

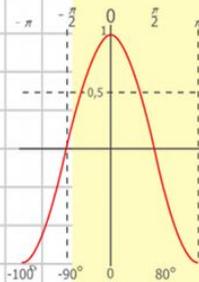
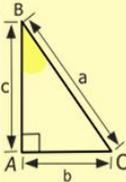
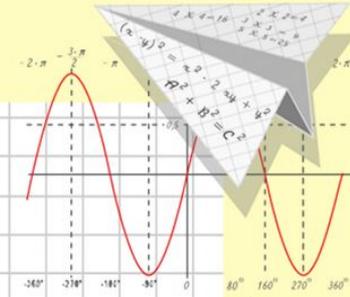
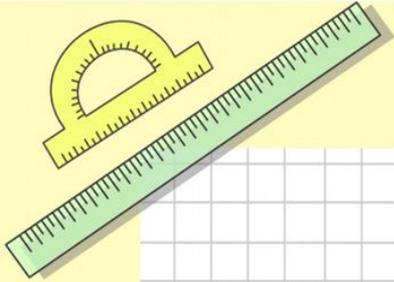
# Математик

а

## Занятие 120.

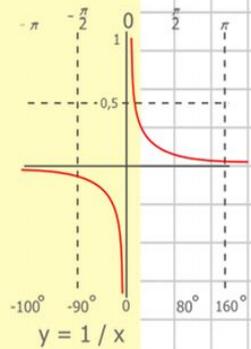
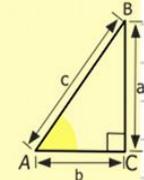
# Вероятность и ее свойства

1. Основные понятия
2. Определение вероятности
3. Свойства вероятности



$$y = \cos x$$

- $2 \times 2 = 4$
- $3 \times 3 = 9$
- $4 \times 4 = 16$
- $5 \times 5 = 25$
- $6 \times 6 = 36$
- $7 \times 7 = 49$
- $8 \times 8 = 64$



$$\begin{array}{r} 1 \\ 2500 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 10500 \end{array}$$

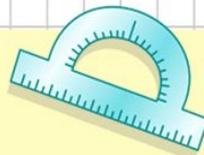


$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

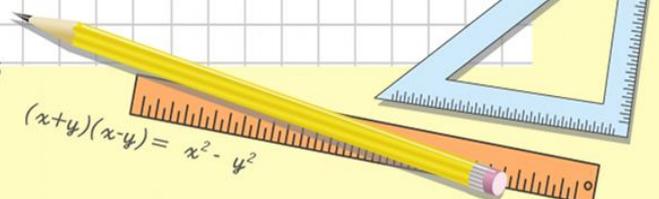
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$



$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \\ y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ x = 70 \end{cases}$$



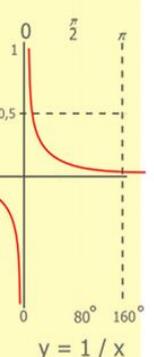
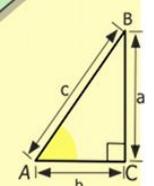
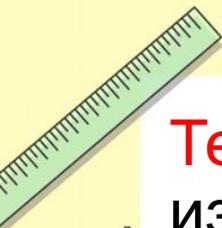
$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

# Основные понятия

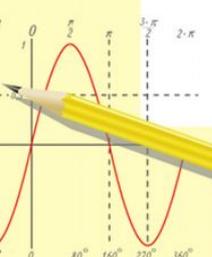
**Теория вероятностей** - раздел математики, изучающий случайные события, случайные величины, их свойства и операции над ними.

**Испытание** - это возникновение или преднамеренное создание определенной совокупности условий, результатом которого является тот или иной исход (эксперимент, опыт, процесс, явление).

**Событие** – исход испытания, т.е. любой факт, который в результате испытания может произойти или не произойти.



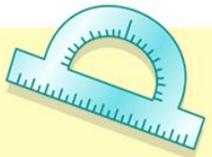
$$\begin{array}{r} 2500 \\ \times 42 \\ \hline 2100 \\ + 840 \\ \hline 105000 \end{array}$$



$$\frac{a}{A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

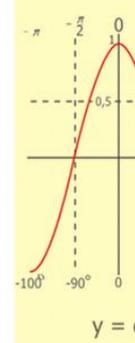
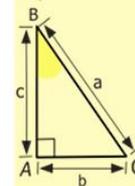
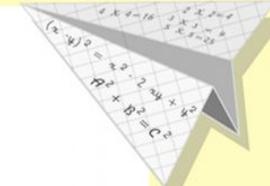
$$\sin 90^\circ = 1$$



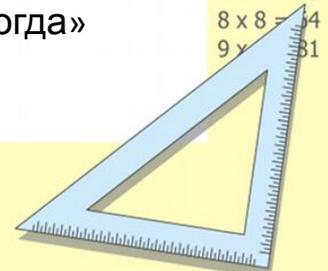
$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ \hline x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



- 2 x 2 = 4
- 3 x 3 = 9
- 4 x 4 = 16
- 5 x 5 = 25
- 6 x 6 = 36
- 7 x 7 = 49
- 8 x 8 = 64
- 9 x 9 = 81



# Основные понятия

Например:

1. Выпадение «орла» при подбрасывании монеты.
2. Выигрыш приза по лотерейному билету.
3. Выход бракованного изделия с конвейера предприятия.
4. Выпадение более 1000 мм осадков в г. Москва за определенный год.

События называются **равновозможными**, если есть основания считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другие.

События называются **несовместными**, если появление одного из них исключает появление всех остальных. В противном случае события совместные.

Испытание – подбрасывание игральной кости (кубика)

$A_1$  = «выпало 1 очко»;  $A_2$  = «выпало 2 очка»;  $A_3$  = «выпало 3 очка»;  
 $A_4$  = «выпало 4 очка»;  $A_5$  = «выпало 5 очков»;  $A_6$  = «выпало 6 очков»

или

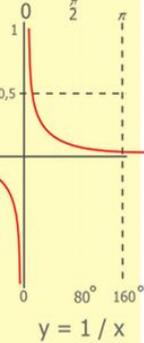
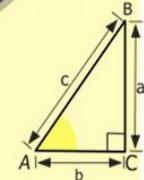
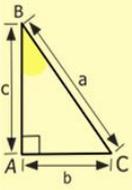
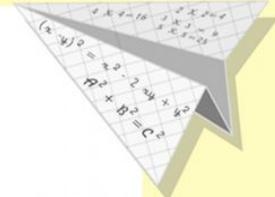
A = «выпало четное количество очков»

B = «выпало нечетное количество очков»

C = «выпало более 4 очков»

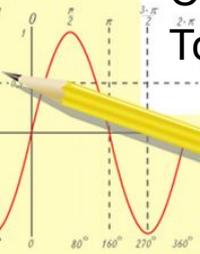
Тогда:  $A_1, \dots, A_6$  - несовместные;

A и C - совместные



$$\begin{array}{r} 2500 \\ \times 42 \\ \hline 2100 \\ + 8400 \\ \hline 105000 \end{array}$$

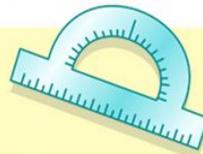
$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$



$$\frac{a}{A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

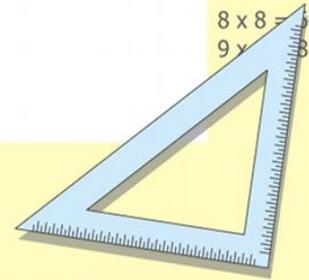


$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



# Основные понятия

Несколько событий образуют **полную группу**, если они являются единственно возможными и несовместными исходами испытания.

Это означает, что в результате испытания обязательно должно произойти одно и только одно из этих событий.

Тогда из последнего примера:  $A_1, \dots, A_6$  - полная группа;  $A$  и  $B$  - полная группа

Два события, образующих полную группу, называют **противоположными**.

$\bar{A}$  – событие противоположное событию  $A$ .

Тогда из последнего примера:  $A$  и  $B$  – противоположные, т.е.  $B = \bar{A}$

События называют **независимыми**, если появление одного из них не оказывает влияния на появление остальных событий.

Например:

выпадение «орла» при нескольких подбрасываниях монеты;

попадание в цель при выстреле залпом из нескольких орудий;

полученные на экзамене оценки несколькими студентами – независимые события

последовательное извлечение шариков из ящика, в котором находились белые и черные шарики – зависимые события

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

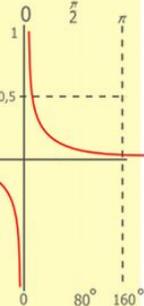
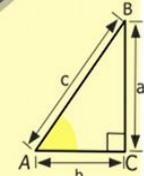
$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

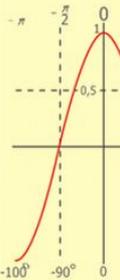
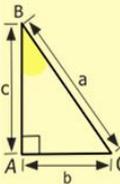
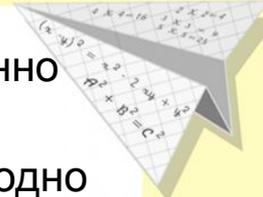
$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



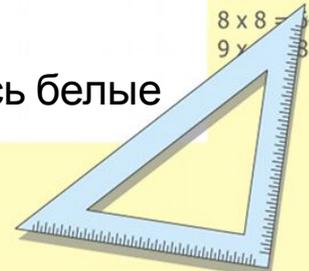
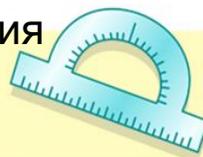
$$y = 1/x$$

$$\begin{array}{r} 1\ 2\ 5\ 00 \\ \times 4\ 2 \\ \hline 21\ 0 \\ + 84\ 0 \\ \hline 105\ 0\ 00 \end{array}$$



$$y = \cos$$

$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$



# Вероятность (классическая)

Представление о случайности событий связано с невозможностью предсказания исхода того или иного испытания.

Под вероятностью события понимается некоторая числовая характеристика возможности наступления этого события в результате испытания

$$p(A) = \frac{m}{n}$$

$m$  – количество благоприятных исходов

$n$  – количество всех возможных исходов

Испытание – подбрасывание игрального кубика.

Найти вероятность событий:

1)  $A_5$  = «выпало 5 очков»

$$p(A_5) = \frac{1}{6}$$

2)  $B$  = «выпало нечетное количество очков»

$$p(B) = \frac{3}{6} = 0,5$$

3)  $C$  = «выпало более 4 очков»

$$p(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

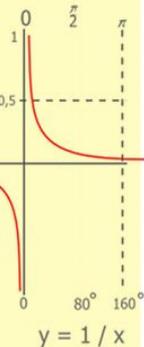
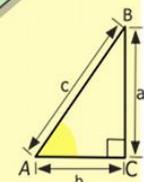
$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} y = \sin 20 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

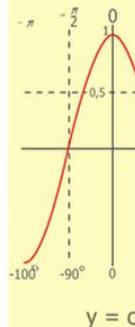
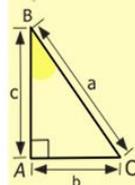
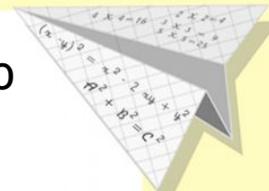
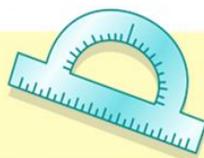
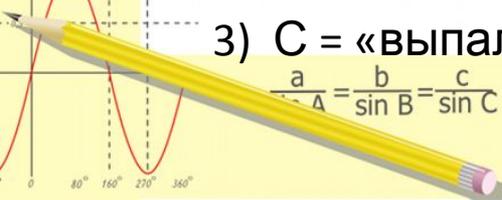
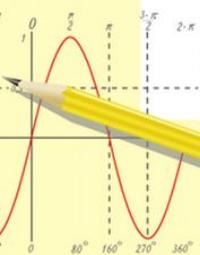
$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

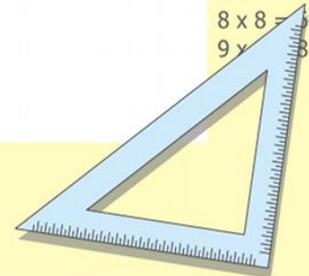


$$\begin{array}{r} 12500 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 105000 \end{array}$$



$$y = \cos$$

- 2 x 2 = 4
- 3 x 3 = 9
- 4 x 4 = 16
- 5 x 5 = 25
- 6 x 6 = 36
- 7 x 7 = 49
- 8 x 8 = 64
- 9 x 9 = 81



# Вероятность (статистическая)

Задача о динозавре. Какова вероятность, что выйдя после занятий из колледжа вы встретите динозавра?

$$p(A) = \frac{m}{n}$$

$m$  – количество испытаний с благоприятным исходом  
 $n$  – количество всех испытаний

На складе в ящике лежат 50 лампочек, из которых 3 испорченные. Завхоз наугад достает одну. Какова вероятность, что эта лампочка исправная?

$$n = 50$$

$$m = 50 - 3 = 47$$



$$p(A) = \frac{47}{50} = 0,94$$

Автомат производит детали. Вероятность, что деталь бракованная, составляет 0,05. Какое максимальное количество бракованных деталей может оказаться в партии из 200 деталей.

$$p(A) = \frac{m}{n}$$

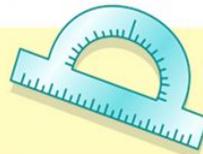


$$m = p(A) * n = 0,05 * 200 = 10$$

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

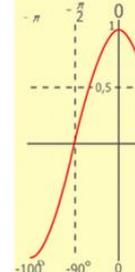
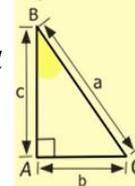
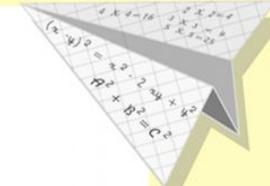
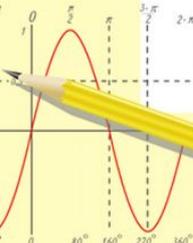
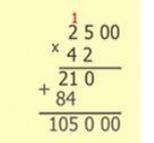
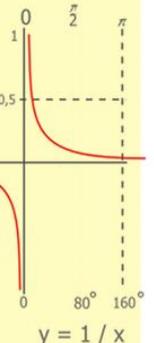
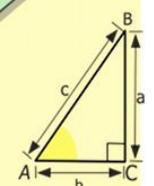
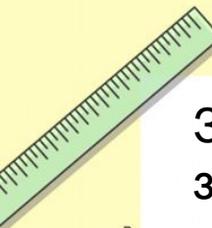
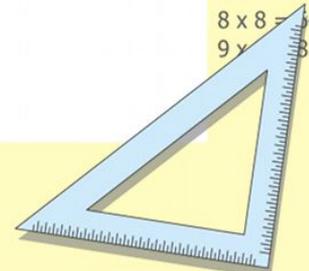
$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ \hline x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



- $y = \cos$
- $2 \times 2 = 4$
- $3 \times 3 = 9$
- $4 \times 4 = 16$
- $5 \times 5 = 25$
- $6 \times 6 = 36$
- $7 \times 7 = 49$
- $8 \times 8 = 64$
- $9 \times 9 = 81$

# Вероятность (геометрическая)

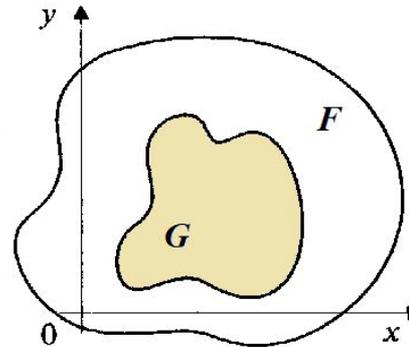
События – это точки на плоскости.

F – область, в которую попадают точки, соответствующие всем возможным исходам испытания

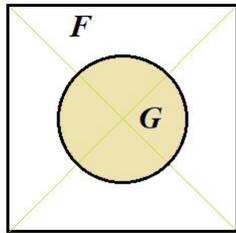
G – область, в которую попадают точки, соответствующие всем благоприятным исходам испытания

Тогда:

$$p(A) = \frac{S(G)}{S(F)}$$



В квадрат со стороной 8 см наудачу брошена точка. Какова вероятность, что она будет располагаться не далее 3 см от его центра?



$$p(A) = \frac{S(\text{круга})}{S(\text{квадрата})} = \frac{\pi * 3^2}{8^2} = \frac{9\pi}{64} \approx 0,44$$

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

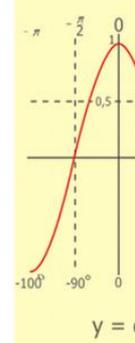
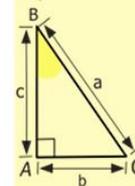
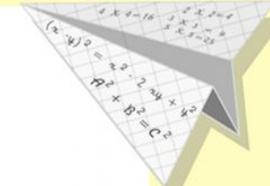
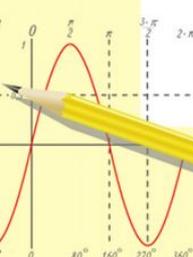
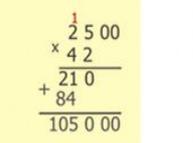
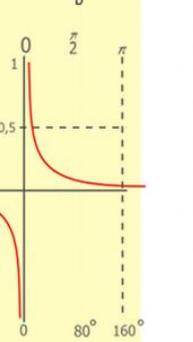
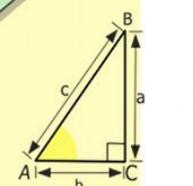
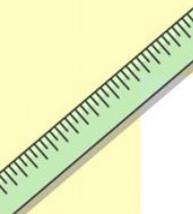
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

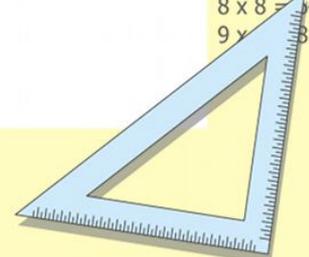
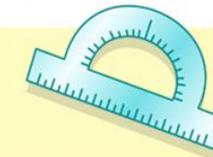
$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



- 2 x 2 = 4
- 3 x 3 = 9
- 4 x 4 = 16
- 5 x 5 = 25
- 6 x 6 = 36
- 7 x 7 = 49
- 8 x 8 = 64
- 9 x 9 = 81



# Свойства вероятности

- $0 \leq p(A) \leq 1$
- $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$
- Если  $A_1, A_2, \dots, A_n$  - полная группа, то:  

$$p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_n) = 1$$

## Комбинаторика

$$P_n = n!$$

$$\tilde{P}_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$\tilde{A}_n^k = n^k$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\tilde{C}_n^k = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}$$

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

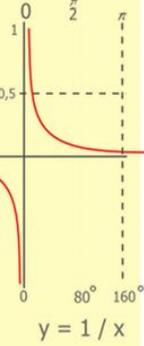
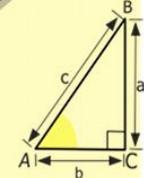
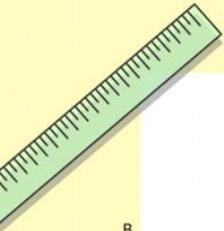
$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} x = 25y + 45 \\ y = 1 \end{cases}$$

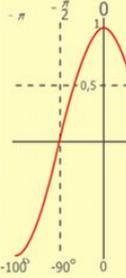
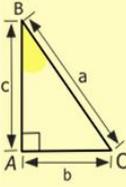
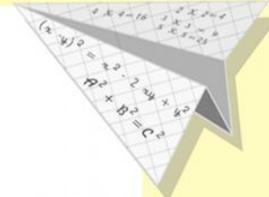
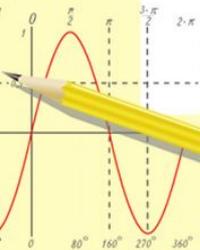
$$\begin{cases} x = 25 + 45 \\ x = 70 \end{cases}$$

$$\frac{x}{x-70}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

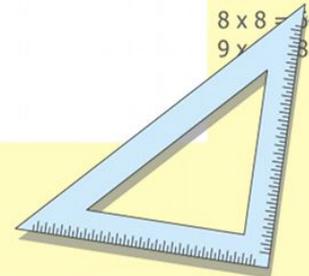


$$\begin{array}{r} \frac{1}{2} 500 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 105000 \end{array}$$



$$y = \cos$$

$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$



# Решение задач

Какова вероятность, что при бросании двух игральных кубиков в сумме выпадет 9 очков?

Решение:

$$n = 6 * 6 = 36$$

$$m = \{3 + 6; 4 + 5; 5 + 4; 6 + 3\} = 4$$



$$p(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

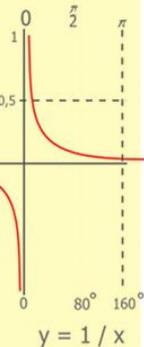
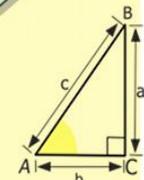
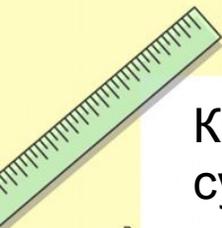
Из 30 студентов 10 имеют спортивные разряды. Какова вероятность, что выбранные наудачу 3 студента - разрядники?

Решение:

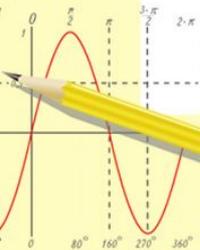
$$n = C_{30}^3 = \frac{30!}{3! \cdot 27!} = \frac{28 * 29 * 30}{1 * 2 * 3} = 28 * 29 * 5 = 4060$$

$$m = C_{10}^3 = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{8 * 9 * 10}{1 * 2 * 3} = 4 * 3 * 10 = 120$$

$$p(A) = \frac{120}{4060} \approx 0,03$$



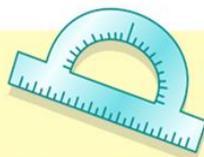
$$\begin{array}{r} 2500 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 105000 \end{array}$$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

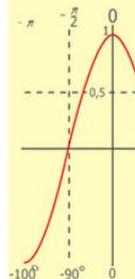
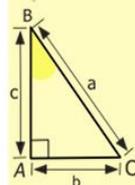
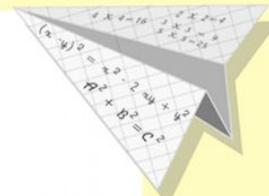
$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

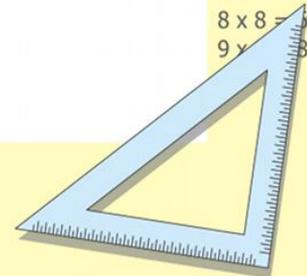
$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ \hline x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



$$y = \cos$$

- 2 x 2 = 4
- 3 x 3 = 9
- 4 x 4 = 16
- 5 x 5 = 25
- 6 x 6 = 36
- 7 x 7 = 49
- 8 x 8 = 64
- 9 x 9 = 81



# Решение задач

В лифт на 1-м этаже девятиэтажного дома вошли 3 человека, каждый из которых может подняться и выйти независимо друг от друга на любом этаже. Какова вероятность того, что все пассажиры выйдут на одном этаже?

Решение:

$$n = 8 * 8 * 8 = 512$$

$$m = 8$$

$$p(A) = \frac{8}{512} = \frac{1}{64} \approx 0,016$$

Из 30 студентов 10 имеют спортивные разряды. Какова вероятность, что из 5 выбранных наудачу студентов, 3 студента - разрядники?

Решение:

$$n = C_{30}^5 = \frac{30!}{5! \cdot 25!} = \frac{26 * 27 * 28 * 29 * 30}{1 * 2 * 3 * 4 * 5} = 26 * 27 * 7 * 29 = 142506$$

$$m = C_{10}^3 * C_{20}^2 = \frac{10!}{3! \cdot 7!} * \frac{20!}{2! \cdot 18!} = \frac{8 * 9 * 10}{1 * 2 * 3} * \frac{19 * 20}{1 * 2} = 4 * 3 * 10 * 19 * 10 = 22800$$

$$p(A) = \frac{22800}{142506} \approx 0,16$$

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

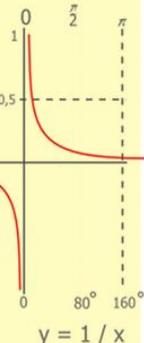
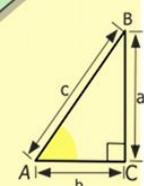
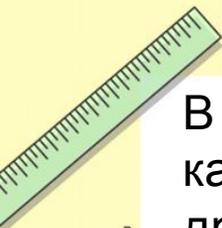
$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

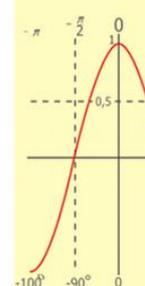
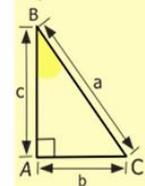
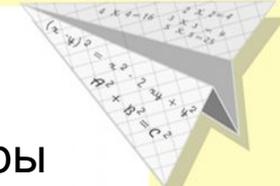
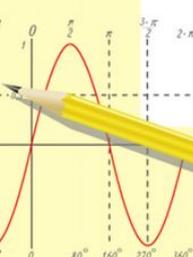
$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 10500 \end{array}$$



$$y = \cos$$

- 2 x 2 = 4
- 3 x 3 = 9
- 4 x 4 = 16
- 5 x 5 = 25
- 6 x 6 = 36
- 7 x 7 = 49
- 8 x 8 = 64
- 9 x 9 = 81

