

ТЕМА: «МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА.

СТАТИКА»

Лекция №3 «Стержневые системы»

В строительной практике большое число задач после некоторых упрощений может быть приведено к плоской системе сил, пересекающихся в одной точке. Рассмотрим **4 группы практических задач:**

- кронштейны;
- консольные фермы;
- простейшие балочные фермы;
- строительные стропильные фермы.

Все эти системы (конструкции) имеют один общий признак: они состоят из стержней и поэтому называются **стержневыми**.

3.1 Кронштейны

Кронштейн - простейшая геометрически неизменяемая конструкция, состоящая из двух стержней или стержня и гибкой нити (рис.3.1, а, б).

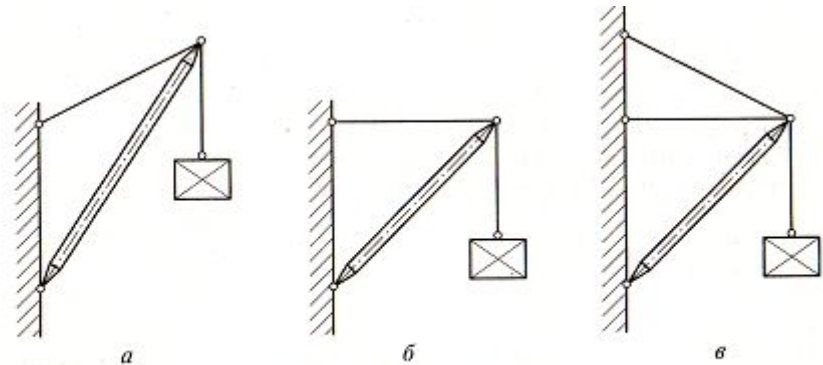


Рис. 3.1 Кронштейны:

а, б — статически определимые; в — статически неопределимый

Жесткий стержень называют упором, а гибкую нить – тягой.

Упоры работают на сжатие и представляют собой жесткие конструкции, состоящие чаще всего из труб. Но могут использоваться профили, часто сварные. Вылет у кронштейнов небольшой -1,5...2м.

Общий порядок определения усилий в кронштейне.

1. Указывают точку, равновесие которой рассматривается. Это точка пересечения всех стержней и нитей.
2. Прикладывают активную силу (внешнюю нагрузку), которой является вес груза (обозначается G).
3. Мысленно отбрасывают связи заменяя их действие реакциями связей. Направление реакций принимают произвольно. Реакции нити и стержня принято называть внутренними усилиями и обозначать буквой N (реже- S). К рассматриваемой точке прикладывают реакции связей. Лучше сделать это на отдельном чертеже, выполненном схематично. В результате получают систему трех сходящихся сил. Активная сила известна, а реакции связей (их две) неизвестны.
4. Выбирают положение прямоугольной системы координат. Начало координат совмещают с точкой, равновесие которой рассматривается. Далее необходимо определить углы между известными силами, неизвестными усилиями и координатными осями и указать их на чертеже.
5. Составляют уравнения равновесия вида:

$$\sum X=0; \sum Y=0$$

Если сила и ось направлены в одну сторону, то перед величиной проекции ставят знак «+», в обратном случае знак «-». Решают систему с двумя неизвестными.

Если ответ получается со знаком «-», значит направление реакции на чертеже было выбрано неверно.

Пример 3.1. Определить усилия в стержнях АВ (упоре) и АС (тяге) кронштейна, показанного на рис.3.2,а, если $F=20\text{кН}$, $\alpha=30^\circ$.

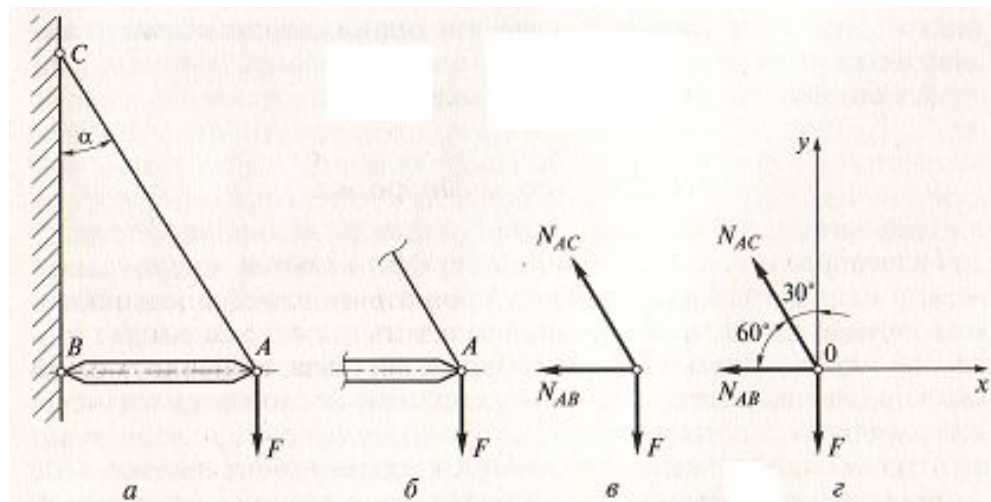


Рис. 3.2 К примеру 3.1:

a — заданная схема кронштейна; *б* — вырезанный узел кронштейна; *в* — схема действия усилий в узле; *г* — схема усилий с указанием координатных осей и углов между усилиями и осями

Решение:

1. Рассматриваем равновесие точки А, мысленно вырезав ее из кронштейна (рис.3.2,б).

2. Прикладываем активную (внешнюю) силу F .

3. Прикладываем реактивные силы, заменяя тягу AC на усилие N_{AC} , а упор – на усилие N_{AB} . Направление N_{AC} – вверх по оси тяги, направление N_{AB} – предположительно влево (т.к. упор предположительно растянут) (рис.3.2, в).

4. Выбираем положение осей координат: ось Ox направляем горизонтально, ось Oy – вертикально. Ось Ox совпала с усилием N_{AB} , но имеет противоположное направление (рис.3.2, г).

5. Составляем уравнения равновесия: $\sum X=0, \sum Y=0$.

6. Решаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} -N_{AC} \cos(90 - \alpha) - N_{AB} &= 0; \\ -F + N_{AC} \cos \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Из второго уравнения:

$$N_{AC} = \frac{F}{\cos \alpha} = \frac{20}{\cos 30^\circ} = \frac{20}{0,866} = 23,1 \text{ кН},$$

Из первого уравнения:

$$N_{AB} = -N_{AC} \cos(90^\circ - \alpha) = -23 \cos 60^\circ = -23,1 \cdot 0,5 = -11,55 \text{ кН}.$$

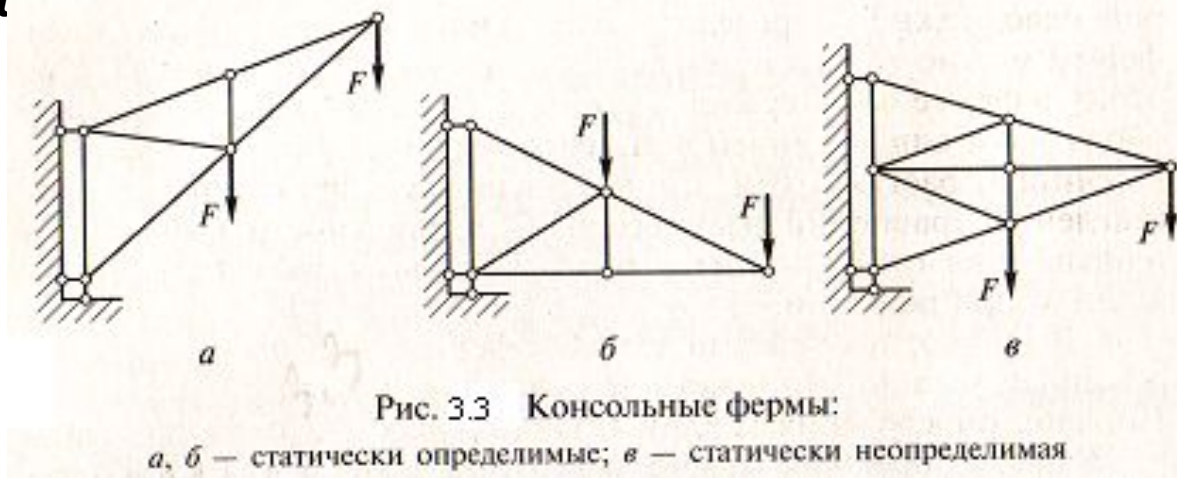
Знак «-» перед числовым значением говорит о том, что усилие N_{AB} направлено не от узла, а к нему, т.е. упор AB не растянут, как мы предполагали, а сжат.

3.2 Консольные

фермы

Консольные фермы являются как бы дальнейшим развитием конструкции кронштейнов. Их применяют когда необходимо увеличить вылет (расстояние от опоры до места приложения груза до 4...6м).

Консольные фермы - геометрически неизменяемые системы, состоящие из прямолинейных стержней, соединенных в узлах с помощью шарниров



Общий порядок определения усилий в кронштейне.

Задачу можно решать аналитическим или графическим способом. Рассмотрим порядок решения аналитическим способом.

1. Обозначают узлы буквами, а стержни – цифрами.
2. Определяют углы между стержнями в каждом узле, используя геометрическую схему фермы.

3. Мысленно вырезают узел, в котором сходятся два стержня. Определяют усилия в этих стержнях в следующем порядке:

а) стержни заменяют усилиями в них. Удобнее узел показывать на отдельном рисунке;

б) выбирают систему координат. Начало ее совмещают с точкой пересечения всех стержней. Одну из осей совмещают с одним из неизвестных усилий, а другую ось проводят перпендикулярно первой;

в) составляют уравнения равновесия $\sum X=0$, $\sum Y=0$. Решают их и находят неизвестные усилия.

Определить знак усилия в большинстве узлов фермы можно только путем решения уравнения равновесия. Поэтому в ферме все стержни обозначают одной линией в отличие от кронштейнов, и считают их растянутыми, т.е. направляют усилия от узла при составлении уравнений равновесия.

4. Вырезают поочередно все узлы фермы, причем каждый узел должен иметь не более двух неизвестных усилий.

Проверку решения можно выполнить графическим способом.

Пример 3.2. Определить усилия в стержнях консольной фермы, показанной на рис. 3.4,а, если $F_1=10\text{кН}$ $F_2=20\text{кН}$, $\alpha=15^\circ$.

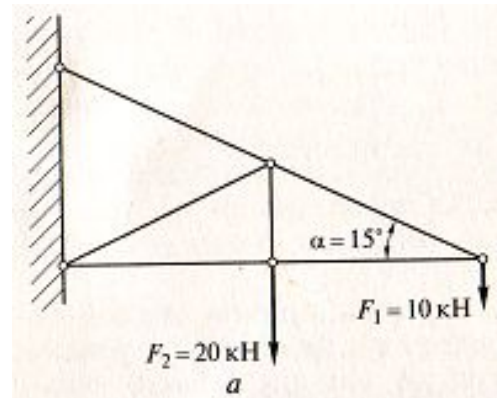
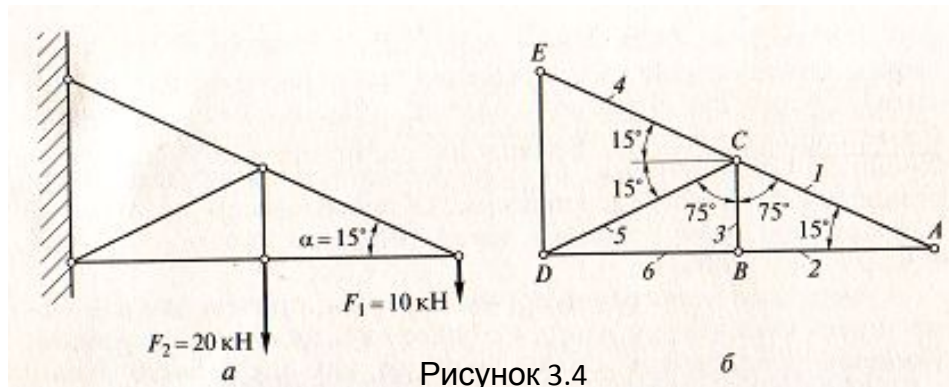


Рис. 3.4 К примеру 3.2:

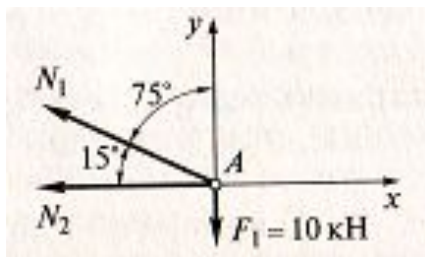
Решение:

1. Обозначаем узлы точками A, B, C, D, E , а стержни цифрами $-1, 2, 3, 4, 5, 6$. Порядок обозначения произвольный (рис.3.4, б).



2. Определяем углы между стержнями в каждом из узлов.

3. Мысленно вырезаем узел, в котором сходятся два стержня. Выбираем узел A . Показываем усилия N_1 и N_2 , проставляем углы, выбираем систему координат (рис.3.4, в) и составляем уравнения равновесия:



$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0,$$

или

$$-N_1 \cos 15^\circ - N_2 = 0;$$

$$-F_1 + N_1 \cos 75^\circ = 0.$$

Из второго уравнения находим N_1

:

$$N_1 = \frac{F}{\cos 75^\circ} = \frac{10}{0,259} = 38,61 \text{ кН.}$$

Из первого уравнения находим N_2 :

$$N_2 = -N_1 \cos 15^\circ = -38,61 \cdot 0,966 = -37,3 \text{ кН.}$$

Стержень 1 – растянут,
стержень 2-сжат, о чем говорят
знаки

Рисунок 3.4,
в

4. Вырезаем узел В. Показываем усилия N_3 и N_6 , проставляем углы, выбираем систему координат (рис.3.4,г) и составляем уравнения равновесия:

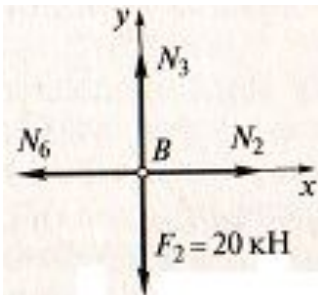


Рисунок 3.4,

$$N_2 - N_6 = 0, \text{ откуда } N_6 = N_2 = -37,3 \text{ кН (стержень сжат);}$$

$$N_3 - F_2 = 0, \text{ откуда } N_3 = F_2 = 20 \text{ кН (стержень растянут).}$$

5. Вырезаем узел С. Показываем усилия N_4 и N_5 , проставляем углы, выбираем систему координат (рис.3.4,д) и составляем уравнения равновесия:

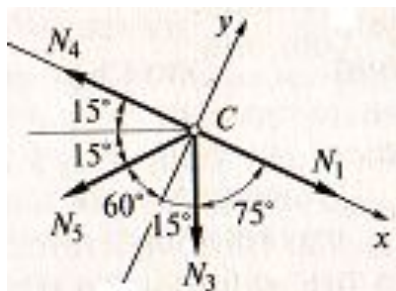


Рисунок 3.4,
д

$$-N_4 + N_1 + N_3 \cos 75^\circ - N_5 \cos 30^\circ = 0;$$

$$-N_3 \cos 15^\circ - N_5 \cos 60^\circ = 0.$$

Из второго уравнения находим N_5

$$: N_5 = -\frac{N_3 \cos 15^\circ}{\cos 60^\circ} = -\frac{20 \cdot 0,966}{0,5} = -38,64 \text{ кН.}$$

Из первого уравнения находим N_4 :

$$N_4 = N_1 + N_3 \cos 75^\circ - N_5 \cos 30^\circ = 38,61 + 20 \cdot 0,259 - (-38,64) \cdot 0,866 = 38,61 + 5,18 + 33,46 = 77,25 \text{ кН.}$$

Консольные фермы могут быть статически неопределимыми. Если неизвестных больше двух, то ферма считается статически неопределимой (рис. 3.3,в).

3.3 Простейшие балочные

фермы

Консольные фермы имеют определенные преимущества перед кронштейнами, но перекрывают небольшие пролеты и несут ограниченные нагрузки.

В случаях больших нагрузок и пролетов применяют балочные фермы (рис.3.5), которые перекрывают пролеты длиной 12...15м.

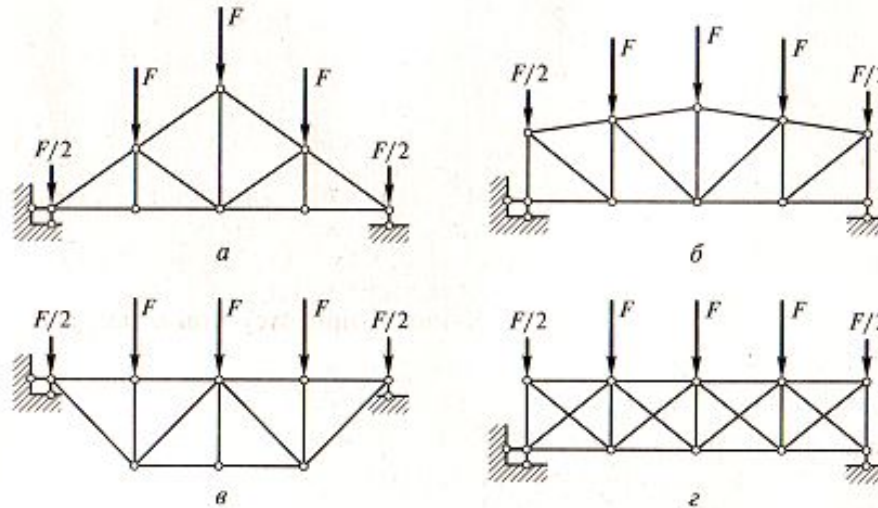


Рис. 3.5 Простейшие балочные фермы:

а, б, в — статически определимые; *г* — статически неопределимая

Отличием балочных ферм от консольных является то, что балочные фермы не имеют свободного конца (узла), в котором сходятся два стержня. Указанное отличие накладывает отпечаток на расчет балочных ферм. *Прежде чем находить усилия в них, необходимо определить опорные реакции.*

На фермы обычно действуют вертикальные нагрузки, причем прикладываются они симметрично относительно середины.

При расчете балочных ферм можно использовать аналитический и графический способы. **Однако при большом числе узлов чаще применяется один из графических способов, называемый *диаграммой***

Максвелла-Кремоны
Общий порядок определения усилий в стержнях фермы построением диаграммы Максвелла – Кремоны.

1. Вычерчивают геометрическую схему фермы строго в масштабе длин, рекомендуется начинать с 1:200 или 1:100. После вычерчивания схемы к узлам прикладывают внешние силы.

2. Обозначают внешние и внутренние поля. Внешние поля ограничены внешними силами и поясами фермы. Эти поля разомкнуты, их принято обозначать буквами $a, b, c, d \dots$, обходя ферму по часовой стрелке. Первое поле ограничено линией действия опорной реакции и первой (крайней) силы. Оно представляет собой полуплоскость, расположенную слева от линии действия указанных сил. Если ферма и нагрузки имеют ось симметрии, то симметричные поля правой части фермы обозначают теми же буквами, что и левой части, но со штрихами $-a', b', c', d'$.

Внутренние поля ограничены только стержнями фермы. Они замкнуты, их обозначают цифрами $1, 2, 3 \dots$, обходя ферму слева направо. При симметричной схеме фермы поля правой половины можно обозначать $1', 2', 3'$.

3. Определяют опорные реакции фермы графическим способом:

а) выбирают масштаб сил; б) откладывают в принятом масштабе все внешние силы поочередно в том порядке, в каком они встречаются при обходе фермы по часовой стрелке. Каждая сила обозначается двумя

полями (буквами) между

которыми она расположена. Отложенные последовательно сверху вниз внешние силы образуют силовую линию, длина которой в масштабе сил равна сумме всех внешних сил, действующих на ферму;

в) определяют опорные реакции фермы. Вследствие симметрии схемы фермы и нагрузки опорные реакции равны между собой, причем каждая из них составляет половину длины силовой линии и направлена вверх (в сторону, противоположную действию нагрузки). Опорные реакции, как и внешние силы, обозначаются полями, между которыми они лежат. На силовую линию наносят точку, которая обозначает поле, расположенное между опорными реакциями. Она находится в середине силовой линии. Нижняя половина силовой линии является правой опорной реакцией, а верхняя – левой.

4. Строят собственную диаграмму усилий в следующем порядке:

а) обозначают стержни. При графическом способе расчета каждый стержень обозначается двумя полями, между которыми он лежит. Наименование стержня зависит также от рассматриваемого узла: стержень обозначается двумя полями, которые указываются в том порядке, в каком встречаются при обходе рассматриваемого узла по часовой стрелке. Обозначение стержней может быть цифровым (1-2, 2-3, и т.д.) для элементов решетки и буквенно-цифровым (1-а, 2-б и т.д.) для поясов и опорных стоек.

б) мысленно вырезают узлы. Первым вырезают узел, в котором сходятся два стержня. С него начинают расчет. Стержни этого узла находятся между тремя полями: двумя буквенными и одним цифровым. На силовой линии уже есть точки, соответствующие буквенным полям. Через эти точки проводят линии, параллельные стержням рассматриваемого узла. Пересечение этих

обозначают цифрой, соответствующей цифре поля, примыкающего к рассматриваемому узлу. Стержень и параллельное ему усилие имеют одинаковое обозначение. По длине линии на диаграмме, измеренной в масштабе сил, находят величину усилия в соответствующем стержне. Знак усилия определяют следующим образом. Сначала по схеме фермы устанавливают обозначение стержня, обходя узел по часовой стрелке, затем на диаграмме перемещаются по направлению усилия от одной точки к другой в том порядке, в каком обозначается стержень; затем это движение переносят на стержень фермы. Если движение направлено по стержню от узла, то стержень считается растянутым, а если к узлу – сжатым. На диаграмме каждый стержень показывают жирной (или красной) линией, а растянутый – тонкой (или синей).

в) вырезают узел, в котором сходятся три стержня. Усилия в двух из них неизвестны, а в третьем оно определено при рассмотрении первого узла. На диаграмме усилий находят две точки, соответствующие двум полям, прилегающим к рассматриваемому узлу. Через эти точки проводят линии, параллельные стержням, усилия в которых неизвестны. Точку пересечения обозначают номером поля, лежащего между двумя стержнями, усилия в которых отыскиваются. Длины линий на диаграмме, измеренные в масштабе сил, равны величине усилий в этих стержнях. Знак определяется по правилам, описанным для первого узла.

г) для каждого следующего рассмотрения выбирают тот узел, в котором сходятся два стержня с неизвестными усилиями, а усилия в остальных стержнях уже определены. Порядок определения величины и знака усилия остается тем же что для первого и второго узлов. При симметричной

можно строить только для одной (левой) половины, так как усилия в стержнях правой половины равны усилиям в симметричных стержнях левой половины;
 д) определение усилий заканчивают составлением таблицы с обозначением стержней и указанием величины и знака усилий.

Пример 3.3. Определить усилия в стержнях балочной фермы, показанной на рис. 3.5,а, путем построения диаграммы Максвелла – Кремоны по следующим данным: $a=3\text{м}$, $h=3,5\text{м}$, $F_1=10\text{кН}$, $F_2=20\text{кН}$. (Рассмотренная в примере 3.2 консольная ферма (рис.3.4,а) составляет половину данной балочной фермы по своим очертаниям, но прикреплены эти фермы к основанию по-разному)

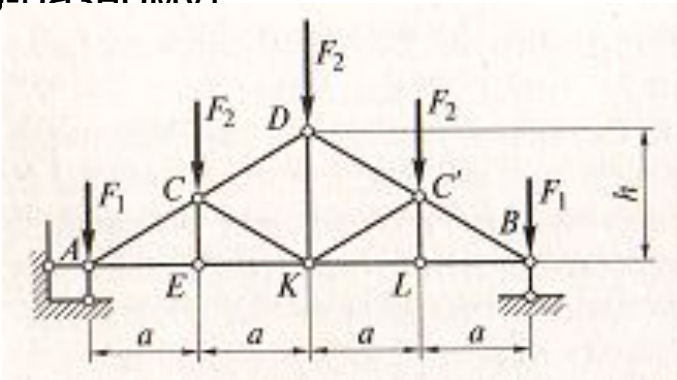


Рис. 3.6 К примеру 3.3;
 a – заданная схема фермы;

Решение:

1. Вычерчиваем геометрическую схему фермы. Принимаем масштаб: 1см-3м, т.е. 1:300.

2. Обозначаем внешние поля буквами a, b, c, c', b', a', d , внутренние – цифрами 1,2,3,3',2',1' (рис.3.6,б).

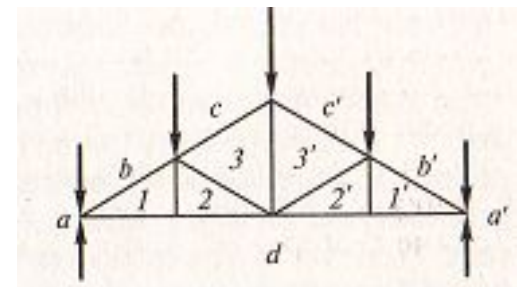


Рис. 3.6,б К примеру 3.3

3. Определяем опорные реакции фермы:

а) выбираем масштаб сил: 1см-10кН

б) строим силовую линию $a-b-c-c'-b'-a'$ из внешних сил (рис.3.6,в).

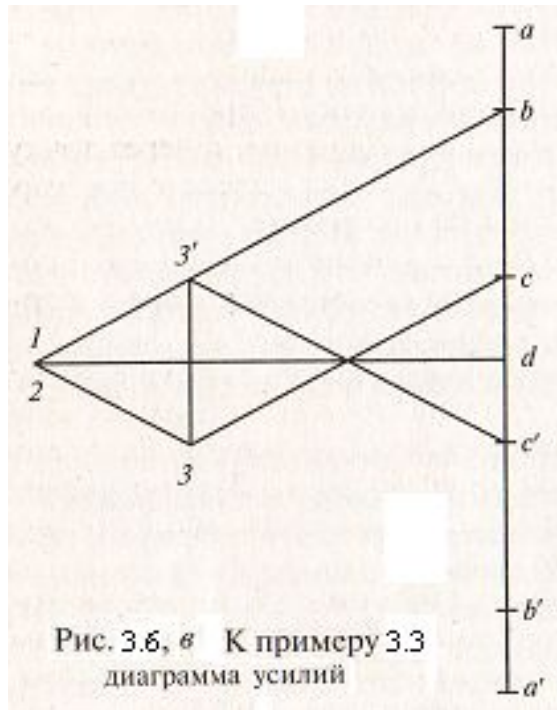


Рис. 3.6, в К примеру 3.3
диаграмма усилий

в) определяем опорные реакции, для чего делим силовую линию пополам точкой d . Отрезок $a'-d$, измеренный в масштабе сил, представляет собой правую опорную реакцию, отрезок $a-d$ – левую. Каждая из них равна 4см, т.е. 40кН.

4. Строим диаграмму усилий:

а) мысленно вырезаем узел А фермы, в котором сходятся два стержня, которые теперь будут обозначаться $b-1$ и $1-d$, поскольку в таком порядке следуют буквы и цифры при обходе узла по часовой стрелке ($b, 1, d$). На силовой линии уже есть точки b и d . Проводим через них линии, параллельные стержням, примыкающим к узлу А. они пересекаются в точке 1.

Определяем величины усилий в стержнях $b-1$ и $1-d$: длина отрезка $b-1$ составляет 5,9см, значит усилие - 59кН; длина отрезка $1-d$ равна 5,0см, следовательно, усилие-50кН.

Определяем знаки усилий. На диаграмме усилий (рис.3.6,в) движение от точки b к точке 1 направлено справа налево. Это направление для стержня $b-1$ – к узлу (рис.3.6,б), т.е. стержень сжат. Перед числовым значением усилия должен быть знак «-». Движение от точки 1 к точке d на диаграмме направлено слева

Для стержня 1-d это направление от узла А, т.е. стержень растянут. Знак перед числовым значением усилия «+».

б) вырезаем узел Е, в котором сходятся два стержня, усилия в которых неизвестны. Эти стержни будут обозначаться 1-2 и 2-d. На диаграмме усилий уже есть точки 1 и d. Проводим через них линии, параллельные стержню 1-2 (вертикально через точку 1) и стержню 2-d (горизонтально через точку 2). Эти линии на диаграмме пересекаются в точке 1, т.е. точка их пересечения 2 совпадает с точкой 1. Таким образом, линия 1-2 на диаграмме превращается в точку, а это значит, что усилие в стержне 1-2 равно нулю. Усилие в стержне 2-d по величине и знаку равно усилию в стержне 1-d;

б) вырезаем узел С. В нем сходятся стержни 1-b,с-3,3-2,2-1, из которых неизвестны усилия в двух: с-3 и 3-2. На диаграмме усилий уже есть точки b, с,1,2. Чтобы получить точку 3 проводим через точку с линию, параллельную стержню с-3 фермы, а через точку 2 - линию, параллельную стержню 3-2. Точка пересечения этих линий и является искомой точкой 3 на диаграмме.

Длина отрезка 3-2 равна 1,9см, т.е. усилие в стержне составляет 19кН.

Определяем знаки усилий в стержнях с-3 и 3-2. На диаграмме (рис.3.6,в) движение от точки с к точке 3 направлено справа налево. Это направление для стержня с-3 –к узлу С (рис.3.6,б), значит, стержень сжат (знак «-»). Движение от точки 3 к точке 2 на диаграмме направлено влево вверх. Для стержня 3-2 это направление к узлу (рис.3.6,б), значит, стержень сжат (знак «-

»)

а) вырезаем узел D. В нем сходятся стержни $c'-3'$ и $3'-3$, в которых усилия неизвестны. На диаграмме через точку c' проводим линию, параллельную стержню $c'-3'$, а через точку 3 - линию, параллельную стержню $3'-3$. Точка пересечения этих линий является искомой точкой $3'$, которая симметрична точке 3.

Длина отрезка $3'-3$ равна 2см, т.е. усилие в стержне составляет 20кН.

Движение от точки $3'$ к точке 3 направлено вниз. Это направление для стержня $3'-3$ – от узла D (рис.3.6,б), значит, стержень растянут. Отрезок $c'-3'$ на диаграмме симметричен отрезку $c-3$, это значит, что усилие в стержне $3'-3$ равно по величине усилию в стержне $c-3$ и имеет тот же знак, т.е. оно

На этом решение заканчивается, так как усилия в стержнях правой части фермы равны усилиям в симметричных стержнях левой части. По данным расчета составляют таблицу усилий:

$b-1$	$1-d$	$1-2$	$c-3$	$3-2$	$2-d$	$3'-3$
-59 кН	50 кН	0	-38 кН	-19 кН	50 кН	20 кН

Балочные фермы могут быть как статически определимыми, так и статически неопределимыми. Граничным условием статически неопределимых ферм является наличие трех (а не двух) стержней в крайних узлах (рис.3.5,г), а так же более двух стержней с неизвестными усилиями в промежуточных узлах.

3.4 Строительные стропильные фермы

Стропильные фермы применяют для перекрытия пролетов промышленных зданий, больших залов гражданских зданий, пролетов мостов.

Основными элементами ферм являются верхний и нижний пояса, а также решетка, которая состоит из раскосов и стоек. Раскосы подразделяются на восходящие и нисходящие. *Крайние вертикальные стойки и крайние раскосы называются опорными.*

Генеральными размерами фермы являются (рис.3.7) L – пролет; d_B – панель (расстояние между узлами) по верху; d_H – панель по низу; h – высота фермы в коньке; h_0 – высота фермы на опоре.

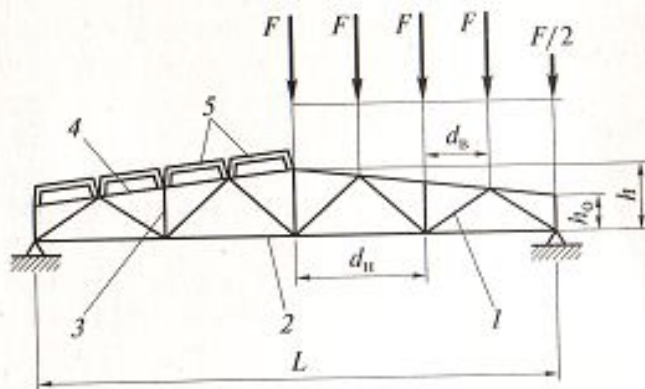


Рис. 3.7. Строительная стропильная ферма и ее геометрические характеристики:

1 – раскос; 2 – нижний пояс; 3 – стойка; 4 – верхний пояс; 5 – плиты

Расстояния между узлами решетки d_B принимаются одинаковыми и зависят от размера плит покрытия. Чаще всего размер панелей принимают кратным 1,5м.

Стальные и железобетонные фермы применяют при длине пролетов 24м и более.