неизвестных;
- складывая или вычитая почленно уравнения, получаем уравнение с одной переменной, решая его, находим одно неизвестное;
- подставляя найденное значение в одно из уравнений исходной системы, находим второе неизвестное;
- записываем ответ в виде пары значений (x; y)

*Пример 1.* $\begin{cases}(x-2)^2+y^2=9,\\ y=x^2-4x+4.\end{cases}$




**Перепишем данную систему в виде:** $\begin{cases}(x-2)^2+y^2=9,\\ y=(x-2)^2.\end{cases}$

**Используя рисунок, находим приближенные значения точек пересечения графиков:** (0,4; 2,6), (3,6; 2,6).

*Ответ:* (0,4; 2,6), (3,6; 2,6).

*Пример 2.*

$$\begin{cases} x - y = -1, \\ 2x^2 - xy + 3y^2 - 7x - 12y + 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = y - 1, \\ 2(y-1)^2 - y(y-1) + 3y^2 - 7(y-1) - 12y + 1 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y - 1, \\ 2y^2 - 4y + 2 - y^2 + y + 3y^2 - 7y + 7 - 12y + 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = y - 1, \\ 2y^2 - 11y + 5 = 0. \end{cases}$$

**Решая второе уравнение системы** $2y^2 - 11y + 5 = 0$, **находим его корни:**

$y_1 = 5$, $y_2 = 0{,}5$,

**Если** y = 5, то x = 4**; если** y =0,5, то x = -0,5.

*Ответ:* (-0,5; 0,5), (4; 5).

*Пример 3.* $\begin{cases} x^2 - 4y^2 - xy + 5y = 1, \\ x^2 + 3y^2 - xy - 4y = -1. \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 - 4y^2 - xy + 5y = 1, \\ 7y^2 - 9y = -2, \end{cases}$$

**Решим второе уравнение системы** $7y^2 - 9y + 2 = 0$. **Получим** $y_1 = \frac{2}{7}$, $y_2 = 1$.

**При подстановке** $y = \frac{2}{7}$ **в первое уравнение системы, получим уравнение** $49x^2-14x+5=0$, **которое не имеет решений; при** $y = 1$ **имеем уравнение** $x^2-x=0$, **имеющее корни** $x=0$ и $x=1$.

**Таким образом, данная система имеет два решения** (0; 1), (1; 1).

*Ответ:* (0; 1), (1; 1).

# Метод почленного умножения и деления уравнений системы

- **перемножаем (делим) уравнения системы почленно, при этом получая более простую зависимость между переменными;**
- **объединяя полученное уравнение с одним из уравнений исходной системы, решаем новую систему уравнений.**

*Пример 1.* $\begin{cases} x + xy^3 = 9, \\ xy + xy^2 = 6; \end{cases}$ $\begin{cases} x(1+y)(1-y+y^2) = 9, \\ xy(1+y) = 6. \end{cases}$

$\frac{1-y+y^2}{y} = 1{,}5;$ $y^2 - 2{,}5y + 1 = 0$ $\Rightarrow$ $y_1 = 0{,}5,\ y_2 = 2.$

**При** y = 0,5 **первое уравнение системы примет вид:** x + 0,125x = 9 $\Rightarrow$ x = 8;

**если** y = 2, то x + 8x = 9, то есть x = 1.

*Ответ:* (8; 0,5), (1; 2).

*Пример 2.* $\begin{cases} 2x^8 = x^4y^4 + 1, \\ 3y^8 = x^4y^4 + 2. \end{cases}$ $6(xy)^8 = (xy)^8 + 3(xy)^4 + 2 \Rightarrow 5(xy)^8 - 3(xy)^4 - 2 = 0.$

**Пусть** $(xy)^4 = t$ $(t \geq 0)$, **тогда уравнение примет вид:**

$5t^2 - 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 1,\ t_2 = -0{,}4$

$t = -0{,}4$ **не удовлетворяет условию** $t \geq 0$.

**Имеем одно уравнение:** $(xy)^4 = 1 \Rightarrow xy = -1$ или $xy = 1$.

**Получаем совокупность систем уравнений:** $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy = -1, \\ 2x^8 = x^4y^4 + 1; \end{cases} \\ \begin{cases} xy = 1, \\ 2x^8 = x^4y^4 + 1; \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy = -1, \\ 2x^8 = 2; \end{cases} \\ \begin{cases} xy = 1, \\ 2x^8 = 2; \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy = -1, \\ x^8 = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} xy = 1, \\ x^8 = 1. \end{cases} \end{array}\right.$

**Уравнение** $x^8 = 1$ **имеет корни** $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

**если** $x = -1$, **то** $y = 1$; если $x = 1$, **то** $y = -1$,

**если** $x = -1$, **то** $y = -1$**; если** $x = 1$, **то** $y = 1$.

*Ответ:* (-1; -1), (-1; 1), (1; -1), (1; 1).

# Метод введения новой переменной

Этапы указанного метода:

- вводится новая переменная только в одно уравнение или две новых переменных сразу для обоих уравнений;
- уравнение или уравнения решаются относительно новых переменных;
- остаётся решить уже более простую систему уравнений, из которой находим искомое решение.

*Пример.* $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 8, \\ \dfrac{5}{x} - \dfrac{2}{y} = 1. \end{cases}$

**ОДЗ:** $x \neq 0,\ y \neq 0$

**Пусть** $\dfrac{1}{x} = t$, **а** $\dfrac{1}{y} = z$, **тогда система уравнений примет вид:** $\begin{cases} 2t + 3z = 8, \\ 5t - 2z = 1. \end{cases}$

$$\begin{cases} 2t + 3z = 8, \Big| \cdot 2 \\ 5t - 2z = 1; \Big| \cdot 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4t + 6z = 16, \\ 15t - 6z = 3. \end{cases}$$

$19t = 19 \Rightarrow t = 1.$

**Если** $t = 1$, то $2 \cdot 1 + 3z = 8 \Rightarrow 3z = 6 \Rightarrow z = 2.$

**Вернёмся к переменным x и y:** $\begin{cases} \dfrac{1}{x} = 1, \\ \dfrac{1}{y} = 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1, \\ y = 0{,}5. \end{cases}$

**Пара чисел** (1; 0,5) **удовлетворяет ОДЗ.**

*Ответ:* (1; 0,5).

*Пример.* $\begin{cases} x + y = 5, \\ x^3 + y^3 = 65. \end{cases}$

**Пусть** x + y = u, xy = v, **тогда система уравнений примет вид:**

$$\begin{cases} u = 5, \\ u^3 - 3uv = 65; \end{cases} \quad \begin{cases} u = 5, \\ 125 - 15v = 65; \end{cases} \quad \begin{cases} u = 5, \\ 15v = 60; \end{cases} \quad \begin{cases} u = 5, \\ v = 4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5 - y, \\ y(5 - y) = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5 - y, \\ y^2 - 5y + 4 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5 - y, \\ \left[ \begin{array}{l} y = 1, \\ y = 4. \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} x = 4, \\ y = 1. \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1, \\ y = 4. \end{cases} \end{array} \right.$$

*Ответ*: (4; 1), (1; 4).

*Пример.* $\begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 0, \\ x^2 - xy - 2x - 3y = 6. \end{cases}$

**Если** y = 0, **то и** x = 0, **однако** x = 0 **и** y = 0 **не удовлетворяют второму уравнению системы.**

**Пусть** y ≠0. **Тогда, разделив первое уравнение на** $y^2$ **и полагая** $t = \frac{x}{y}$,

**получим уравнение** $t^2 - 2t - 3 = 0$, **которое имеет два корня:** $t_1 = -1$ и $t_2 = 3$.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{x}{y} = -1, \\ x^2 - xy - 2x - 3y = 6; \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{x}{y} = 3, \\ x^2 - xy - 2x - 3y = 6; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -y, \\ y^2 + y^2 + 2y - 3y = 6; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3y, \\ 9y^2 - 3y^2 - 6y - 3y = 6; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -y, \\ 2y^2 - y - 6 = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3y, \\ 2y^2 - 3y - 2 = 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

**Корни второго уравнения первой системы** $y_1 = 2$, $y_2 = -1{,}5 \Rightarrow x_1 = -2$, $x_2 = 1{,}5$.

**Корни второго уравнения второй системы** $y_1 = 2$, $y_2 = -0{,}5 \Rightarrow x_1 = 6$, $x_2 = -1{,}5$.

*Ответ*: (-1,5; -0,5), (-2; 2), (1,5; -1,5), (6; 2).

# Благодарю за внимание

# БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК


1. Аксенова М. Д. Энциклопедия для детей Аванта +. Т.11. Математика.
2. Алимов Ш. А. Алгебра для 6-8 классов. – М.: Просвещение, 1981. – 542 с.
3. Барчунова Ф. М., Бесчинская А. А., Денищева Л. О. и др. Алгебра в 6-8 классах: Пособие для учителя. – М.: Просвещение, 1988. – 384 с.
4. Вавилов В. В. Задачи по математике. Алгебра. – М.: Наука, 1987. – 432 с.
5. Галицкий М.Л., Гольдман А.М., Звавич Л. И. Сборник задач по алгебре для 8-9 классов. – М.: Просвещение, 1992. – 271 с.
6. Крамор В. С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа. – М.: Просвещение, 1990. – 416 с.
7. Никольский С. М. Математика – школьная энциклопедия. – М.: Большая российская энциклопедия, 1996.
8. Шарыгин И. Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач: Учебное пособие для 10 класса средней школы. – М.: Просвещение, 1989. – 252 с.
9. Яковлева Г. Н. Пособие по математике для поступающих в вузы. – М.: Наука, 1982.– 608 с.
10. «Симметрические системы»

www www. www.college www.college. www.college.ru www.college.ru/ www.college.ru/mathematics www.college.ru/mathematics/ www.college.ru/mathematics/courses www.college.ru/mathematics/courses/ www.college.ru/mathematics/courses/algebra www.college.ru/mathematics/courses/algebra/ www.college.ru/mathematics/courses/algebra/content www.college.ru/mathematics/courses/algebra/content/