

# ALGORYTMY I STRUKTURY DANYCH

**W-6**

Jan Sikora

**WSEI, Lublin 2021**



# Źródło:

B. Pańczyk

E. Łukasik

J. Sikora

T. Guziak

## Metody Numeryczne w przykładach

Wydawca: Politechnika Lubelska

# Treść wykładu

1. Numeryczne rozwiązywanie równań (metody Newtona i siecznych).
2. Układy równań nieliniowych

# Numeryczne rozwiązywanie równań

Na ogół pierwiastki równania nieliniowego:

$$f(x) = 0 \tag{5.1}$$

nie dają wyrazić się za pomocą wzoru analitycznego. Dlatego duże znaczenie mają metody przybliżonego rozwiązywania równań. Są to *metody kolejnych przybliżeń* pierwiastka czyli *metody iteracyjne*. Polegają one na tym, że startując od jednej początkowej wartości pierwiastka czyli punktu startowego  $x_0$  konstruuje się ciąg punktów  $x_1, x_2, x_3, \dots$  zbieżny do tego pierwiastka. W niektórych metodach potrzebne są dwa pierwsze przybliżenia pierwiastka. W metodach tych zadanie znalezienia pierwiastków uważamy za wykonane, jeśli potrafimy określić je z żadaną dokładnością i podać oszacowanie błędu. Trzeba jednak pamiętać, że większość metod przybliżonego rozwiązywania równań można stosować jedynie wtedy, gdy znany jest przedział, w którym znajduje się pojedynczy pierwiastek, czyli tzw. *przedział izolacji*.

# Numeryczne rozwiązywanie równań

Do najbardziej popularnych metod znajdowania pierwiastków równań nieliniowych zaliczamy metodę bisekcji, metodę regula-falsi, metodę siecznych, metodę Newtona i jej modyfikacje [1, 4, 5, 7, 8, 9, 10].

# Metoda bisekcji

O funkcji  $f(x)$  z równania (5.1) zakładamy, że:

1. jest ciągła na przedziale domkniętym  $\langle a, b \rangle$ ;
2. w punktach  $a$  i  $b$  wartości funkcji  $f(x)$  mają przeciwne znaki, tzn.  $f(a)f(b) < 0$ ;

W przypadku metody bisekcji (inaczej zwanej też metodą połowienia) nie musimy zakładać monotoniczności funkcji na przedziale domkniętym  $\langle a, b \rangle$ . Metoda bisekcji znajduje jeden pierwiastek, nawet jeśli w przedziale  $\langle a, b \rangle$  jest tych pierwiastków wiele. Metoda nie korzysta z własności funkcji i jej przebiegu wewnątrz badanego przedziału - wystarczy jej informacja o znaku funkcji na jego krańcach. Stosując metodę bisekcji pierwiastek możemy wyznaczyć z dowolną zadaną dokładnością  $\varepsilon$ .

# Metoda bisekcji

**Pierwszy krok** metody bisekcji polega na podziale przedziału  $\langle a, b \rangle$  na połowę punktem:

$$x_1 = (a + b) / 2.$$

Jeżeli wartość funkcji w tym punkcie jest bardzo bliska zeru tj.  $|f(x_1)| < \epsilon$ , to  $x_1$  jest szukanym pierwiastkiem. W przeciwnym wypadku z otrzymanych dwóch przedziałów  $\langle a, x_1 \rangle$  i  $\langle x_1, b \rangle$  wybieramy ten, na końcach którego funkcja  $f(x)$  ma przeciwne znaki tj.:

- jeżeli  $f(a) * f(x_1) < 0$ , wtedy  $a$  się nie zmienia ale  $b = x_1$ ;
- w przeciwnym razie  $a = x_1$ , podczas gdy  $b$  nie ulega zmianie.

# Metoda bisekcji

*W drugim kroku* metody, wybrany do dalszych obliczeń przedział, ponownie dzielimy na połowę i dostajemy punkt:

$$x_2 = (a + b) / 2.$$

Po raz kolejny badamy wartość funkcji  $f(x)$ , tym razem w punkcie  $x_2$  i znaki funkcji  $f(x)$  na końcach przedziałów oraz wybieramy jeden z nich do dalszych obliczeń tj:

- jeżeli  $f(a) \cdot f(x_2) < 0$ , wtedy  $a$  się nie zmienia,  $b = x_2$ ;
- w przeciwnym razie  $a = x_2$ ,  $b$  się nie zmienia.

W wyniku takiego postępowania po pewnej liczbie kroków otrzymamy ciąg przedziałów takich, że  $f(a_i) \cdot f(b_i) < 0$ , przy czym  $a_i$  oraz  $b_i$  są odpowiednio początkiem i końcem  $i$ -tego przedziału, a jego długość wynosi:

$$|b_i - a_i| = \frac{1}{2^i} (b - a). \quad (5.2)$$

Lewe końce ciągu przedziałów tworzą ciąg niemalejący i ograniczony z góry a prawe końce ciąg nierosnący i ograniczony z dołu, więc z (5.2) wynika, że istnieje ich wspólna granica  $\alpha$ . Ze względu na stosowaną metodę obliczeniową, ten sposób znajdowania pierwiastków nazywamy metodą bisekcji (także *metodą połowienia* lub *metodą równego podziału*).



# Metoda bisekcji

Obliczenia kończymy gdy przedział  $\langle a_i, b_i \rangle$  jest już odpowiednio mały czyli:  $|b_i - a_i| < 2\varepsilon$ , ponieważ przybliżenie pierwiastka  $\bar{x} = 0.5(a + b)$  spełnia najczęściej stosowane kryterium końca obliczeń:

$$|\bar{x} - x^*| \leq \varepsilon,$$

gdzie  $x^*$  jest rozwiązaniem równania.

Innym, ale stosowanym w ostateczności kryterium końca obliczeń jest sprawdzanie, czy wartość funkcji w punkcie  $x_i$  jest dostatecznie małą, czyli  $|f(x_i)| < \text{eps}$ .

Podstawową zaletą metody bisekcji oprócz jej dużej prostoty i łatwej implementacji jest pewność, że w każdej kolejnej iteracji szukany pierwiastek leży między dwiema wartościami, dla których funkcja  $f(x)$  zmienia znak. Zawsze więc dojdziemy do szukanego rozwiązania. Jest to metoda na ogół wolniej zbieżna niż metoda Newtona, ale nie oznacza to, że jest wolno zbieżna. Przy rozwiązywaniu wielkich układów równań liniowych potrzeba niekiedy wykonać kilkaset tysięcy iteracji, a w metodzie bisekcji aby zyskać 6 cyfr znaczących wystarcza 20 iteracji.

# Metoda bisekcji - przykład

## Przykład 5.1.

Metodą bisekcji znaleźć rzeczywisty pierwiastek równania:

$$x^3 + x - 1 = 0$$

z dokładnością do 0.01.

Łatwo sprawdzić, że pierwiastek ten znajduje się w przedziale  $\langle 0, 1 \rangle$ .  
Mamy bowiem:

$$f(0) = -1 \text{ oraz } f(1) = 1,$$

czyli:

$$f(0) \cdot f(1) < 0.$$

Pochodna:  $f'(x) = 3x^2 + 1$  jest w przedziale  $\langle 0, 1 \rangle$  dodatnia oraz  $f(x)$  jako wielomian jest funkcją ciągłą, zatem  $\langle 0, 1 \rangle$  jest przedziałem izolacji pierwiastka. Zadana dokładność obliczeń  $\text{eps} = 0.01$ .

**Pierwszy krok obliczeń:**

$$a=0, b=1,$$

$$x_1 = (a+b)/2 = (0+1)/2 = 0.5.$$

Wartość funkcji w znalezionym punkcie  $x_1$ :

$$f(x_1) = f(0.5) = -0.375.$$

# Metoda bisekcji - przykład

Mamy  $f(x_1) * f(b) < 0$  więc przyjmujemy:

$$a = x_1 = 0.5,$$

$$b = 1,$$

a ponieważ  $|b-a| > 2\epsilon$  to należy kontynuować obliczenia.

**Drugi krok obliczeń:**

$$a=0.5, b=1,$$

$$x_2 = (a+b)/2 = (0.5+1)/2 = 0.75$$

oraz:

$$f(x_2) = f(0.75) = 0.172.$$

Ponieważ  $f(a) * f(x_2) < 0$  więc:

$$a = 0.5,$$

$b = x_2 = 0.75$  i ponownie  $|b-a| > 2\epsilon$ , czyli kontynuujemy obliczenia.

**Trzeci krok obliczeń:**

$$a=0.5, b=0.75,$$

$$x_3 = (a+b)/2 = (0.5+0.75)/2 = 0.625$$

$$f(x_3) = f(0.625) = -0.131.$$

Skoro  $f(x_3) * f(b) < 0$  to:

$$a = x_3 = 0.625,$$

$b = 0.75$  i nadal  $|b-a| > 2\epsilon$ .

# Metoda bisekcji - przykład

W analogiczny sposób wykonujemy kolejne kroki. Obliczenia kończymy po wykonaniu kroku 7 a znaleziony pierwiastek jest równy  $x_7=0.6796875$ . Dokładne wyniki obliczeń kolejnych przybliżeń szukanego pierwiastka dla pierwszych 7 kroków umieszczone są w tabeli 5.1.

**Tabela 5.1. Wyniki obliczeń do przykładu 5.1**

<i>i</i>	$x_i$	$f(x_i)$	<i>i</i>	$x_i$	$f(x_i)$
1	0.5	-0.375	5	0.65625	-0.0611268
2	0.75	0.171875	6	0.671875	-0.0248299
3	0.625	-0.1308593	7	0.6796875	-0.0063138
4	0.6875	0.0124511			

# Metoda regula falsi

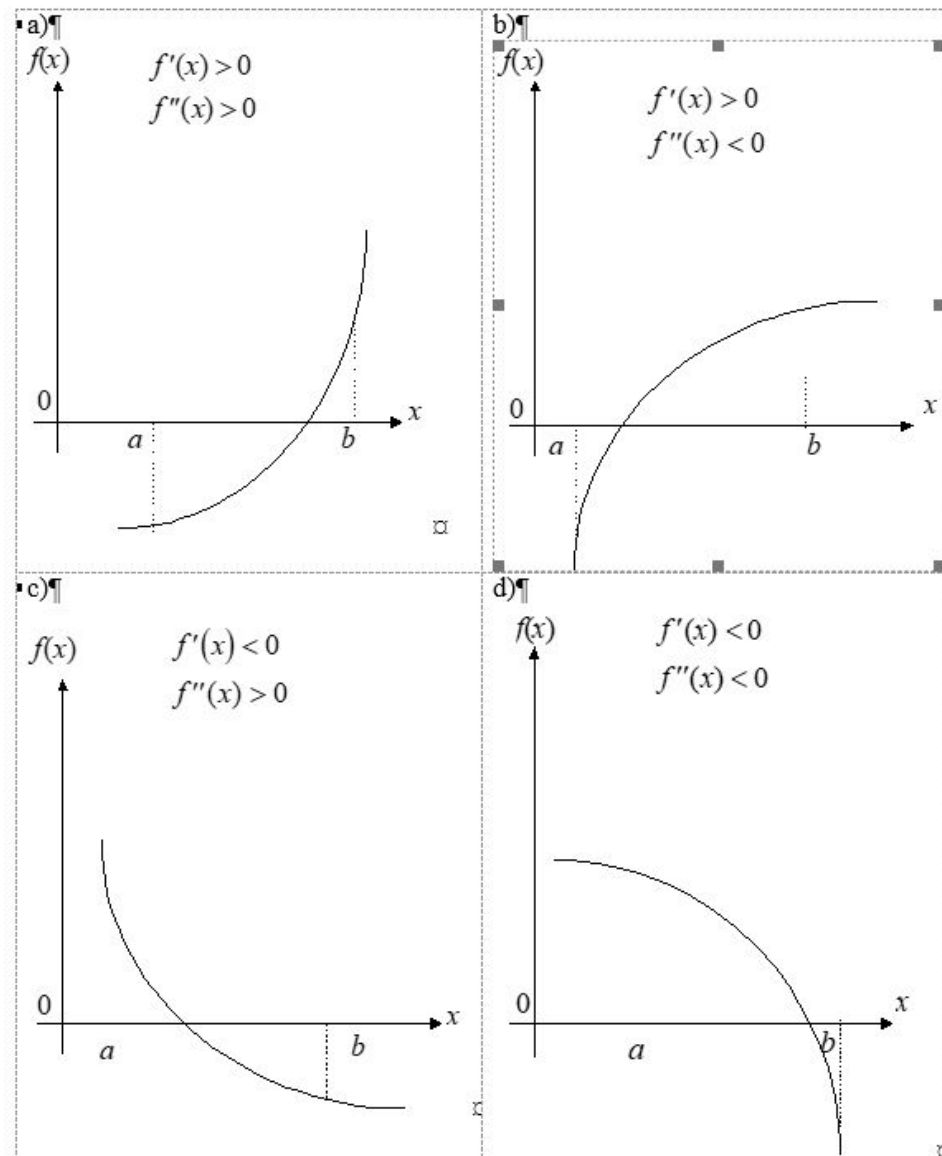
Nazwa metody pochodzi od łacińskich słów: regula - linia i falsus - fałszywy. Jest to zatem metoda fałszywego założenia liniowości funkcji. Zakładamy, że w rozpatrywanym przedziale  $\langle a, b \rangle$  funkcja  $f(x)$  spełnia założenia:

- jest funkcją klasy  $C^2$  na przedziale domkniętym  $\langle a, b \rangle$ ;
- w punktach  $a$  i  $b$  wartości funkcji  $f(x)$  mają przeciwne znaki, tzn.  $f(a)f(b) < 0$ ;
- pierwsza pochodna funkcji  $f(x)$  ma na przedziale  $\langle a, b \rangle$  stały znak, różny od zera;
- druga pochodna funkcji  $f(x)$  ma na przedziale  $\langle a, b \rangle$  stały znak, różny od zera.

Spełnienie wymienionych warunków gwarantuje zbieżność metody oraz, że wewnątrz badanego przedziału znajduje się dokładnie jeden pierwiastek.

Z założeń tych wynika, że wykres funkcji  $y = f(x)$  może mieć jedną z czterech postaci przedstawionych na rysunkach 5.1a 5.1d.

# Metoda regula falsi



Rys. 5.1. Wykres funkcji  $f(x)$  w przedziale  $\langle a, b \rangle$  w zależności od znaku pierwszej i drugiej pochodnej funkcji

# Metoda regula falsi

Rozpatrzmy przypadek, gdy w przedziale  $\langle a, b \rangle$  pochodne  $f'(x)$  i  $f''(x)$  są dodatnie (rys. 5.2, dla pozostałych przypadków rozumowanie jest analogiczne).

Przez punkty  $A(a, f(a))$  i  $B(b, f(b))$  prowadzimy cięciwę o równaniu:

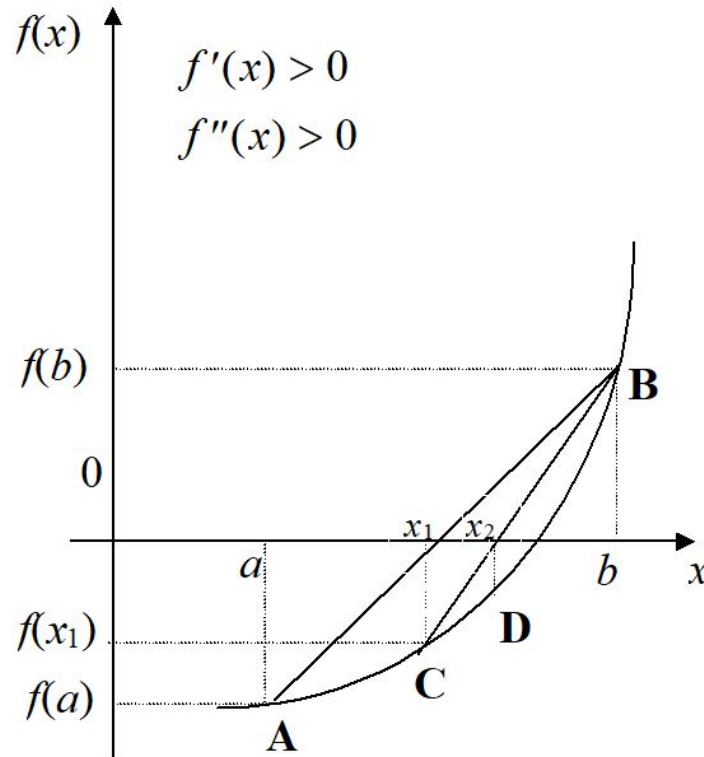
$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a).$$

Odciętą  $x_1$  punktu, w którym cięciwa AB przecina oś  $0x$ , przyjmuje się jako pierwsze przybliżenie szukanego pierwiastka równania (5.1). Stąd:

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)} (b - a).$$

Jeżeli  $|f(x_1)| < \epsilon$  (zadana dokładność), to oczywiście  $x_1$  jest szukanym przybliżeniem pierwiastka  $\alpha$  i zadanie jest zakończone.

# Metoda regula falsi



Rys. 5.2. Interpretacja geometryczna metody regula falsi, jeśli  $f'(x) > 0$  i  $f''(x) > 0$



# Metoda regula falsi

Założmy, że  $|f(x_1)| > \text{eps}$ . Jeżeli przybliżenie  $x_1$  nie jest wystarczająco dokładne, to przez punkt  $C(x_1, f(x_1))$  oraz przez ten z punktów A, B, którego rzędna ma przeciwny znak niż  $f(x_1)$ , prowadzimy następną cięciwę (rys.5.2). Odcięta  $x_2$  punktu, w którym ta cięciwa przetnie oś  $0x$ , da nam drugie przybliżenie pierwiastka  $\alpha$ . Dla uproszczenia rozumowania przyjęliśmy, że  $f'(x) > 0$  oraz  $f''(x) > 0$  w przedziale  $\langle a, b \rangle$ , co oznacza, że funkcja  $y = f(x)$  jest wypukła i w kolejnych przybliżeniach punkt B pozostaje nieruchomy. Dla funkcji  $f(x)$  takiej, że  $f'(x) > 0$  i  $f''(x) < 0$  w przedziale  $\langle a, b \rangle$ , nieruchomy byłby punkt A. Jeżeli przybliżenie  $x_2$  jest nadal niewystarczające, to przez punkty B i  $D(x_2, f(x_2))$  prowadzimy trzecią cięciwę, co daje nam trzecie przybliżenie  $x_3$  itd.

# Metoda regula falsi

W ten sposób otrzymujemy kolejne wyrazy ciągu przybliżeń pierwiastka  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  określonego wzorem rekurencyjnym:

$$x_0 = a, x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(b) - f(x_k)}(b - x_k), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (5.3)$$

Można wykazać, że przy przyjętych założeniach ciąg ten jest rosnący i ograniczony, a więc zbieżny oraz, że jego granicą jest szukany pierwiastek  $\alpha$ . Jeśli nieruchomy jest punkt B, to kolejne wyrazy ciągu przybliżeń są mniejsze od  $\alpha$  oraz  $f(x_k) < 0$  dla każdego  $k$ ).

# Metoda siecznych

Metodę regula falsi można znacznie ulepszyć, jeżeli zrezygnuje się z żądania, aby w punktach wytyczających kolejną cięciwę funkcja  $f(x)$  miała różne znaki, natomiast do wyznaczenia  $(n+1)$ -szego przybliżenia wykorzystana się punkty  $x_n$  oraz  $x_{n-1}$ . Wzór (5.3) przyjmie wówczas postać:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, n = 1, 2, \dots \quad (5.7)$$

Metoda (5.7) nosi nazwę metody siecznych. Jej zbieżność jest znacznie szybsza, niż metody regula falsi. Niestety, zdarzają się przypadki, gdy może nie być zbieżna, np. gdy początkowe przybliżenia nie leżą dostatecznie blisko pierwiastka. W metodzie tej istotne znaczenie ma maksymalna graniczna dokładność wynikająca z przyjętej arytmetyki. Gdy bowiem różnica  $x_{n+1} - x_n$  jest tego samego rzędu, co oszacowanie błędu, jakim jest obarczona, następne przybliżenie może już być całkowicie błędne.

# Metoda siecznych

Dlatego też za dodatkowe kryterium przerywania iteracji należy przyjmować wartości  $|f(x_n)|$  tak, aby tworzyły one ciąg malejący (w końcowej fazie obliczeń). Iteracja powinna być przerywana, jeżeli różnica między kolejnymi przybliżeniami zamiast maleć zaczyna szybko wzrastać. W takim przypadku należy przeprowadzić powtórny lokalizację pierwiastka znacznie zawężając początkowy przedział jego izolacji.

## Przykład 5.2.

Metodą regula falsi znaleźć rzeczywisty pierwiastek równania:

$$3x - \cos x - 1 = 0.$$

Badając funkcję występującą w równaniu możemy stwierdzić, że w przedziale  $< 0.25, 0.75 >$  ma ona dokładnie jedno miejsce zerowe (w badanym przedziale  $f'(x) > 0$ ). Kolejne przybliżenia obliczone według wzoru (5.3) znajdują się w tabeli 5.2.

# Metoda siecznych

Tabela 5.2. Wyniki obliczeń do przykładu 5.2

$x_i$	$f(x_i)$
$a = 0.25$	-1.218912
$b = 0.75$	0.518311
$x_1 = 0.600819$	-0.022416
$x_2 = 0.607003$	-0.000352
$x_3 = 0.607100$	-0.000006
$x_4 = 0.607101$	-0.000002
$x_5 = 0.607101$	

Tabela 5.3. Wyniki obliczeń do przykładu 5.3

$i$	$x_i$	$f(x_i)$
0	1	-4
1	2	3
2	1.57142	-1.36449
3	1.70540	-0.24784
4	1.73513	0.02920
5	1.73199	0.000576
6	1.73193	

## Przykład 5.3.

Stosując metodę siecznych znaleźć pierwiastek równania:

$$x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0 \text{ w przedziale } < 1, 2 >.$$

Funkcja występująca w równaniu ma w przedziale  $< 1, 2 >$  dokładnie jeden pierwiastek. Kolejne przybliżenia tego pierwiastka obliczamy zgodnie ze wzorem (5.7). Wyniki obliczeń zapisane są w tabeli 5.3.

# Metoda Newtona-Raphsona

Metoda Newtona-Raphsona, zwana także *metodą Newtona* lub *metodą stycznych*, należy do metod iteracyjnych. Dla zadania jednowymiarowego, tzn. jednego równania, w metodzie tej dla znalezienia następnego punktu iteracji korzysta się tylko z jednego punktu startowego  $x_0$ . Jeśli wartość funkcji dla  $x = x_0$  jest różna od zera, to w punkcie o współrzędnych  $(x_0, f(x_0))$  prowadzi się styczną do wykresu funkcji (rys. 5.3).

Punkt przecięcia tej stycznej z osią  $Ox$  stanowi pierwsze przybliżenie  $x_1$  szukanego pierwiastka. Następnie w punkcie o współrzędnych  $(x_1, f(x_1))$  prowadzi się kolejną styczną. Punkt przecięcia tej stycznej z osią  $Ox$  jest drugim przybliżeniem pierwiastka  $x_2$ . W ten sposób otrzymuje się kolejne wyrazy ciągu przybliżeń  $x_1, x_2, x_3, \dots$ .

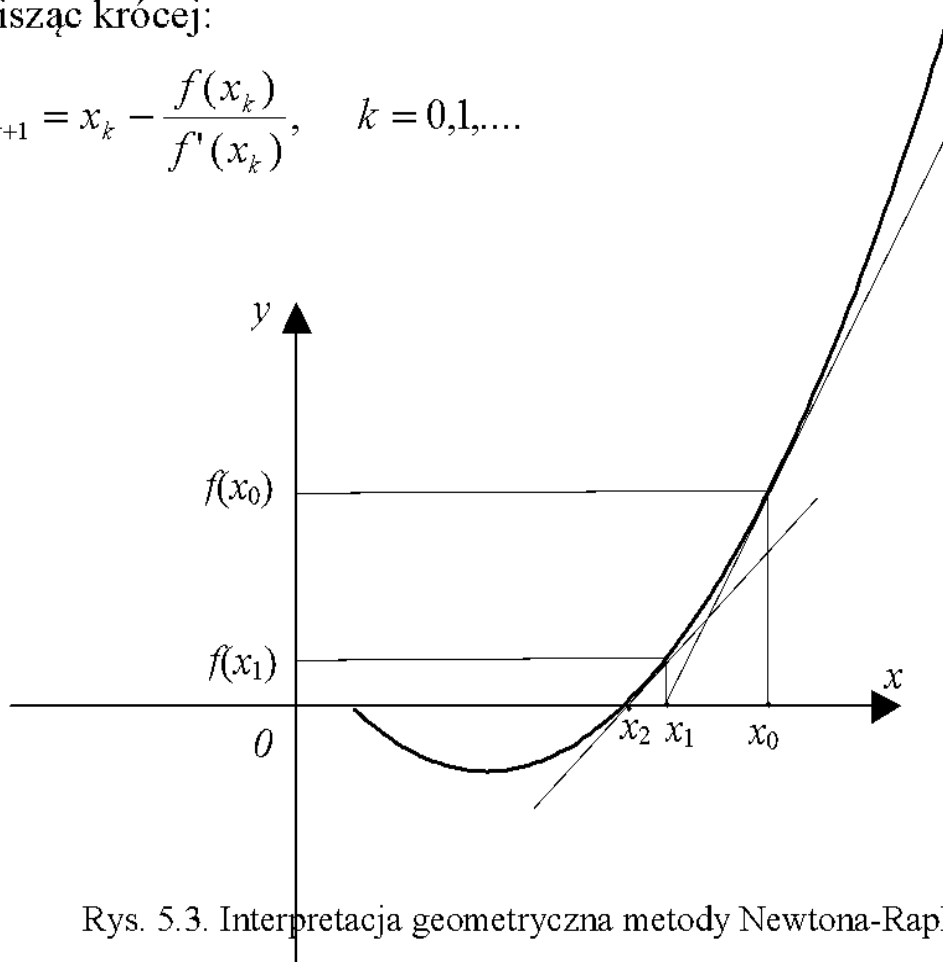
# Metoda Newtona

Wzór rekurencyjny opisujący obliczanie tych wyrazów ma postać:

$$x_{k+1} = x_k + h_k, \quad h_k = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (5.8)$$

lub pisząc krócej:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (5.9)$$



Rys. 5.3. Interpretacja geometryczna metody Newtona-Raphsona

# Metoda Newtona

Obliczenia kończy się, gdy:

$$|h^k| = |x^{k+1} - x^k| < eps . \quad (5.10)$$

przy czym  $eps$  oznacza zadaną z góry dokładność i jest oszacowaniem błędu wartości  $f(x_n) / f'(x_n)$ .

Warto zauważyć, że jeżeli we wzorze (5.9) za  $f'(x_k)$  wstawimy iloraz różnicowy  $\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$  to otrzymamy metodę siecznych.

Wybór punktu startowego  $x_0$  jest bardzo istotny i może decydować o zbieżności ciągu kolejnych przybliżeń. Jeżeli wystartujemy odpowiednio blisko od rozwiązania, wtedy metoda Newtona jest lokalnie kwadratowo zbieżna czyli jej **wykładnik zbieżności** wynosi  $p=2$ , jeśli  $f'(\alpha) \neq 0$ .



# Metoda Newtona

Wykładnik zbieżności metody iteracyjnej z definicji jest taką liczbą  $p > 1$ , że:

$$\|x_{k+1} - \alpha\| \leq c \|x_k - \alpha\|^p, \quad 0 < c < \infty.$$

Gdy  $c \approx 1$ , to w metodzie Newtona, w każdym kroku (z wyjątkiem początkowych) podwaja się liczba cyfr dokładnych w przybliżeniu pierwiastka.

W metodzie siecznych wykładnik zbieżności wynosi:

$$p = \frac{\sqrt{5} + 1}{2},$$

skąd wynika szybsza zbieżność metody Newtona.

# Przykłady do samodzielnego rozwiązania

## Przykład 5.4.

Zbadać z dokładnością do  $1e-5$  rozwiązanie równania  $y = e^x + 2x + 1$  metodą Newtona wybierając jako punkt startowy:

- a)  $x_0=0$ ,
- b)  $x_0=5$ .

Dla badanej funkcji mamy:

$$f(x) = e^x + 2x + 1$$

$$f'(x) = e^x + 2$$

*Ad a)*

Wykonamy obliczenia dla punktu startowego  $x_0=0$ . Obliczamy przybliżenia rozwiązania korzystając z wzoru 5.8 i wartości funkcji w obliczonych punktach:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{f(0)}{f'(0)} = 0 - \frac{2}{3} = -0.666667.$$

# Przykłady do samodzielnego rozwiązania

Wartość funkcji w otrzymanym punkcie  $x_1$  wynosi:

$$f(x_1) = 1 - 0.666667 = 0.18008379.$$

Ponieważ  $f'(x_1) > 1 - 5$  należy policzyć kolejny krok metody:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -0.666667 - \frac{1 - 0.666667}{-5 - 0.666667} = -0.738316$$

Kontynuując obliczenia otrzymujemy:

$$f(x_2) = 1 - 0.738316 = 0.00128692,$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = -0.738835,$$

$$f(x_3) = 1 - 0.738835 = 0.00000100.$$

Po wykonaniu trzeciego kroku następuje koniec obliczeń (osiągnięto zadaną dokładność 0.00001) a znaleziony pierwiastek wynosi:

$$x = -0.738835.$$

# Przykłady do samodzielnego rozwiązania

Ad b)

Podobne obliczenia wykonamy dla punktu startowego  $x_0=5$ .

Otrzymujemy kolejno:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 5 - \frac{f(5)}{f'(5)} = 5 - \frac{159.413159}{150.413159} = 3.940165,$$

$$f(x_1) = f(3.940165) = 60.3074059,$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2.811385,$$

$$f(x_2) = f(2.811385) = 23.255709,$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1.563288,$$

$$f(x_3) = f(1.563288) = 8.901072,$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 0.249379,$$

$$f(x_4) = f(0.249379) = 2.781987,$$

# Przykłady do samodzielnego rozwiązania

$$x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)} = -0.597954,$$

$$f(x_5) = f(-0.597954) = 0.354403,$$

$$x_6 = x_5 - \frac{f(x_5)}{f'(x_5)} = -0.736792,$$

$$f(x_6) = f(-0.736792) = 0.005063,$$

$$x_7 = x_6 - \frac{f(x_6)}{f'(x_6)} = -0.738835,$$

$$f(x_7) = f(-0.738835) = 0.0000010.$$

Po wykonaniu siódmego kroku następuje koniec obliczeń. Pierwiastek wynosi:  $x = -0.738835$ .

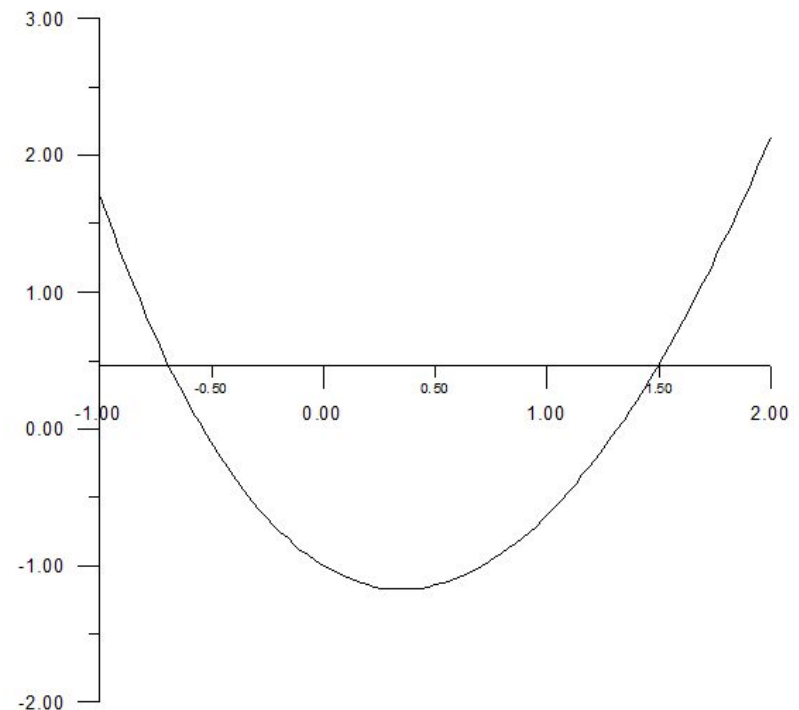
# Przykłady do samodzielnego rozwiązania

## Przykład 5.5.

Zbadać zależność rozwiązania równania od wyboru punktu startowego w metodzie Newtona dla równania:

$$x_0 y = e^{-x} + x^2 - 2.$$

Wykres funkcji  $y(x)$  przedstawia rys.



Rys. 5.4. Wykres funkcji z przykładu 5.4.

# Przykłady do samodzielnego rozwiązania

Badana funkcja ma dwa rzeczywiste pierwiastki  $x_1 > 0$  oraz  $x_2 < 0$ . Wyniki obliczeń tych pierwiastków z różną dokładnością i dla różnych punktów startowych (niekiedy bardzo odległych od szukanych pierwiastków) zebrane są w tabeli 5.4.

**Tabela 5.4. Wyniki obliczeń do przykładu 5.5**

$x_0$	-1.0		10.0		100.0	
dokładność	0.001	0.000001	0.001	0.000001	0.001	0.000001
liczba iteracji	4	5	6	7	10	11
	-0.635	-0.635	5.1	5.1	50.1	50.1
	-0.534	-0.543	2.74	2.74	25.02	25.02
	-0.537	-0.537	1.71	1.71	12.5	12.5
	-0.537	-0.5373	1.36	1.369	6,35	6,35
		-0.5372	1.31	1.317	3.33	3.33
			1.3159	1.3169	1.95	1.95
				1.3159	1.43	1.43
					1.32	1.32
					1.315	1.315
					1.3159	1.3159
						1.315973

# Przykłady do samodzielnego rozwiązania

Z tabeli 5.4 wynika, że osiągnięcie dokładności tysiąc razy większej wymaga wykonania tylko jednego kroku więcej. Warto zwrócić uwagę na to, że wartość kolejnego przybliżenia najbardziej zmienia się w pierwszych iteracjach. Wybór punktu startowego ma także znaczenie - np. dla  $x_0 = -1$  potrzeba 4 iteracji, zaś 11 iteracji dla  $x_0 = 100$ .

W wyniku przeprowadzonych obliczeń stwierdzono, że wartość pochodnej  $f'(x)$  począwszy od drugiej iteracji zmienia się nieznacznie. Z wyrażenia na  $h_k$  wynika, że pochodną  $f'(x)$  można obliczać z taką dokładnością względną, z jaką oblicza się  $f(x)$ . Można więc nie wyznaczać  $f'(x)$  w każdej iteracji. Znacznie przyspiesza to proces iteracyjny (szczególnie dla układów równań nieliniowych), nie wpływając znacząco na jego zbieżność.



# Przykłady do samodzielnego rozwiązania

Uproszczone wzory (5.8) przyjmują postać:

$$x_{k+1} = x_k + h_k, h_k = -\frac{f(x_k)}{f'(x_0)}, k = 0, 1, \dots \quad (5.11)$$

Jeśli poszukujemy pierwiastka równania (5.1) metodą Newtona w przedziale jego izolacji  $\langle a, b \rangle$ , to warunkiem koniecznym zbieżności jest, aby punkt startowy  $x_0$  znajdował się w tym przedziale. Metoda Newtona zapewnia zbieżność procesu iteracyjnego wtedy, gdy w przedziale izolacji pierwiastka pierwsza i druga pochodna funkcji  $f(x)$  nie zmieniają znaku (rys. 5.1a-5.1d).

Punkt startowy  $x_0$  należy wybierać następująco:

$x_0 = a$ ,      jeśli  $f(x)f'(x) < 0$  -przypadek b) i c),

$x_0 = b$ ,      jeśli  $f(x)f'(x) > 0$  -przypadek a) i d).

# Przykłady do samodzielnego rozwiązania

Zwiększenie czasu obliczeń lub niemożność znalezienia pierwiastka ma miejsce wówczas, gdy wybierzemy punkt początkowy:

$x_0 = b$ ,      jeśli  $f(x)f'(x) < 0$  - przypadek b) i c),

$x_0 = a$ ,      jeśli  $f(x)f'(x) > 0$  - przypadek a) i d).

Rys. 5.5 ilustruje przypadki niewłaściwego doboru punktu startowego  $x_0$  w metodzie Newtona, co może doprowadzić do znalezienia innego pierwiastka (rys. 5.5a) lub przerwać obliczenia na skutek znalezienia punktu  $x_1$  poza przedziałem określoności funkcji (rys. 5.5b) lub w nieskończoności (rys. 5.5c).

# Przykłady do samodzielnego rozwiązania

## Przykład 5.6.

Stosując różne wzory iteracyjne rozwiązać równanie  $x + \ln x = 0$ . Pokazać, że szybkość zbieżności zależy od zastosowanego wzoru.

### *Metoda Newtona*

Przyjmujemy:

- punkt startowy: 1,
- dokładność: 0.0001.

Znaleziony pierwiastek:  $x = 0.567143$ , liczba iteracji: 4.

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że najszybszą zbieżnością charakteryzuje się metoda Newtona, co jest zgodne z teorią.

# Układy równań nieliniowych

W celu rozwiązania układu  $n$  równań nieliniowych:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (5.12)$$

metodę Newtona-Raphsona uogólnia się na  $n$ -wymiarów.

Zbiór argumentów  $x_1, x_2, x_3, \dots$  rozpatrujemy jako  $n$  - wymiarowy wektor postaci:  $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ . Analogicznie zbiór funkcji  $f_1, f_2, f_3, \dots$  traktujemy jako  $n$ -wymiarowy wektor  $\mathbf{F} = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$ .

# Układy równań nieliniowych

Wtedy układ równań (5.12) można zapisać w postaci:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = 0, \quad (5.13)$$

zaś iteracyjny wzór Newtona-Raphsona przyjmie postać:

$$\begin{cases} \mathbf{J}(\mathbf{X}_{i+1})\mathbf{h} = -\mathbf{F}(\mathbf{X}_i) \\ \mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{X}_i + \mathbf{h} \end{cases}, \quad (5.14)$$

gdzie  $\mathbf{h}$  jest wektorem poprawki a  $\mathbf{J}(\mathbf{X})$  jest obliczoną dla  $\mathbf{X}$  *macierzą Jacobiego*:

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

# Układy równań nieliniowych

W przypadku układu równań problem zbieżności jest trudniejszy, niż w przypadku pojedynczego równania. Dlatego bardzo ważne jest dobre przybliżenie startowe.

Wzór (5.14) można też zapisać w postaci:

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}_i)(\mathbf{X}_{i+1} - \mathbf{X}_i) = -\mathbf{F}(\mathbf{X}_i). \quad (5.15)$$

Oznaczając  $\mathbf{Z}_{i+1} = (\mathbf{X}_{i+1} - \mathbf{X}_i)$  otrzymujemy:

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}_i)\mathbf{Z}_{i+1} = -\mathbf{F}(\mathbf{X}_i). \quad (5.16)$$

# Układy równań nieliniowych

Algorytm rozwiązywania układu jest następujący:

1. Dla przybliżenia zerowego  $\mathbf{X}_0$  obliczamy  $\mathbf{F}(\mathbf{X}_0)$  oraz  $\mathbf{J}(\mathbf{X}_0)$ .
2. Stosując dowolną metodę rozwiązywania równań liniowych (np. eliminacji Gaussa), rozwiązujemy układ (5.16), otrzymując poprawkę  $\mathbf{Z}_1$ .
3. Sprawdzamy, czy  $\mathbf{Z}_1$  spełnia narzucony warunek dokładności rozwiązania ( $\|\mathbf{Z}_i\| \leq \varepsilon$ ). Jeżeli tak, to przybliżenie zerowe jest rozwiązaniem. W przeciwnym przypadku przechodzimy do kroku czwartego.
4. Dodajemy poprawkę  $\mathbf{Z}_1$  do  $\mathbf{X}_0$  otrzymując  $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_0 + \mathbf{Z}_1$ .
5. Z nową wartością  $\mathbf{X}$  wracamy do kroku 1, obliczając kolejną poprawkę i nowe przybliżenie  $\mathbf{X}$ , tak długo aż zostanie spełniony warunek dokładności.

W przypadku braku zbieżności przerywamy wykonywanie algorytmu. Wskaźnikiem rozbieżności jest wzrost lub oscylacja  $\mathbf{Z}$  w kolejnych iteracjach. Zwykle wystarcza wykonanie niewielkiej liczby iteracji w celu zorientowania się, czy kontynuacja obliczeń jest celowa. Jeśli nie, to należy zadać nowe warunki początkowe lub zastosować inną metodę.

# Przykłady do samodzielnego rozwiązania

## Przykład 5.7.

Znaleźć dwa pierwsze przybliżenia rozwiązania układu równań postaci:

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_2^2 = 0,$$

$$f_2(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - 3 = 0.$$

Obliczenia wykonać z dokładnością  $eps=0.001$ . Jako przybliżenie początkowe przyjąć wektor:

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} 1,3 \\ 1,1 \end{bmatrix}.$$

Obliczamy  $\mathbf{F}(\mathbf{X}_0) = \begin{bmatrix} -0,73 \\ -0,14 \end{bmatrix}$ , a następnie tworzymy macierz Jacobiego:

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 2x_1 & -4x_2 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{bmatrix}.$$



# Przykłady do samodzielnego rozwiązania

Zatem:

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}_0) = \begin{bmatrix} 2,6 & -4,4 \\ 2,2 & 2,6 \end{bmatrix},$$

Rozwiązujemy układ równań (np. metodą eliminacji Gaussa):

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}_0)\mathbf{Z}_1 = -\mathbf{F}(\mathbf{X}_0), \text{ czyli: } \begin{bmatrix} 2,6 & 4,4 \\ 2,2 & 2,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -0,73 \\ -0,14 \end{bmatrix}$$

i otrzymujemy poprawkę  $\mathbf{Z}_1 = [h_0, h_1]^T = [0,1529 \quad -0,0755]$ .

Obliczamy:

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_0 + \mathbf{Z}_1 = \begin{bmatrix} 1,3 \\ 1,1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,1529 \\ -0,0755 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,4529 \\ 1,0245 \end{bmatrix}.$$

i sprawdzamy warunek zakończenia obliczeń:

$$\|\mathbf{Z}_1\| = 0.1706 > 0.001.$$

# Przykłady do samodzielnego rozwiązania

Kryterium końca nie jest jeszcze spełnione, wobec czego wykonujemy drugą iterację:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}_1) = \begin{bmatrix} 0,0120 \\ -0,0231 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}_1) = \begin{bmatrix} 2,9058 & -4,0978 \\ 2,0489 & 2,9058 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązujemy układ równań:

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}_1)\mathbf{Z}_2 = -\mathbf{F}(\mathbf{X}_1), \text{ czyli: } \begin{bmatrix} 2,9058 & -4,0978 \\ 2,0489 & 2,9058 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0,0120 \\ -0,0231 \end{bmatrix}$$

i otrzymujemy poprawkę  $\mathbf{Z}_2 = [h_0, h_1]^T = [0,0036 \ 0,0054]$ .

# Przykłady do samodzielnego rozwiązania

Obliczamy:

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_1 + \mathbf{Z}_2 = \begin{bmatrix} 1,4565 \\ 1,0299 \end{bmatrix}$$

i ponownie sprawdzamy warunek zakończenia obliczeń:

$$\|\mathbf{Z}_2\| = 0.0065 > 0.001.$$

Obliczenia kontynuujemy do momentu kiedy  $\|\mathbf{Z}_i\| < 0.001$ .

Dokładnym rozwiązaniem układu jest:

$$x_1 = \sqrt{\frac{3}{\sqrt{2}}} \approx 1,45648, \quad x_2 = \sqrt{\frac{3}{2\sqrt{2}}} \approx 1,02988.$$

Dziękuję za uwagę

