АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

(учебная дисциплина)

Составители

доценты кафедры математики и моделирования ВГУЭС

Шуман Галина Ивановна

Волгина Ольга Алексеевна

ВГУЭС

Начало

Оглавление

Составитель

§ 5. Кривые второго порядка

- Рассмотрим линии, определяемые уравнениями второй степени относительно текущих координат

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Коэффициенты уравнения - действительные числа, но по крайней мере одно из чисел A, B или C отлично от нуля.

ВГУЭС

§ 5. Кривые второго порядка

Такие линии называются **кривыми второго порядка.**

Установим при каких условиях уравнение определяет **окружность, эллипс, гиперболу или параболу.**

§ 5. Кривые второго порядка

- **Окружностью** называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки (центра).

Если R - радиус окружности, а точка $C_0(x_0;\ y_0)$ - ее центр, то уравнение окружности имеет вид:

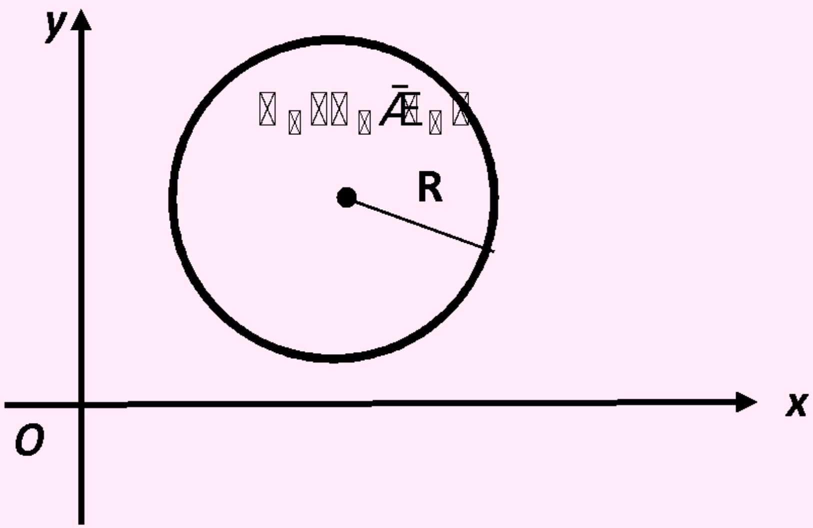
$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0})^2 + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_0})^2 = \boldsymbol{R}^2.$$

Начало

Оглавление

Составитель

§ 5. Кривые второго порядка



ВГУЭС

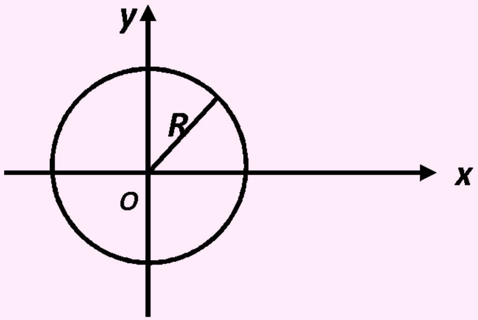
Начало

Оглавление

Составитель

§ 5. Кривые второго порядка

- В частности, если центр окружности совпадает с началом координат, то последнее уравнение имеет вид: $x^2 + y^2 = R^2$



ВГУЭС

Начало

Оглавление

Составитель

§ 5. Кривые второго порядка

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная (ее обозначают обычно через $2a$), причем эта постоянная больше расстояния между фокусами.

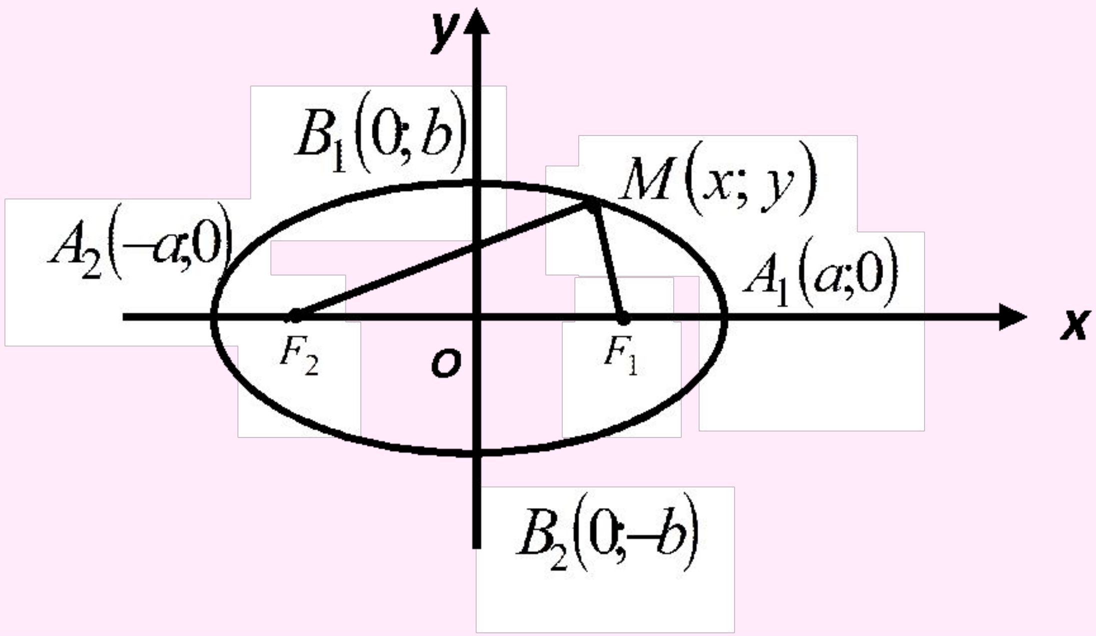
ВГУЭС

§ 5. Кривые второго порядка

Начало

Оглавление

Составитель



ВГУЭС

§ 5. Кривые второго порядка

- Если оси координат расположены по отношению к эллипсу так, как на рисунке, а фокусы эллипса находятся на оси Ox на равных расстояниях от начала координат в точках $F_1(c;0)$ и $F_2(-c;0)$, то уравнение эллипса принимает простейший (так называемый канонический) вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ВГУЭС

§ 5. Кривые второго порядка

- Здесь a - большая, b - малая полуоси эллипса, причем a, b и c (c - половина расстояния между фокусами) связаны соотношением

$$a^2 = b^2 + c^2$$

§ 5. Кривые второго порядка

- Точки пересечения эллипса с осями координат $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$, $B_1(0;b)$ и $B_2(0;-b)$ называются **вершинами** эллипса, точка $O(0;0)$ - **центром** эллипса, а оси координат - осями симметрии эллипса, ось на которой расположены фокусы, - фокальной осью, F_1 называется **правым фокусом**, а F_2 - **левым.**

Начало

Оглавление

Составитель

§ 5. Кривые второго порядка

- Форма эллипса (мера его сжатия) характеризуется его **эксцентриситетом** $\boldsymbol{\varepsilon = \frac{c}{a}}$ (так как $c < a$, то $\boldsymbol{\varepsilon < 1}$): чем меньше эксцентриситет, тем меньше его малая полуось b отличается от большой полуоси a, то есть тем меньше вытянут эллипс вдоль фокальной оси.

ВГУЭС

§ 5. Кривые второго порядка

- Если положить $\varepsilon = 0$ (а это значит, что $c = 0$, $b = a$), то эллипс превращается в окружность.

Таким образом, **общее уравнение кривой второго порядка может быть уравнением эллипса, если коэффициенты *A* и *C* одного знака, а *B=0*.**

ВГУЭС

§ 5. Кривые второго порядка

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная (равная $2a$), меньшая, чем расстояние между фокусами.

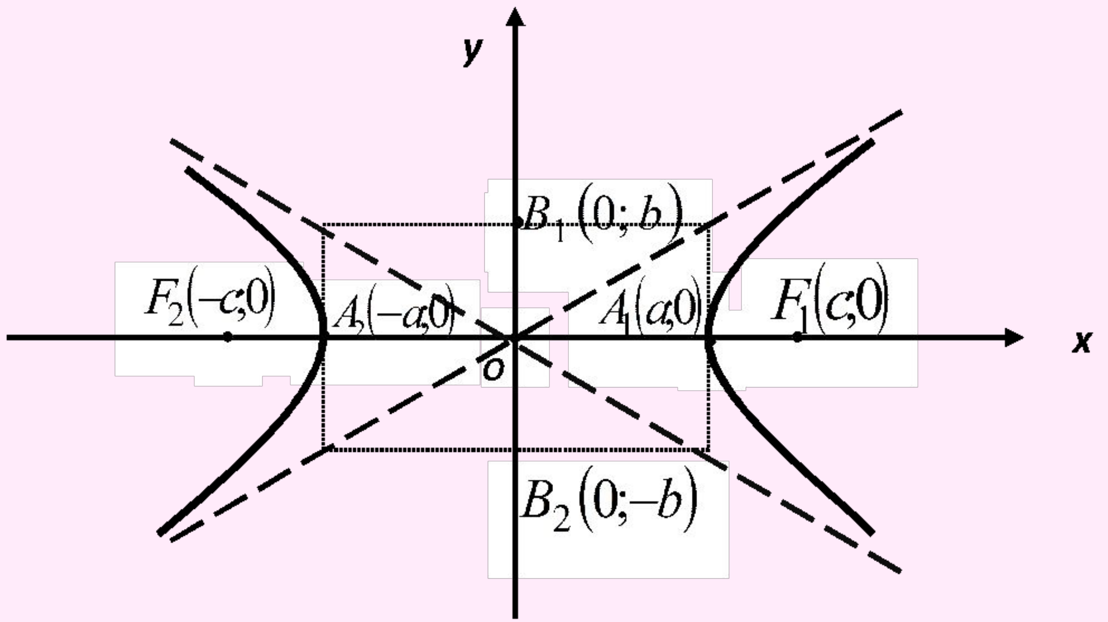
ВГУЭС

Начало

Оглавление

Составитель

§ 5. Кривые второго порядка



ВГУЭС

§ 5. Кривые второго порядка

- Поместив фокусы гиперболы в точках $F_1(c;0)$ (правый фокус) и $F_2(-c;0)$ (левый фокус) и расположив оси координат по отношению к гиперболе так, как на рисунке, получаем простейшее (каноническое) уравнение гиперболы в виде

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

где a, b и c связаны соотношением $c^2=a^2+b^2$.

ВГУЭС

§ 5. Кривые второго порядка

- Гипербола состоит из двух ветвей и расположена симметрично относительно осей координат. Точки $A_1(a;0)$ и $A_2(-a;0)$ называются **вершинами гиперболы**. Отрезок $A_1A_2 = 2a$ называют вещественной осью гиперболы, а отрезок $B_1B_2 = 2b$ - мнимой осью. Ось, на которой расположены фокусы, называется фокальной осью.

ВГУЭС

Начало

Оглавление

Составитель

§ 5. Кривые второго порядка

- Прямая называется **асимптотой** гиперболы, если расстояние точки гиперболы $M(x;y)$ от этой прямой стремится к нулю при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$. Гипербола имеет две асимптоты, уравнения которых

$$\boldsymbol{y = \pm \frac{b}{a} x}$$

ВГУЭС

§ 5. Кривые второго порядка

- Для построения асимптот гиперболы строят осевой (**основной**) прямоугольник гиперболы со сторонами $x = a$, $x = -a$, $y = b$, $y = -b$. Прямые, проходящие через противоположные вершины этого прямоугольника, являются асимптотами гиперболы. Точка $O(0; 0)$ называется центром гиперболы.

ВГУЭС

§ 5. Кривые второго порядка

Начало
Оглавление
Составитель

- Форма гиперболы характеризуется его **эксцентриситетом** $\boldsymbol{\varepsilon = \frac{c}{a}}$ (так как $c > a$, то $\varepsilon > 1$). Чем меньше эксцентриситет гиперболы, тем более вытянут ее основной прямоугольник и наоборот.

ВГУЭС

§ 5. Кривые второго порядка

- **Гипербола** называется **равносторонней** (равнобочной), если ее полуоси равны ($a = b$). Её каноническое уравнение $\boldsymbol{x^2 - y^2 = a^2}$.

Асимптоты равносторонней гиперболы имеют уравнения $y = \pm x$, следовательно являются биссектрисами координатных углов.

Эксцентриситет равносторонней гиперболы равен $\sqrt{2}$.

ВГУЭС

§ 5. Кривые второго порядка

- Уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ $\left(\text{или } \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1\right)$ также является уравнением гиперболы, но вещественной осью этой гиперболы служит отрезок оси Oy длины $2b$.

Начало

Оглавление

Составитель

§ 5. Кривые второго порядка

- Две гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ имеют одни и те же полуоси и одни и те же асимптоты, но вещественная ось одной служит мнимой осью другой, и наоборот. Такие две гиперболы называются **сопряженными**.

ВГУЭС

§ 5. Кривые второго порядка

Итак, **общее уравнение кривой второго порядка может быть уравнением гиперболы, если коэффициенты *A* и *C* разных знаков, а *B=0*.**

§ 5. Кривые второго порядка

- **Параболой** называется множество всех точек плоскости каждая из которых одинаково удалена от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой. Расстояние от фокуса F до директрисы называется **параметром** параболы и обозначается через $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{p} > \mathbf{0})$.

ВГУЭС

§ 5. Кривые второго порядка

- Если выбрать систему координат Oxy так, чтобы ось Ox проходила через фокус F перпендикулярно директрисе в направлении от директрисы к F, а начало координат O расположить посередине между фокусом и директрисой, причем фокус F имеет координаты $\left(\frac{p}{2};0\right)$, уравнение **директрисы -** $\boldsymbol{x=-\frac{p}{2}}$ или $x+\frac{p}{2}=0$, то уравнение параболы будет иметь вид

$$\boldsymbol{y^2=2px.}$$

ВГУЭС

§ 5. Кривые второго порядка

- Это уравнение называется **каноническим уравнением параболы.**

В выбранной системе координат ось Ox является осью симметрии параболы.

Так как $p > 0$, то уравнение имеет смысл при $x \geq 0$, следовательно парабола расположена справа от оси Oy.

При $x = 0$ имеем $y = 0$. Следовательно, парабола проходит через начало координат. **Точка** $\boldsymbol{O(0; 0)}$ называется **вершиной** параболы.

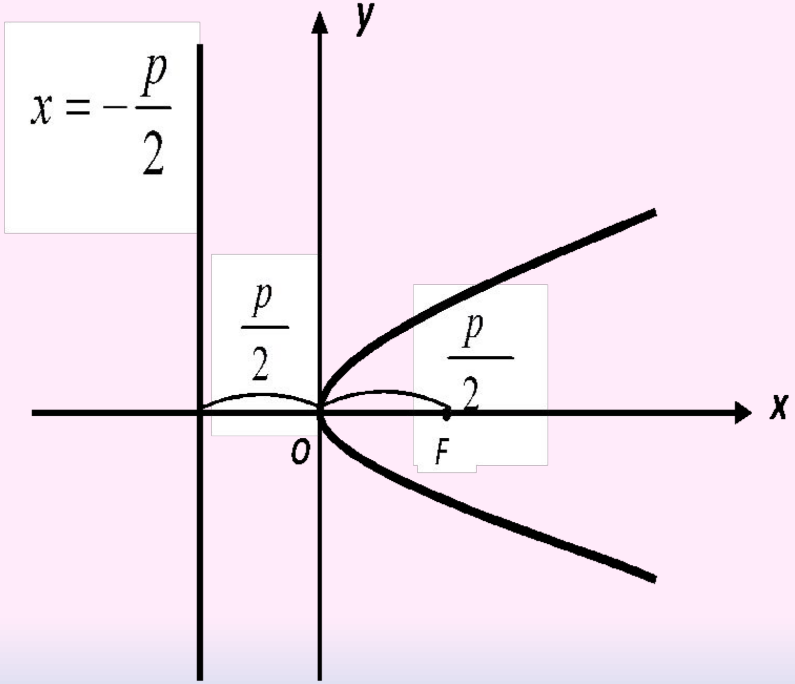
ВГУЭС

§ 5. Кривые второго порядка

Начало

Оглавление

Составитель



ВГУЭС

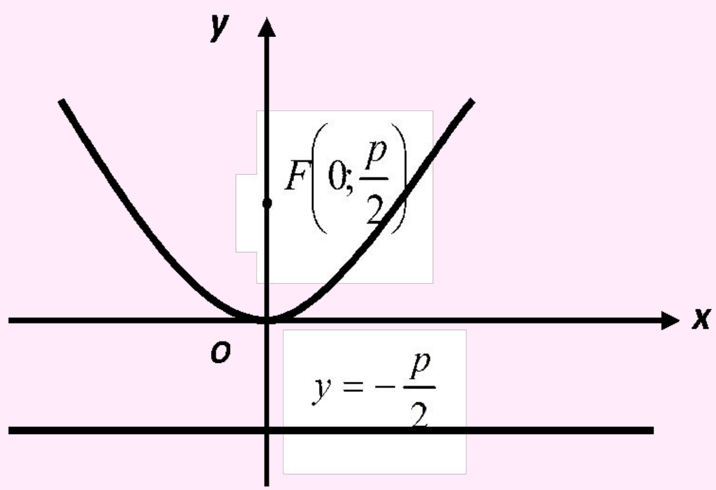
Начало

Оглавление

Составитель

§ 5. Кривые второго порядка

- При другом выборе системы координат получаются канонические уравнения другого вида $x^2 = 2py, y \geq 0.$



ВГУЭС

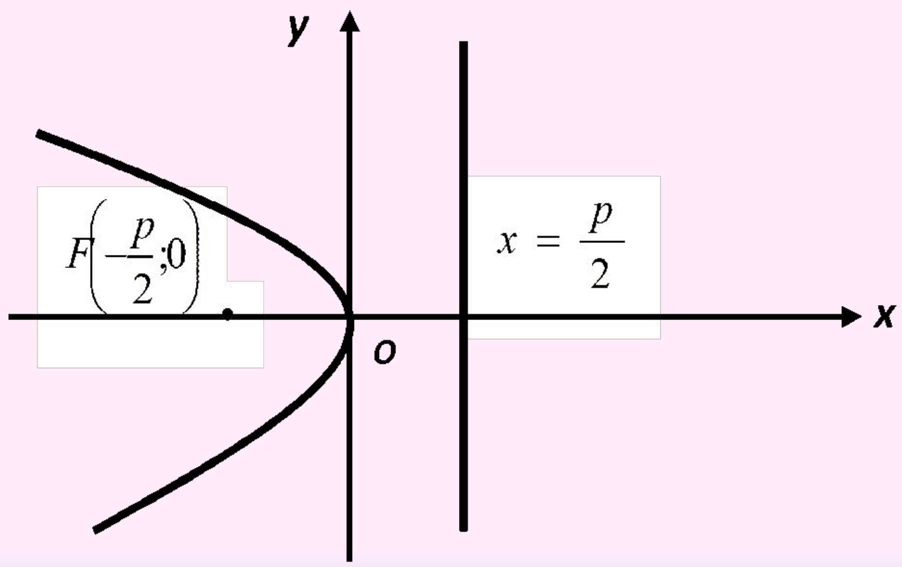
Начало

Оглавление

Составитель

§ 5. Кривые второго порядка

- $$y^2 = -2px, x \le 0$$



ВГУЭС

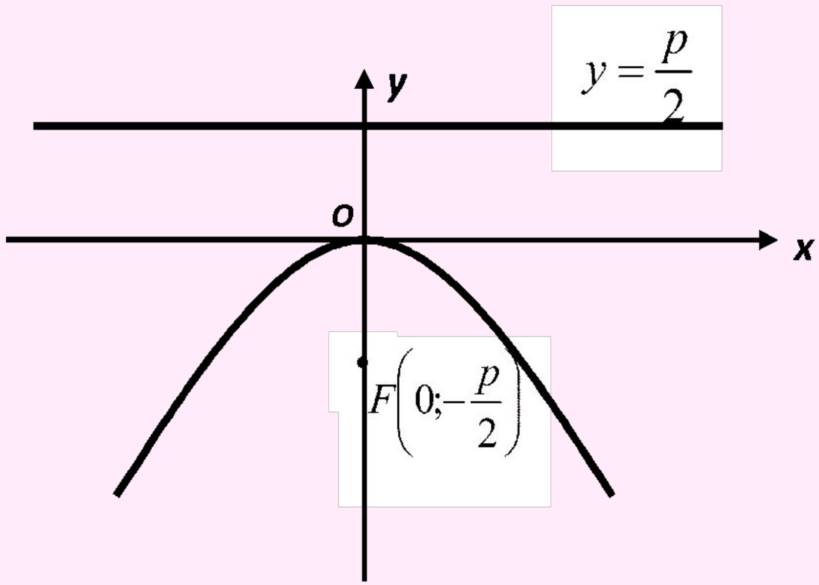
Начало

Оглавление

Составитель

§ 5. Кривые второго порядка

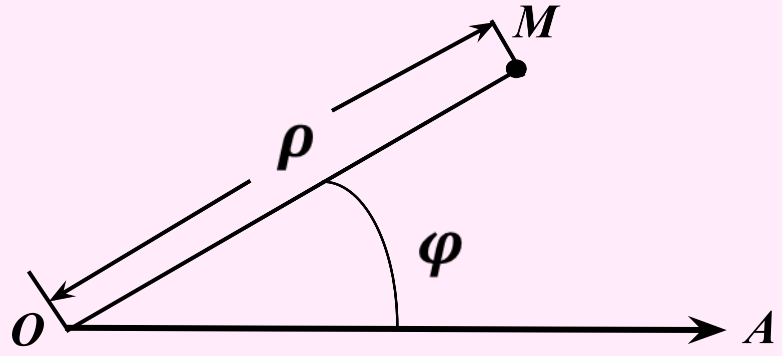
- $$x^2 = -2py, y \le 0$$



ВГУЭС

§ 6. Полярная система координат

Полярная система координат состоит из некоторой точки ***O*, называемой полюсом, и полярной оси** – фиксированного луча ***OA***, исходящего из полюса.



§ 6. Полярная система координат

- В этой системе **полярными координатами** произвольной точки M на плоскости называются числа ρ и φ – соответственно расстояние от точки M до полюса, или **полярный радиус**, и угол между полярной осью и лучом OM, или **полярный угол**, отсчитываемый против часовой стрелки.

Точка M с полярными координатами ρ и φ обозначается $M(\rho; \varphi)$.

ВГУЭС

§ 6. Полярная система координат

- Полярный радиус может быть любым **неотрицательным числом:**

$$0 \le \rho \le +\infty.$$

Полярный угол чаще всего полагают изменяющимся в пределах:

$$0 \le \varphi \le 2\pi.$$

ВГУЭС

§ 6. Полярная система координат

- Прямоугольные координаты $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ точки $\boldsymbol{M}$ выражаются через её полярные координаты $\boldsymbol{\rho}$ и $\boldsymbol{\varphi}$ по формулам $\boldsymbol{x = \rho \cos\varphi, y = \rho \sin\varphi}$.

Можно выразить полярные координаты через прямоугольные:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad tg\varphi = \frac{y}{x}.$$

ВГУЭС

§ 6. Полярная система координат

- В полярной системе координат уравнение линии имеет вид:

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\varphi}).$$

Полярные координаты удобны тем, что многие сложные кривые описываются в них простыми уравнениями; например, уравнение окружности радиуса $\boldsymbol{a}$ имеет вид $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{a}$.

ВГУЭС