МНР- машина

Впервые МНР была рассмотрена Шепердсоном и Стерджисом в 1963 году.

Машина с неограниченными регистрами (МНР) - это абстрактная машина, более сходная с реальным компьютером по сравнению с машиной Тьюринга. Она имеет следующие составные части.

1) **Регистры R1,R2,R3**, . . ., в которых содержатся соответственно натуральные числа r1, r2, r3, . . .

R_1 R_2 R_3 . . . R_k R_{k+1} . . .

Число регистров бесконечно, но только конечное множество регистров содержит числа, отличные от нуля. Все остальные регистры R_{k+1},$R_{k+2}R_1$,R_2, . . . , R_k , . . . заполнены нулями.

2) **Программа машины** - это конечная последовательность $I_1, I_2, \ldots, I_s$ из следующих четырех типов команд:

• Команда обнуления Z(n) делает содержимое регистра Rn равным нулю.

• Команда прибавления единицы S(n) к содержимому регистра Rn прибавляет число 1.

• Команда переадресации T(m, n) заменяет содержимое регистра Rn на содержимое регистра Rm.

• Команда условного перехода J(m, n, q) сравнивает содержимое регистров Rm и Rn. При $r_m = r_n$ в качестве следующей команды выполняется команда с номером q. Если $r_n \neq r_m$, то выполняется следующая по порядку команда программы.

Команды обнуления, прибавления единицы и переадресации называются **арифметическими командами**.

Вычисление функций на машинах с неограниченными регистрами.

Как и в случае машин Тьюринга, необходимо указать, как машина с неограниченными регистрами вычисляет частичную функцию f(x1,x2, ... , xn) от n аргументов.

Рассмотрим набор аргументов (x1,x2, ... , xn) и разместим число x1 в регистре R1 , число x2 – в регистре R2, ..., число xn - в регистре Rn. Все остальные регистры заполнены нулями. Получаем начальную конфигурацию МНР.

После окончания работы в регистре R1 должно быть значение функции f(x1,x2, ... ,xn) . Если значение f(x1,x2, ... , xn) не определено, то МНР должна работать бесконечно.

Пример. Пусть задана программа P следующего вида:

I_1 J(1, 2, 6)
I_2 S(2)
I_3 S(3)
I_4 J(1, 2, 6)
I_5 J(1, 1, 2)
I_6 T(3,1)

и начальная конфигурация

9	7	0	…	0	0	…	…		
R_1	R_2	R_3	. . .	R_k	R_{k+1} . . .				

Пусть , в общем случае, программа имеет вид: $I_1 I_2 \dots I_s$.

1) МНР всегда начинает работу с команды I_1.

2) МНР останавливается тогда и только тогда, когда нет следующей команды, т.е. следующей командой должна выполняться команда I_r, где $r > s$. Это может произойти в одном из следующих случаев:

- если выполнена к-да I_s и I_s - арифметическая к-да;
- если выполнена к-да $I_k = J(m, n, q)$, $r_m = r_n$ и $q > s$;
- если выполнена к-да $I_k = J(m, n, q)$, $r_m \neq r_n$ и $k = s$, т.е. выполнена последняя к-да в программе, за которой д.б. переход на следующую к-ду, которой нет.

Для данного примера МНР остановится, когда содержимое регистров R_1 и R_2 будут одинаковы (через 2 цикла) и к-да I_6 перешлет содержимое регистра R_3 (который увеличивается на 1 при каждом прохождении циклического участка и станет равным 2 после 2-х циклов) в регистр R_1. Программа остановится, т.к. в ней нет к-ды I_7.

Отметим, что в нашей программе к-да $I_5 = J(1, 1, 2)$ является, по-существу, безусловным переходом на к-ду I_2, т.к. $r_1 = r_1$ всегда.

Вычисление по нашей программе с заданной начальной конфигурацией останавливается в заключительном состоянии:

2	9	2	0	0	0	...	...		

При написании программ для МНР часто полезным оказывается предварительное составление диаграммы переходов (блок-схемы), построение программы по которой оказывается лишь кодированием на язык МНР.

МНР-вычислимые функции

Через $P(a_1,a_2, \ldots a_n)$ обозначим вычисление по программе P с начальной конфигурацией $a_1,a_2, \ldots a_n$. Содержимое остальных регистров равно 0.

Записью $P(a_1,a_2, \ldots a_n)\downarrow$ будем обозначать завершимость выполнения программы, т.е.тот факт что вычисление в конце концов остановится.

Пусть f частичная функция из N^n в N, т.е. $f:N^n \to N$, P – программа, и $a_1,a_2, \ldots a_n, b \in N$.

Определение. Вычисление $P(a_1,a_2, \ldots a_n)$ сходится к b, если $P(a_1,a_2, \ldots a_n)\downarrow$ и в заключительной конфигурации в регистре R_1 находится b. Этот факт записывается как $P(a_1,a_2, \ldots a_n)\downarrow b$.

Определение. Программа P МНР-вычисляет функцию f, если для всех $a_1,a_2, \ldots a_n, b$ имеет место $P(a_1,a_2, \ldots a_n)\downarrow b$ тогда и только тогда, когда $(a_1,a_2, \ldots a_n) \in Dom(f)$ и $f(a_1,a_2, \ldots a_n) = b$.

Определение. Функция f называется МНР-вычислимой, если существует программа, которая МНР-вычисляет f.

Примеры МНР-вычислимых функций.

1. $x+y$.

Начальная конфигурция: x,y,0,0,…..

Прибавляем 1 к x y раз, используя R_3 , как счетчик числа прибавлений 1 к r_1.

Типичная конфигурция: x+k,y,k,0,…..

Программа остановится, когда $y = k$. В этом случае в регистре R_1 будет x+y.

МНР-программа P:

I_1 J(3, 2, 5)
I_2 S(1)
I_3 S(3)
I_4 J(1, 1, 1)

Таким образом, **функция x+y является МНР-вычислимой**.

2. $x \dot{-} 1$.

Начальная конфигурция: x,0,0,0,…..

Типичная конфигурция: x,k,k+1,0,…..

МНР-программа P:

I_1 J(1, 4, 8)
I_2 S(3)
I_3 J(1, 3, 7)
I_4 S(2)
I_5 S(3)
I_6 J(1, 1, 3)
I_7 T(2,1)

Таким образом, **функция $x \dot{-} 1$ является МНР-вычислимой**.

3. f(x) = 1/2x, если x – четно,

не определено, если x – нечетно.

Если x – нечетно, то программа не останавливается.

Алгоритм вычисления: Изменяем содержимое двух регистров, в одном из которых находится число k, а в другом 2k, где k пробегает ряд значений 0,1,2,3,… .Для последовательных значений проверяется, верно ли, что x = 2k. Если да, то ответ k, иначе увеличить k на единицу и повторить предыдущую команду. Если x нечетно, то эта процедура никогда не остановится.

Начальная конфигурция: x,0,0,0,…..

Типичная конфигурция: x,2k,k,0,…..

МНР-программа P:

I_1 J(1, 2, 6)
I_2 S(3)
I_3 S(2)
I_4 S(2)
I_5 J(1, 1, 1)
I_6 T(3,1)

Таким образом, **функция f(x) является МНР-вычислимой**.

Разрешимые предикаты.

Определение разрешимости предикатов в точности совпадает с ранее данным определением (см. частично рекурсивные функции).

Примеры.

Предикат “x = 0” разрешим. Его характеристическая функция вычисляется следующей программой:

I_1 J(1, 2, 3)
I_2 J(1, 1, 4)
I_3 S(2)
I_4 T(2, 1)

Док-во разрешимости предикатов “x ≠ y”, “x кратно y” и др. – в упражнениях.

Вычислимость на других областях

Поскольку МНР работает только с натуральными числами, наше определение вычислимости и разрешимости применимо только к функциям и предикатам от натуральных чисел. Эти понятия легко распространяются на другие виды объектов (т. е. целые числа, полиномы, матрицы и т. д.) с помощью кодирования.

Кодированием области D объектов называется явное и эффективное отображение $a:D \rightarrow N$.

Мы будем говорить, что объект $d \in D$ кодируется натуральным числом a(d).

Предположим, что f является функцией из D в D; тогда f естественно кодируется функцией f* из N в N, которая отображает код каждого объекта $d \in Dom(f)$ в код объекта f (d).

В явном виде это можно записать как $f^* = a \cdot f \cdot a^{-1}$.

Таким рбразом, можно распространить определение МНР-вычислимости на область D, полагая функцию f вычислимой, если f* - вычислимая функция натуральных чисел.

Пример. Рассмотрим область Z. Явное кодирование можно задать функцией a, где

$a(n) = 2n$, если $n \geq 0$,

$-2n - 1$, если $n < 0$.

Тогда a^{-1} задается так:

$a^{-1}(m) = 1/2m$, если m четно,

$-1/2\,(m+1)$, если m нечетно.

Теперь рассмотрим функцию $f(x) = x - 1$ на Z. Построим $f^*: N \to N$, задаваемую как:

$f^*(x) = 1$, если $x = 0$ (т. е. $x = a(0)$),

$x - 2$, если $x > 0$ и x четно (т. е. $x = a(n)$, $n > 0$),

$x + 2$, если x нечетно (т. е. $x = a(n)$, $n < 0$).

Написание программы, которая вычисляет f•, является рутинным упражнением. Таким образом, x-1 есть вычислимая функция на Z.

Приведенное выше определение очевидным образом расширяется на n-местные вычислимые функции на области D и на разрешимые предикаты на области D.

Примеры МНР-вычислимых функций.

1. $x+y$.

Начальная конфигурция: x,y,0,0,…..

Прибавляем 1 к x y раз, используя R_3 , как счетчик числа прибавлений 1 к r_1.

Типичная конфигурция: x+k,y,k,0,…..

Программа остановится, когда $y = k$. В этом случае в регистре R_1 будет x+y.

МНР-программа P:

I_1 J(3, 2, 5)
I_2 S(1)
I_3 S(3)
I_4 J(1, 1, 1)

Таким образом, **функция x+y является МНР-вычислимой**.

2. $x \dot{-} 1$.

Начальная конфигурция: x,0,0,0,…..

Типичная конфигурция: x,k,k+1,0,…..

МНР-программа P:

I_1 J(1, 4, 8)
I_2 S(3)
I_3 J(1, 3, 7)
I_4 S(2)
I_5 S(3)
I_6 J(1, 1, 3)
I_7 T(2,1)

Таким образом, **функция $x \dot{-} 1$ является МНР-вычислимой**.

Стандартный вид программы.

Сложная программа часто содержит другие программы в качестве строительных блоков - подпрограмм. Для правильного взаимодействия этих подпрограмм нужно соблюдать некоторые правила.

Определение. Пусть дана программа для МНР, состоящая из **s** команд. Будем говорить, что программа имеет стандартный вид, если во всякой команде условного перехода **J(m,n,q)** данной программы выполняется неравенство $q < s + 1$. Если программа P не имеет стандартного вида, то в ней найдется команда вида **J(m, n, q),** где $q > s+1$. Заменим в программе **P** эту команду на команду **J(m,n, s + 1).**

Получим программу **P'**, выполняющую точно такое же действие, как и программа **P**. Действительно, P и **P'** отличаются лишь командами **J(m, n, q)** и **J(m,n, s + 1).** Однако действие этих команд одинаково: при $r_m \neq r_n$ нужно перейти к следующей по порядку команде, а при $r_m = r_n$ остановиться.

Определение .Стандартизацией программы **I1 , I2 , … ,Is** называется замена в данной программе всех команд **J(m, n, q)** где **q > s+1**, на команды **J(m, n, s + 1).**

В результате стандартизации из программы **P** нестандартного вида получим стандартную программу **P'** с тем же действием. Используя **P'** вместо **P**, считаем, что все программы, которые мы рассматриваем, стандартны.

Соединение программ.

Определение. Соединением программ **P: I1, I2..., Is и Q: I'1, I'2, ..., I't** называется программа из **s+t** команд вида **I1, I2, ..., Is, Is+1, Is+2 , ..., Is+t**, где команды **Is+1, Is+2 , ..., Is+t** получены из команд **I'1, I'2, ..., I't** программы **Q** приращением номеров на число **s**. При этом каждая команда условного перехода **J(m, n, q)** из **Q** заменена на команду вида **J(m, n, q+s).**

Соединение программ **P** и **Q** будем обозначать через **PQ**. Можно соединить программы P, Q, R и получить программу **PQR=(PQ)R** и т.д.

Выделения регистров для подпрограммы.

Пусть программа P используется как подпрограмма в основной программе Q. В некоторых регистрах хранятся данные основной программы. При выполнении подпрограммы P можно испортить данные основной программы Q.

Для предотвращения такой потери данных делаем так, что основная программа изменяет одну область регистров, а подпрограмма—другую.

Произвольная МНР-программа P имеет конечное число команд. Команда обнуления Z(n) и команда прибавления единицы S(n) действуют только на один регистр Rn.

Команде переадресации T(m, n) и команде условного перехода **J(m,n,q)** для функционирования нужны два регистра Rm и Rn.

Если общее число команд обнуления и прибавления единицы равно k, а число команд переадресации и условного перехода равно *m*, то для ра боты всей программы *P* достаточно зарезервировать ***k*+2*m*** регистров.

На остальные регистры программа *P* не действует, и их можно использовать в качестве рабочих регистров основной программы. Поэтому в дальнейшем применяем следующее правило выделения регистров подпрограммы *P* в программе *Q*.

Правило выделения регистров

Пусть $\rho = \rho(P)$ количество регистров, затрагиваемых программой P, и программа P меняет лишь регистры R1, . . . , Rρ и не затрагивает регистры R_k для $k > \rho$. Отводим регистры R1, . . . , Rρ для работы подпрограммы P, и выделяем регистры R_k при $k > \rho$ в качестве рабочих регистров для остальных команд основной программы Q.

Это правило изображено в следующем виде

R1, . . . , R_ρ, $R_{\rho+1}$, . . .

Если соблюдено правило выделения регистров, то программа P в процессе выполнения меняет лишь регистры R1, . . . , Rρ, а данные программы Q находятся в регистрах $R_{\rho+1}$, . . . и не могут быть затронуты и испорчены программой P.

Вставка подпрограммы.

Пусть в программе **Q** имеется подпрограмма **P** для вычисления функции **f (x1,x2,...,xn).** В подпрограмме P имеются входные данные x1,x2,...,xn и результат вычислений f (x1,x2,...,xn).

По определению МНР должны соблюдаться следующие требования.

1. При старте P аргументы (x1,x2,...,xn) обязаны находиться в регистрах R1, ... ,Rn..

2. После окончания работы подпрограммы P результат f (x1,x2,...,xn) должен содержаться в регистре R1.

Однако в ходе работы основной программы Q возможен переход к выполнению подпрограммы P, которой нужны аргументы x1, x2, ..., xn. В данный момент аргументы хранятся в каких-то регистрах Ri1, ... , Rin , а не в регистрах R1, ... , Rn , как нужно.

Для осуществления такой пересылки аргументов выполняется следующее действие.

1) Перед командами из P размещается набор команд

T(i1, 1), . . . , T (in, n).

Пусть основная программа Q вызвала подпрограмму P и в начало зарезервированных регистров R1, . . . , Rρ скопированы числа x1, . . . , xn, с которыми начнет работать подпрограмма P. Однако в регистрах R_{n+1}, . . . , Rρ может оставаться мусор - произвольные числа, оставшиеся от предыдущей работы Q. По правилам работы МНР в последующих регистрах R_{n+1}, . . . , R_k должны быть только одни нули. Поэтому нужно выполнить обнуление этих регистров от мусора, которое осуществляется следующим способом.

2) Выполняется набор команд Z(n+1), . . . , Z(ρ).

После выполнения подпрограммы P результат находится в регистре R1. Однако регистр R1 нужен для последующих вычислений программы Q.

Поэтому из регистра R1 результат выполнения подпрограммы P нужно пересылать для его последующего использования на хранение в некоторый рабочий регистр Ri, где i >ρ(P). Это можно осуществить следующим способом.

3) Выполняется команда переадресации T(1, i).

Для правильной работы подпрограммы P могут потребоваться следующие действия, которые назовем ***вставкой подпрограммы***.

Вставка подпрограммы P в основную программу МНР - это выполнение следующих действий 1–5.

1. Распределение памяти. Вычисляется число $\rho = \rho(P)$ и выделяется память $R1, \ldots, R\rho$, достаточная для работы подпрограммы P. Задается регистр Ri, где $i > \rho$, для хранения результата работы подпрограммы.
2. Извлечение аргументов. Для этого записываются следующие команды:

$$T(i_1, 1), \ldots, T(i_n, n)$$

для передачи аргументов из места их хранения в регистры $R1, \ldots, Rn$.
3. Очистка регистров. Для этого записываются следующие команды:

$$Z(n + 1), \ldots, Z(\rho).$$

4. Вставка команд подпрограммы P.
5. Пересылка результата на хранение. Добавляется команда $T(1, i)$.

В итоге в основной программе получается следующий фрагмент

$T(i_1, 1)$
. . .
$T(i_n, n)$
$Z(n+1)$
. . .
$Z(\rho)$
P
$T(1, i)$

Вставку данного фрагмента в основную программу обозначаем через $P[i_1, \ldots, i_n \rightarrow i\ ]$

Вычислимость частично рекурсивных функций на МНР.

Если функция f вычислима на некоторой машине с неограниченными регистрами, то говорим кратко «Функция f МНР-вычислима». В предыдущей части установлена МНР-вычислимость простейших функций.

Покажем, что применение операторов суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации к МНР вычислимым функциям вырабатывает МНР- вычислимые функции.

В результате получим основной результат - все частично рекурсивные функции вычислимы на МНР.

Оператор суперпозиции.

Теорема 1. Пусть функция f получена из функций h, g1, g2, … , gm с помощью оператора суперпозиции. Если функции h, g1, g2, … , gm МНР вычислимы, то и функция f также МНР вычислима.

Доказательство. По условию функции h, g1, g2, … , gm МНР вычислимы. Пусть H , G1, G2, … , Gm- программы, вычисляющие эти функции.

Процесс вычисления функции $f(x1, x2, \ldots, xn)$ состоит в следующем. Последовательно вычисляем числа

$y1 = g1(x1, x2, \ldots, xn),$

$y2 = g2(x1, x2, \ldots, xn),$

$\ldots$

$ym = gm(x1, x2, \ldots, xn)$

с помощью соответствующих программ $G1, G2, \ldots, Gm$. Затем вычисляем число $h(y1, \ldots, ym)$ с помощью программы H. Получаем $f(x1, x2, \ldots, xn)$.

Программа для реализации оператора суперпозиции имеет вид.

$T(1, \rho + 1)$

$\ldots$

$T(n, \rho + n)$

$G1[\rho + 1, \rho + 2, \ldots, \rho + n \rightarrow \rho + n + 1]$

$\ldots$

$Gm[\rho + 1, \rho + 2, \ldots, \rho + n \rightarrow \rho + n + m]$

$H[\rho + n + 1, \ldots, \rho + n + m \rightarrow 1]$

В программе вставлены несколько подпрограмм.

Модифицируем правило вставки для случая нескольких подпрограмм.

1) Вычисляем число $\rho = \max(n, m, \rho(G1), \ldots, \rho(Gm), \rho(H))$, и производим следующее распределение памяти МНР.

• Регистры $R1, \ldots, R\rho$ предназначены для работы всех подпрограмм $G1, G2, \ldots, Gm, H$.

• Последующие регистры $R\rho+1, \ldots, R\rho+n$ выделены в качестве постоянного хранилища аргументов $x1, x2, \ldots, xn$.

• Следующие по порядку регистры $R\rho+n+1, \ldots, R\rho+n+m$ являются рабочими регистрами основной программы, в которых сохраняются результаты работы подпрограмм $G1, G2, \ldots, Gm$, соответственно.

Эти аргументы затем вычисляет $f(x1, x2, \ldots, xn)$ и пересылает результат в регистр R1.

2) Командами T(1, ρ + 1), . . . , T (n, ρ + n) пересылаем аргументы x1, x2, . . . , xn на место их постоянного хранения—регистры $R_{\rho+1}$, . . . , $R_{\rho+n}$. Из этих регистров в процессе работы подпрограмм несколько раз будут считываться аргументы x1, x2, . . . , xn и пересылаться в регистры R1, . . . , Rn. Именно из этих регистров подпрограммы G1,G2, . . . , Gm будут извлекать свои аргументы при старте.

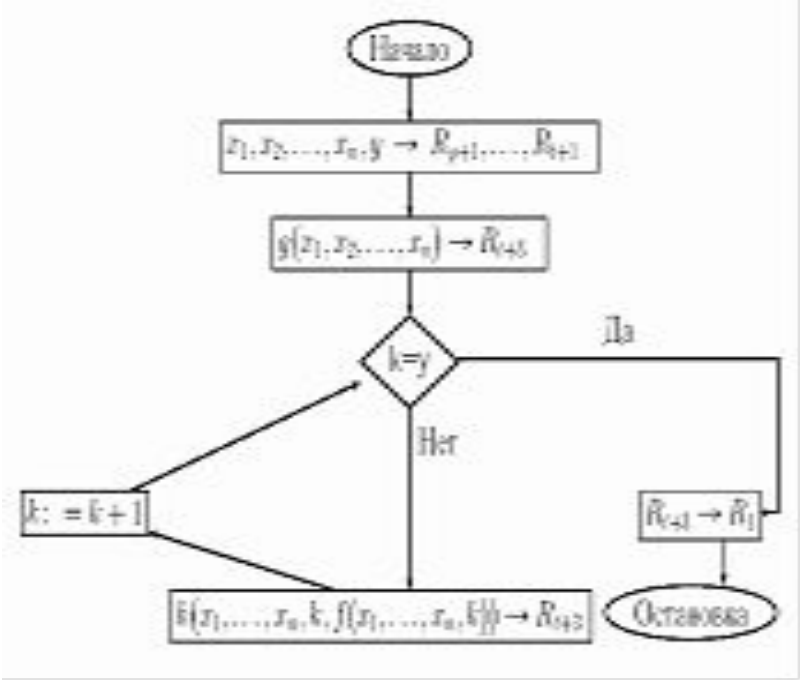
3) Подпрограммы Gi, где i = 1, . . . , m, вставляются в основную программу по правилу вставки подпрограмм. Далее вставляется подпрограмма H для вычисления функции h. Аргументы функции h равны $y_1 = g_1(x1, \ldots, xn). \ldots, y_m = g_m(x1, \ldots, xn)$ и хранятся в регистрах Rρ+n+1, . . . , Rρ+n+m. Подпрограмма H считывает эти аргументы, затем вычисляет f(x1, x2, . . . , xn) и пересылает результат в регистр R1. Затем МНР останавливается.

Теорема доказана.

Оператор примитивной рекурсии.

Теорема 2. Пусть функция f получена с помощью операторапримитивной рекурсии из функций g и h. Если функции g и h МНР-вычислимы, то и функция f также МНР-вычислима.

Доказательство. По условию функции g и h МНР-вычислимы. Пусть G и H программы, вычисляющие эти функции. Выразим кратко процесс вычисления функции f = f(x1, x2, ... , xn, y). Сравниваем y с числом 0. Если равенство верно, то вычисляем f(x1, x2, ... , xn, 0) = g(x1, x2, ... , xn) и останавливаемся. В противном случае несколько раз применяем программу H для последовательного вычисления чисел f(x1, x2, ... , xn, k) при k=0, 1, ...y.



Программа для реализации оператора примитивной рекурсии имеет вид.

T(1, ρ + 1)

. . .

T(n + 1, t + 1)

G[1, 2, . . . , n → t +3]

Iq J(t + 2, t + 1, p)

H[ρ + 1, . . . , ρ + n, t + 2, t + 3 → t +3]

S(t + 2)

J(1, 1, q)

Ip T(t + 3, 1)

При этом Iq и Ip—просто особо отмеченные команды с некоторыми номерами q и p.

Комментарии к работе программы:

1) Вычисляем число $\rho = \max(n + 2, \rho(G), \rho(H))$. Обозначим $\rho + n = t$.

Регистры для работы программы распределим следующим способом.

• $R1, \ldots, R\rho$—регистры для подпрограмм G и H;

• $R\rho+1, \ldots, Rt+1$—регистры, для постоянного хранилища аргументов $x1, x2, \ldots, xn, y$.

• $Rt+2, Rt+3$—два регистра для запоминания промежуточных значений k и $f(x1, x2, \ldots, xn, k)$ в цикле, где $k = 0, 1, \ldots, y$. Перед первым исполнением цикла в регистрах $Rt+2$ и $Rt+3$ разместим 0 и $f(x1, x2, \ldots, xn, 0)$.

2) Командами $T(1, \rho + 1), \ldots, T(n + 1, t + 1)$ пересылаем $n + 1$ аргументов $x1, x2, \ldots, xn, y$ на место их постоянного хранения—регистры $R\rho+1, \ldots, Rt+1$.

Затем в регистр $Rt+3$ помещаем число $g(x1, x2, \ldots, xn)$, равное $f(x1, x2, \ldots, xn, 0)$. Это выражено вставкой в программу строки $G[1, 2, \ldots, n \rightarrow t+3]$.

Таким образом, перед первым выполнением команды Iq имеем следующее содержание регистров.

• В регистре $Rt+1$ число y. Оно не будет изменяется в процессе выполнения цикла.

Таким образом, перед первым выполнением команды Iq имеем следующее содержание регистров.

• В регистре Rt+1 число y. Оно не будет изменяется в процессе выполнения цикла.

• В регистре Rt+2 число k = 0. Оно будет наращиваться на 1 при каждом проходе цикла.

• В регистре Rt+3 число f(x1, x2, . . . , xn, k) при k = 0. Число k будет наращиваться на 1 при каждом проходе цикла.

3) Выполнение команды Iq начинает цикл. Возвращение на повторение этой команды производит команда J(1, 1, q). Сравниваются число $r_{t+2} = k$ и число r_{t+1}, всегда равное y. Число $r_{t+2} = k$ принимает значения 0, 1, . . . , y. Для его приращение на 1 предназначена команда S(t + 2). Поэтому в цикле последовательно проверяются равенства

0 = y, 1 = y, . . . y = y.

Пусть равенство еще не выполнено. Тогда выполняется вставка

$$H[\rho + 1, \ldots, \rho + n, t + 2, t + 3 \rightarrow t + 3].$$

Она вычисляет функцию

$$h(x1, x2, \ldots, xn, k, f(x1, x2, \ldots, xn, k)),$$

т.е. число

$$f(x1, x2, \ldots, xn, k + 1).$$

При этом числа x1, x2, . . . , xn извлекаются из хранилища Rρ+1, . . . , Rρ+n, число k - из R_{t+2}, число f(x1, x2, . . . , xn, k) - из R_{t+3}. Новое число f(x1, x2, . . . , xn, k + 1) заменяет старое число f(x1, x2, . . . , xn, k) в регистре Rt+3. Поэтому при следующем исполнении цикла в Rt+2 будет число
k +1, в Rt+3—число f(x1, x2, . . . , xn, k + 1), что и нужно.

Равенство r_{t+2} и r_{t+1} в команде Iq сработает лишь тогда, когда в регистре Rt+2 накопится число y. В этот момент в регистре Rt+3 находится число f(x1, x2, . . . , xn, y). Выполнится переадресация к команде

T(t+3, 1),

которая перешлет f(x1, x2, . . . , xn, y) в регистр R1.После этого МНР остановится.

Теорема доказана.

Оператор минимизации. Алгоритм вычислений.

Теорема 3. Пусть функция f получена из функции g с помощью оператора минимизации. Если функция g является МНР-вычислимой, то и функция f также МНР-вычислима.

Доказательство. Построим программу, вычисляющую функцию f. Пусть G – программа, вычисляющая функцию g. Будем считать, что программа G приведена к стандартному виду.

Искомая программа для функции f будет проверять одно за другим следующие равенства:

g(x1,x2,...,xn,0)=0,

g(x1,x2,...,xn,1)=0,

.....

g(x1,x2,...,xn,y)=0,

g(x1,x2,...,xn,k)=0.

стремясь найти наименьшее k с условием g(x1, x2, ..., xn, k) = 0

Программа для вычисления функции $f(x1, x2, \ldots, xn)$ имеет вид.

$T(1, \rho + 1)$

$\ldots$

$T(n, \rho + n)$

Ip $G[\rho + 1, \rho + 2, \ldots, \rho + n + 1 \rightarrow 1]$

$J(1, \rho + n + 2, q)$

$S(\rho + n + 1)$

$J(1, 1, p)$

Iq $T(\rho + n + 1, 1)$

При этом Ip является первой командой подпрограммы

$G[\rho + 1, \rho + 2, \ldots, \rho + n + 1 \rightarrow 1]$.

Комментарии к работе программы:

Рассмотрим число $\rho = \max(n+1, \rho(G))$, и произведем следующее распределение памяти МНР.

• Регистры R1, . . . , Rρ предназначены для работы подпрограммы G.

• Регистры $R_{\rho+1}, \ldots, R_{\rho+n}$ предназначены для постоянного хранения аргументов x1, x2, . . . , xn.

• Последующий регистр $R_{\rho+n+1}$ выделен для хранения числа k в проверяемых равенствах $g(x1, x2, \ldots, xn, k) = 0$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$.

2) Командами $T(1, \rho + 1), \ldots, T(n, \rho + n)$ пересылаем аргументы x1, x2, . . . , xn на место их постоянного хранения—регистры $R_{\rho+1}, \ldots, R_{\rho+n}$.

3) Затем работает подпрограмма $G[\rho+1, \rho+2, \ldots, \rho+n+1 \rightarrow 1]$, которая начинает цикл. Он начинается с первой команды Ip в подпрограмме и заканчивается командой J(1, 1, p). При 1, 2, . . . проходах цикла в регистр R1 заносятся числа g(x1, . . . , xn, 0), g(x1, . . . , xn, 1), ... Затем командой J(1, ρ +n+ 2, q) эти числа сравнивается с неизменяемым нулем в регистре $R_{\rho+n+2}$.

Поэтому, в общем случае, проверяется равенство g(x1, . . . , xn, k) = 0, и в этот момент в регистре Rρ+n+1 находится число k.

4) Если при проверке командой $J(1, \rho + n + 2, q)$ равенства $g(x1, \ldots, xn, k) = 0$ получили «да», то из регистра $R_{\rho+n+1}$ командой $Iq = T(\rho + n + 1, 1)$ пересылаем найденное число k в R1 и останавливаемся.

Если проверка равенства $g(x1, \ldots, xn, k+ 1) = 0$ дает «нет», то наращиваем командой $S(\rho + n + 1)$ число k в регистре $R_{\rho+n+1}$ на единицу и переходим к следующей проверке $g(x1, \ldots, xn, k + 1) = 0$.

В итоге получим искомое число k, или МНР работает бесконечно. Тогда $f(x1, \ldots, xn)$ не существует. Теорема доказана.

Как следствие трех полученных выше теорем имеем.

ТЕОРЕМА. Всякая частично рекурсивная функция вычислима на некоторой МНР.

Учитывая тезис Черча о совпадении класса вычислимых функций с классом частично рекурсивных функций, получаем утверждение.

ТЕОРЕМА. Функция f является вычислимой функцией тогда и только тогда, когда функция f вычислима на некоторой МНР.