Простейшие уравнения

Преподаватель
Сандакова О.В.

Уравнения, сводящиеся к квадратным

1. Решите уравнение $\frac{6}{13}x^2 = 19\frac{1}{2}$. *Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.*

Кажется, что уравнение очень простое. Но иногда здесь ошибаются даже отличники. А вот шестиклассник бы не ошибся.

С левой частью уравнения все понятно. Дробь $\frac{6}{13}$ умножается на x^2. А в правой части – смешанное число $19\frac{1}{2}$. Его целая часть равна 19, а дробная часть равна $\frac{1}{2}$. Запишем это число в виде неправильной дроби:

$$19\frac{1}{2} = \frac{19\cdot 2+1}{2} = \frac{39}{2}.$$

Получим:

$$\frac{6}{13}x^2 = \frac{39}{2}$$

$$x^2 = \frac{39\cdot 13}{2\cdot 6} = \frac{13\cdot 3\cdot 13}{2\cdot 6} = \frac{13^2}{4}$$

$$x = \pm\frac{13}{2},$$

$x_1 = -6,5$ или $x_2 = 6,5$

Выбираем меньший корень.

Ответ: - 6,5.

2. Решите уравнение $(x-6)^2=-24x$

Возведем в квадрат левую часть уравнения. Получим:

$$(x-6)^2=-24x \Leftrightarrow x^2-12x+36=-24x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+12x+36=0 \Leftrightarrow (x+6)^2=0 \Leftrightarrow x=-6.$$

Ответ: - 6

Дробно-рациональные уравнения

3. Найдите корень уравнения $\dfrac{5x-3}{4x-5}=1$

Перенесем единицу в левую часть уравнения. Представим 1 как $\frac{4x-5}{4x-5}$ и приведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{5x-3}{4x-5}-\frac{4x-5}{4x-5}=0$$

$$\frac{x+2}{4x-5}=0$$

$$x=-2$$

Это довольно простой тип уравнений. Главное - внимательность.

Иррациональные уравнения

Так называются уравнения, содержащие знак корня - квадратного, кубического или n-ной степени.

4. Решите уравнение:

$\sqrt{\frac{6}{4x-54}} = \frac{1}{7}.$

Выражение под корнем должно быть неотрицательно, а знаменатель дроби не равен нулю.

Значит, $4x - 54 > 0$.

Возведём обе части уравнения в квадрат:

$\frac{6}{4x-54} = \frac{1}{49}$

Решим пропорцию:

$4x - 54 = 6 \cdot 49;$

$4x = 348;$

$x = 87.$

Условие $4x - 54 > 0$ при этом выполняется.

Ответ: 87.

5. Решите уравнение $\sqrt{72-x}=x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

А в этом уравнении есть ловушка. Решите его самостоятельно и после этого читайте дальше.

Выражение под корнем должно быть неотрицательно. И сам корень – величина неотрицательная. Значит, и правая часть должна быть больше или равна нуля. Следовательно, уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 72-x=x^2 \\ 72-x\geq 0 \\ x\geq 0 \end{cases}$$

Решение таких уравнений лучше всего записывать в виде цепочки равносильных переходов:

$$\sqrt{72-x}=x \Leftrightarrow \begin{cases} 72-x=x^2 \\ 72-x\geq 0 \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-72=0 \\ x\leq 72 \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=8 \\ x=-9 \end{array}\right. \\ x\leq 72 \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=8$$

Мы получили, что $x=8$. Это единственный корень уравнения.

Типичная ошибка в решении этого уравнения такая. Учащиеся честно пишут ОДЗ, помня, что выражение под корнем должно быть неотрицательно:

$72 - x \geq 0.$

Возводят обе части уравнения в квадрат. Получают квадратное уравнение: $x^2 + x - 72 = 0.$ Находят его корни: $x = 8$ или $x = -9.$ Пишут в ответ: -9 (как меньший из корней). В итоге ноль баллов.

Теперь вы знаете, в чем дело. Конечно же, число -9 корнем этого уравнения быть не может.

6. Решите уравнение $\sqrt{45+4x} = x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

Запишем решение как цепочку равносильных переходов.

$$\sqrt{45+4x} = x \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 45+4x \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 45+4x = x^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x \geq 0 \\ x^2 - 4x - 45 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x \geq 0 \\ \left[\begin{array}{c} x = 9 \\ x = -5 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 9$$

Ответ: 9.

Показательные уравнения

При решении показательных уравнений мы пользуемся свойством монотонности показательной функции.

7. Решите уравнение $5^{x-7} = \frac{1}{125}$

Вспомним, что $125 = 5^3$. Уравнение приобретает вид: $5^{x-7} = 5^{-3}$. Функция $y = 5^x$ монотонно возрастает и каждое свое значение принимает только один раз. Степени равны, их основания, значит, и показатели равны.

$x - 7 = -3$, откуда $x = 4$.

8. Решите уравнение $\left(\frac{1}{49}\right)^{x-8} = 7$

Представим $\left(\frac{1}{49}\right)$ как 7^{-2}

$\left(7^{-2}\right)^{x-8} = 7$

$7^{-2x+16} = 7$

Функция $y = 7^x$ монотонно возрастает и каждое свое значение принимает только один раз. Степени равны, их основания, значит, и показатели равны.

$-2x + 16 = 1$

$-2x = -15$

$x = 7,5$

Ответ: 7,5.

9. Решите уравнение $\left(\frac{1}{9}\right)^{x-13} = 3;$

Представим $\frac{1}{9}$ в виде степени с основанием 3 и воспользуемся тем, что $(a^m)^n = a^{mn}$

$$\left(3^{-2}\right)^{x-13} = 3;$$
$$3^{-2x+26} = 3^1;$$

$$-2x + 26 = 1;$$

$$x = 12,5.$$

Логарифмические уравнения

Решая логарифмические уравнения, мы также пользуемся монотонностью логарифмической функции: каждое свое значение она принимает только один раз. Это значит, что если логарифмы двух чисел по какому-либо основанию равны, значит, равны и сами числа.

И конечно, помним про область допустимых значений логарифма:

Логарифмы определены только для положительных чисел;

Основание логарифма должно быть положительно и не равно единице.

10. Решите уравнение:

$$log_5\left(4+x\right)=2$$

Область допустимых значений: $4+x>0$. Значит, $x>-4$.

Представим 2 в правой части уравнения как $log_5 25$ - чтобы слева и справа в уравнении были логарифмы по основанию 5.

$$log_5\left(4+x\right)=log_5 25$$

Функция $y=log_5 x$ монотонно возрастает и каждое свое значение принимает ровно один раз. Логарифмы равны, их основания равны. «Отбросим» логарифмы! Конечно, при этом $x>-4$.

$$4+x=25$$
$$x=21.$$

Ответ: 21.

11. Решите уравнение: $log_8\left(x^2+x\right)=log_8\left(x^2-4\right)$

Запишем решение как цепочку равносильных переходов. Записываем ОДЗ и «убираем» логарифмы:

$$log_8\left(x^2+x\right)=log_8\left(x^2-4\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+x>0\\x^2-4>0\\x^2+x=x^2-4\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+x>0\\x^2-4>0\\x=-4\end{cases}\Leftrightarrow x=-4$$

Ответ: -4.

12. Решите уравнение: $2^{log_4(4x+5)}=9.$

Перейдем от логарифма по основанию 4 (в показателе) к логарифму по основанию 2. Мы делаем это по формуле перехода к другому основанию:

$$log_4 b=\frac{log_2 b}{log_2 4}=\frac{log_2 b}{2}$$

Записываем решение как цепочку равносильных переходов.

$$2^{log_4(4x+5)}=9\Leftrightarrow\begin{cases}2^{\frac{log_2(4x+5)}{2}}=9\\4x+5>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(2^{log_2(4x+5)}\right)^{\frac{1}{2}}=9\\x>-1\frac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(4x+5)^{\frac{1}{2}}=9\\x>-1\frac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{4x+5}=9\\x>-1\frac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x+5=81\\x>-1\frac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=19\\x>-1\frac{1}{4}\end{cases}$$

Ответ: 19.

13. Решите уравнение. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

$$log_{x-5}49=2$$

В этом уравнении тоже есть ловушка. Мы помним, что основание логарифма должно быть положительно и не равно единице.

Получим систему:

$$\begin{cases}(x-5)^2=49\\ x-50\\ x-5\neq 1\end{cases}$$

Первое уравнение мы получили просто из определения логарифма.

Квадратное уравнение имеет два корня: $x=12$ и $x=-2$

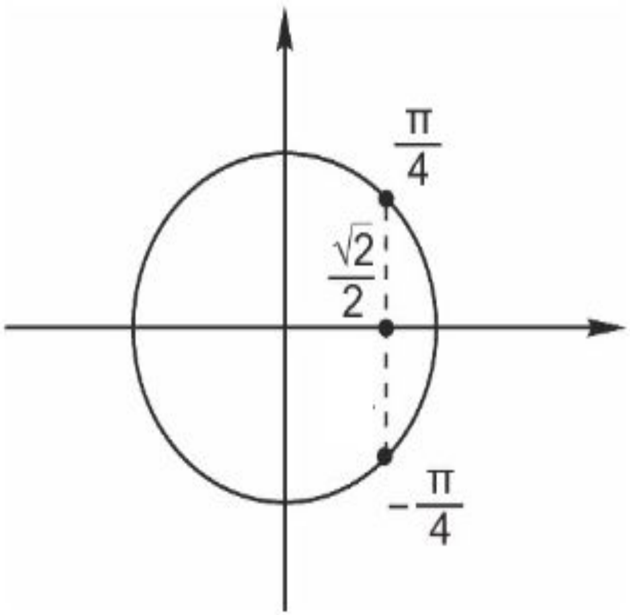
Очевидно, корень $x=-2$ является посторонним, поскольку основание логарифма должно быть положительным. Значит, единственный корень уравнения: $x=12$.

Простейшие тригонометрические уравнения

14. Найдите корень уравнения: $\cos\frac{\pi(x+1)}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. *В ответе запишите наибольший отрицательный корень.*

Типичная ошибка — решать это уравнение в уме. Мы не будем так делать! Несмотря на то, что это задание включено в первую части варианта ЕГЭ, оно является полноценным тригонометрическим уравнением, причем с отбором решений.

Сделаем замену $\frac{\pi(x+1)}{4} = t$. Получим: $cost = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Получаем решения: $t=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$. Вернемся к переменной x.

$\frac{\pi(x+1)}{4}=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$. Поделим обе части уравнения на π и умножим на 4.

$$x+1=\pm 1+8n, n\in Z$$

$$\left[\begin{array}{l} x=8n, n\in Z \\ x=-2+8n. \end{array}\right.$$

Первой серии принадлежат решения $-8; 0; 8\ldots$

Вторая серия включает решения $-2; 6; 14\ldots$

Наибольший отрицательный корень – тот из отрицательных, который ближе всех к нулю. Это $x=-2$.

Ответ: -2.

15. Решите уравнение $tg\frac{\pi(x+1)}{4}=-1.$ В ответе напишите наименьший положительный корень.

Решение:

Сделаем замену $\frac{\pi(x+1)}{4}=t.$ Получим: $tgt=-1.$ Решения этого уравнения:

$t=-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z.$ Вернемся к переменной x:

$\frac{\pi(x+1)}{4}=-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z.$ Умножим обе части уравнения на 4 и разделим на π

$x+1=-1+4n$

$x=-2+4n;$

Выпишем несколько решений уравнения и выберем наименьший положительный корень:

$x=-2;2;6\dots$ Наименьший положительный корень $x=2.$

Ответ: 2

Задания на самостоятельную работу:

1. Найдите корень уравнения $\log_{x+5}64 = 2$.
2. Найдите корень уравнения $\log_3(4x - 15) = \log_3(x + 3)$.
3. Найдите корень уравнения $625^{x+1} = \frac{1}{5}$.
4. Найдите корень уравнения $(x - 12)^3 = -27$.
5. Найдите корень уравнения $6^{9-x} = 36^x$.

6. Решите уравнение $(5x + 11)^2 = (5x - 2)^2$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из них.

7. Найдите корень уравнения $\sqrt{14 - 5x} = -x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

8. Найдите корень уравнения $\frac{x+3}{2x-11} = \frac{x+3}{3x-7}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

9. Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{4x - 21}{117}} = \frac{1}{3}$.