§2. Комплексные числа

п.1. Основные понятия.

Комплексным числом называется выражение вида

где

i — мнимая единица,

— множество комплексных чисел.

Замечание 1.

Если , то число называется чисто мнимым.

Если , то Значит,

— действительная часть комплексного числа;

— мнимая часть комплексного числа.

Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части.

Замечание 2.

Для комплексных чисел не вводятся понятия «больше» и «меньше».

— число, комплексно сопряженное к

Свойства

Доказательство.

Пусть

1) Необходимость.

Пусть

Если то

Достаточность.

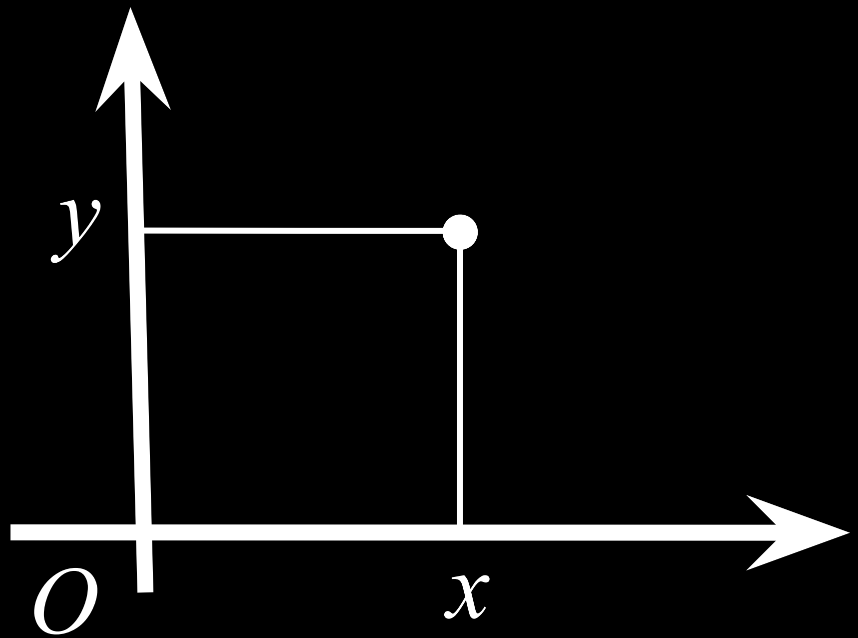
Пусть

Имеем,

4) Преобразуем левую часть:

Преобразуем правую часть:

п.2. Модуль и аргумент комплексного числа.



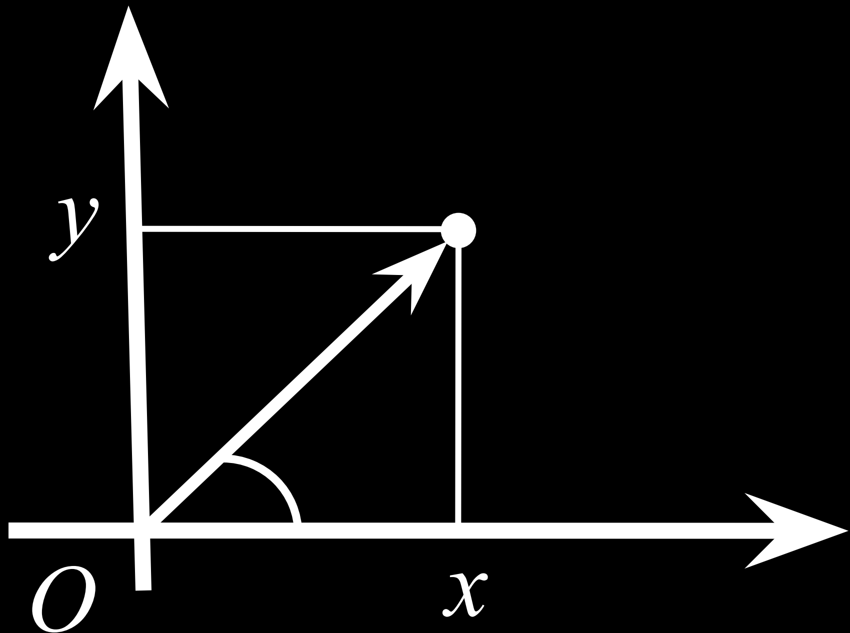
Любое комплексное число z
можно изобразить точкой ,
такой, что

Каждую точку можно рассматривать как образ комплексного числа

Плоскость называется комплексной.

Ось Ox — действительной осью.

Ось Oy — мнимой осью.



Любое комплексное число
можно изобразить радиус-вектором

Длина вектора   называется модулем комплексного числа и обозначается

Угол между положительным направлением действительной оси и вектором   называется аргументом и обозначается

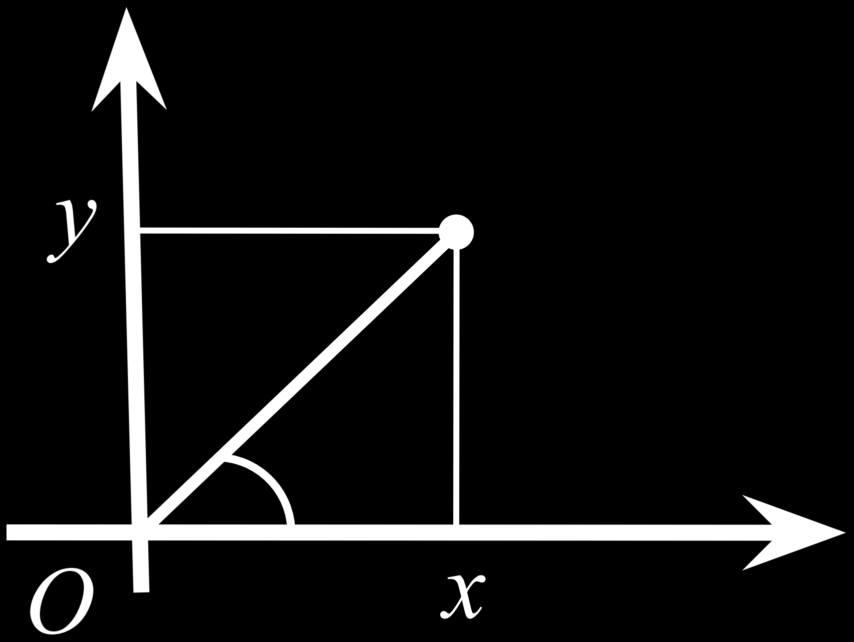
Значение аргумента, заключенное в границах

называют главным значением аргумента, и обозначают

Аргумент комплексного числа не определен.

Замечание 3.

Связь между *и*



Формы записи комплексных чисел

Алгебраическая

Тригонометрическая

Показательная (экспоненциальная)

Формула Эйлера:

Замечание 4.

Пример 1. Записать комплексное число

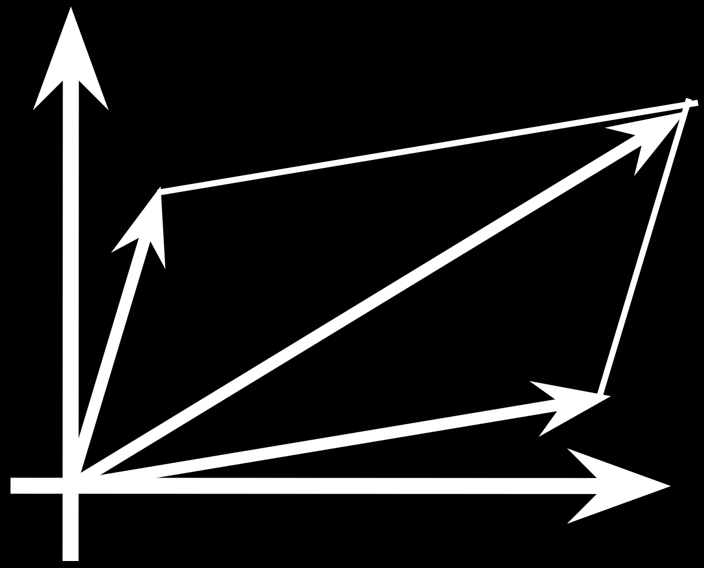
в тригонометрической и показательной форме.
Решение.

п.3. Действия над комплексными числами.

Пусть

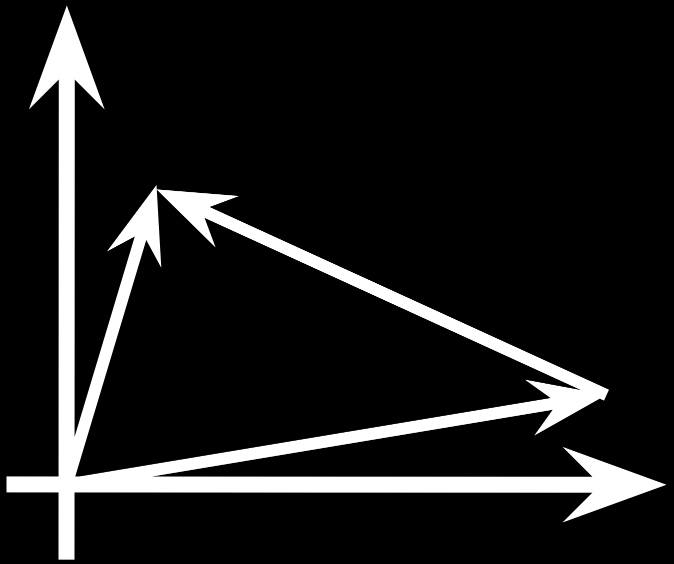
Сложение:

Неравенство треугольника:



Пример 2.

Вычитание:



Пример 3.

Умножение:

Пример 4.

<u>Замечание 5.</u>

Доказательство.

Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме.

Пусть

Тогда

При умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Можно показать, что

Если

то

— формула Муавра.

Пример 5. Вычислить

Решение.

Деление:

Пример 6.

Деление комплексных чисел в тригонометрической форме.

Пусть

Тогда

При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

Извлечение корня из комплексных чисел

Пусть

Корнем n-й степени из комплексного числа z называется комплексное число w, удовлетворяющее равенству

Пусть

Тогда

Учитывая замечание 3, получаем

Поэтому,

Получили n различных значений корня n-й степени из комплексного числа.

Пример 7. Найти все значения

Решение.

Представим комплексное число в тригонометрической форме

Тогда