Операторы

Линейная зависимость и независимость векторов

Напомним, что если M – некоторое множество, элементы которого можно складывать и умножать на действительные числа, то выражение $\alpha_1 \cdot m_1 + \alpha_2 \cdot m_2 + \ldots + \alpha_k \cdot m_k$, где $m_1, m_2, \ldots, m_k \in M$, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ – некоторые действительные числа, называют ***линейной комбинацией*** элементов $m_1, m_2, \ldots, m_k$ с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$.

Если $m \in M$ и m является линейной комбинацией элементов $m_1, m_2, \ldots, m_k$, то есть

$$m = \alpha_1 \cdot m_1 + \alpha_2 \cdot m_2 + \ldots + \alpha_k \cdot m_k,$$

то говорят, что m ***линейно выражается*** через элементы $m_1, m_2, \ldots, m_k$ или ***разложен*** по элементам $m_1, m_2, \ldots, m_k$.

Пусть L – линейное пространство, $a_1, a_2, \ldots, a_k \in L$.

Определение. Говорят, что векторы $a_1, a_2, \ldots, a_k$ – ***линейно зависимы***, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, не все равные нулю одновременно, такие, что линейная комбинация $\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_k \cdot a_k$ равна нулевому элементу o линейного пространства L .

Если же равенство $\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_k \cdot a_k = o$ возможно только при условии $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$, то векторы $a_1, a_2, \ldots, a_k$ называют ***линейно независимыми***.

Лемма 2.1. *Векторы $a_1, a_2, \ldots, a_k$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из них линейно выражается через остальные.*

Пример 2.1. Рассмотрим матрицы

$$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{E}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$, $\mathbf{E}_4$ – линейно независимы, так как

$$\alpha_1\mathbf{E}_1 + \alpha_2\mathbf{E}_2 + \alpha_3\mathbf{E}_3 + \alpha_4\mathbf{E}_4 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix},$$

и, следовательно, если $\alpha_1\mathbf{E}_1 + \alpha_2\mathbf{E}_2 + \alpha_3\mathbf{E}_3 + \alpha_4\mathbf{E}_4 = \mathbf{O}$, то

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$ откуда

$$\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = 0,\ \alpha_4 = 0.$$

Пример 2.2. Рассмотрим многочлены $g_1(x)=1$, $g_2(x)=x$, $g_3(x)=x^2$, $g_4(x)=(1+x)^2$. Так как

$$(1+x)^2=1+2x+x^2,$$

то $g_4(x)$ является линейной комбинацией $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$:

$$g_4(x)=g_1(x)+2g_2(x)+g_3(x).$$

Согласно лемме 2.1 многочлены $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$, $g_4(x)$ – линейно зависимы.

Пример 2.3. Рассмотрим последовательности $a_1 = (2, -3, 1)$, $a_2 = (3, -1, 5)$, $a_3 = (1, -4, 3)$. Пусть $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = o$. Тогда

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 =$$
$$= (2\alpha_1,\ -3\alpha_1,\ \alpha_1) + (3\alpha_2,\ -\alpha_2,\ 5\alpha_2) + (\alpha_3,\ -4\alpha_3,\ 3\alpha_3) =$$
$$= (2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3,\ -3\alpha_1 - \alpha_2 - 4\alpha_3,\ \alpha_1 + 5\alpha_2 + 3\alpha_3) = (0,\ 0,\ 0)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ -3\alpha_1 - \alpha_2 - 4\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 5\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, векторы a_1, a_2, a_3 будут линейно независимыми, если $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ – единственное решение полученной системы, то есть если $r(\mathbf{A}) = n$, где $\mathbf{A}$ – основная матрица системы, n – число неизвестных.

В данном случае $|\mathbf{A}| = 35 \neq 0$, то есть система имеет единственное решение $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, следовательно, a_1, a_2, a_3 – линейно независимы.

Задача 2.4. Известно, что векторы некоторого линейного пространства x, y и z – линейно независимы. Будут ли линейно независимы следующие векторы:

а) $x - y$, $y - z$, $z - x$;

б) x, $x + y$, $x + y + z$.

Задача 2.4. Известно, что векторы некоторого линейного пространства x, y и z – линейно независимы. Будут ли линейно независимы следующие векторы:

а) $x-y$, $y-z$, $z-x$;

б) x, $x+y$, $x+y+z$.

Решение.

а) Заметим, что $x-y=-((y-z)+(z-x))$, то есть один из векторов является линейной комбинацией остальных. Тогда согласно лемме 2.1 векторы $x-y$, $y-z$, $z-x$ – линейно зависимые.

Задача 2.4. Известно, что векторы некоторого линейного пространства x, y и z – линейно независимы. Будут ли линейно независимы следующие векторы:

а) $x-y$, $y-z$, $z-x$;

б) x, $x+y$, $x+y+z$.

Решение.

б) Проверим, будут ли линейно зависимы векторы x, $x+y$, $x+y+z$. Для этого приравняем линейную комбинацию этих векторов нулевому вектору:

$$\alpha_1 x+\alpha_2(x+y)+\alpha_3(x+y+z)=o.$$

Если это равенство имеет место только при $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$, то векторы x, $x+y$, $x+y+z$ – линейно независимые. Если же это равенство возможно в случае, когда хотя бы один из коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ отличен от нуля, то векторы x, $x+y$, $x+y+z$ – линейно зависимые.

Преобразуем полученное равенство, учитывая, что выполняются условия 1 – 8 из определения линейного пространства:

$$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)x+(\alpha_2+\alpha_1)y+\alpha_3 z=o.$$

Так как векторы x, y и z – линейно независимые, то

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_3 = 0, \end{cases}$$

откуда следует, что $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$. Таким образом, векторы x, $x+y$, $x+y+z$ – линейно независимые.

Задача 2.5. Исследовать на линейную зависимость:

$$f_1(x) = x^2 + 5, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = 1.$$

Задача 2.5. Исследовать на линейную зависимость:

$$f_1(x) = x^2 + 5,\ \ f_2(x) = x^2,\ \ f_3(x) = 1.$$

Решение.

Заметим, что $f_1(x) = f_2(x) + 5f_3(x)$, то есть вектор $f_1(x)$ – линейная комбинация векторов $f_2(x)$ и $f_3(x)$. Тогда согласно лемме 2.1 $f_1(x) = x^2 + 5,\ \ f_2(x) = x^2,\ \ f_3(x) = 1.$– линейно зависимы.

Задача 2.6. Исследовать на линейную зависимость:

$$f_1(x) = x^2 + x, \;\; f_2(x) = x - 1, \;\; f_3(x) = 3.$$

Задача 2.6. Исследовать на линейную зависимость:

$$f_1(x) = x^2 + x,\ \ f_2(x) = x - 1,\ \ f_3(x) = 3.$$

Решение.

Пусть $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \alpha_3 f_3(x) = 0$. Тогда

$$\alpha_1(x^2 + x) + \alpha_2(x - 1) + \alpha_3 \cdot 3 = \alpha_1 x^2 + (\alpha_1 + \alpha_2)x + (-\alpha_2 + 3\alpha_3) = 0,$$

откуда получаем систему для нахождения коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:

$$\begin{cases} \alpha_1 & & & = & 0, \\ \alpha_1 & + & \alpha_2 & & = & 0, \\ & & -\alpha_2 & + & 3\alpha_3 & = & 0. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, откуда следует, что $f_1(x) = x^2 + x$, $f_2(x) = x - 1$, $f_3(x) = 3$ – линейно независимы.

Задача 2.7. Исследовать на линейную зависимость:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 2.7. Исследовать на линейную зависимость:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Пусть $\alpha_1\mathbf{A}_1 + \alpha_2\mathbf{A}_2 + \alpha_3\mathbf{A}_3 = \mathbf{O}$. Тогда

$$\alpha_1\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 & 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_2 + 2\alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда получаем систему для нахождения коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Чтобы определить, имеет ли эта система ненулевые решения, найдем ранг основной матрицы $\mathbf{A}$ этой системы:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}. \qquad \mathbf{A}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

У полученной матрицы три ненулевые строки, следовательно, ранг матрицы $\mathbf{A}$ равен 3.

Так как ранг матрицы равен количеству неизвестных, система имеет единственное решение $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$, откуда следует, что $\mathbf{A}_1=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_2=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_3=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ – линейно независимы.

Задача 2.8. Исследовать на линейную зависимость:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \ \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 2.8. Исследовать на линейную зависимость:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},\ \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},\ \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Пусть $\alpha_1\mathbf{A}_1 + \alpha_2\mathbf{A}_2 + \alpha_3\mathbf{A}_3 = \mathbf{O}$. Тогда

$$\alpha_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 & -2\alpha_2 + \alpha_3 \\ -2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\alpha_3 & 3\alpha_1 + 5\alpha_2 + 2\alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда получаем систему для нахождения коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ -2\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ -2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\alpha_3 = 0, \\ 3\alpha_1 + 5\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Найдем ранг основной матрицы $\mathbf{A}$ этой системы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -4 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -4 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

У полученной матрицы две ненулевые строки, следовательно, ранг матрицы $\mathbf{A}$ равен 2.

Так как ранг матрицы $\mathbf{A}$ меньше количества неизвестных, система имеет ненулевое решение, откуда следует, что $\mathbf{A}_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_2=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_3=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ – линейно зависимы.

Задача 2.10. Исследовать на линейную зависимость:

$$a_1 = (2, -3, 1), \; a_2 = (3, -1, 5), \; a_3 = (1, -4, 3).$$

Задача 2.10. Исследовать на линейную зависимость:

$$a_1 = (2, -3, 1),\ a_2 = (3, -1, 5),\ a_3 = (1, -4, 3).$$

Решение.

Пусть $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = o$ Тогда

$$\alpha_1(2, -3, 1) + \alpha_2(3, -1, 5) + \alpha_3(1, -4, 3) =$$
$$= (2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3, -3\alpha_1 - \alpha_2 - 4\alpha_3, \alpha_1 + 5\alpha_2 + 3\alpha_3) = (0, 0, 0),$$

откуда получаем систему для нахождения коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ -3\alpha_1 - \alpha_2 - 4\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 5\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Определитель основной матрицы этой системы

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 35.$$

Так как $|\mathbf{A}| \neq 0$, система имеет единственное решение $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Откуда следует, что $a_1 = (2, -3, 1)$, $a_2 = (3, -1, 5)$, $a_3 = (1, -4, 3)$ – линейно независимы.

Задача 2.11. Исследовать на линейную зависимость:

$$f_1(x) = 1,\ f_2(x) = \sin x,\ f_3(x) = \cos x.$$

Решение.

Пусть $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \alpha_3 f_3(x) = 0$. Тогда

$$\alpha_1 + \alpha_2 \sin x + \alpha_3 \cos x = 0.$$

Так как это равенство выполняется при любых x, возьмем

$$x = 0,\ x = \frac{\pi}{2} \text{ и } x = -\frac{\pi}{2}.$$

Тогда получаем

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \sin 0 + \alpha_3 \cos 0 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 \sin \dfrac{\pi}{2} + \alpha_3 \cos \dfrac{\pi}{2} = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 \sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + \alpha_3 \cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \alpha_2 = 0, \\ \alpha_3 = 0, \end{cases}$$

откуда следует, что $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \sin x$ и $f_3(x) = \cos x$ – линейно независимы.

Базис линейного пространства

Определение. Максимальная линейно независимая система векторов линейного пространства называется ***базисом*** этого линейного пространства.

Иначе говоря, векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ линейного пространства образуют его базис, если выполняются следующие два условия:

1) $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – линейно независимы;

2) $e_1, e_2, \ldots, e_n, a$ – линейно зависимы для любого вектора a этого линейного пространства.

Очевидно, что базис можно выбрать не единственным образом.

Например, если $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – базис, то для любого $\alpha \neq 0$ векторы $\alpha \cdot e_1, \alpha \cdot e_2, \ldots, \alpha \cdot e_n$ также образуют базис.

Однако справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. *Любые два базиса линейного пространства состоят из одного и того же числа векторов.*

Если в линейном пространстве L существует базис из n векторов, то пространство называют ***конечномерным***, а n называют ***размерностью линейного пространства*** (обозначают: $\dim L = n$).

Если в линейном пространстве L для любого натурального n можно найти линейно независимую систему, состоящую из n векторов, то пространство называют ***бесконечномерным*** (обозначают: $\dim L = \infty$).

Найдём базисы некоторых линейных пространств.

Пример 3.1. Линейное пространство $V^{(2)}$ свободных векторов плоскости имеет размерность $\dim V^{(2)} = 2$. Известно, что базисом векторов плоскости являются любые два неколлинеарных вектора этой плоскости.

Пример 3.2. Линейное пространство $V^{(3)}$ свободных векторов пространства имеет размерность $\dim V^{(3)} = 3$. В этом линейном пространстве базисом являются любые три некомпланарных вектора.

Пример 3.3. Арифметическое линейное пространство $\mathbb{R}^n$ также является конечномерным. Его размерность $\dim \mathbb{R}^n = n$. Базисом являются, например, векторы

$$e_1 = (1;\ 0;\ \ldots,\ 0),\quad e_2 = (0;\ 1;\ \ldots,\ 0),\quad \ldots,\quad e_n = (0;\ 0;\ \ldots,\ 1).$$

Будем называть этот базис ***стандартным базисом*** линейного пространства $\mathbb{R}^n$.

Легко проверить, что 1) эти векторы линейно независимые; 2) любой вектор $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$.

Пример 3.4. Линейное пространство $M(2\times 2, \mathbb{R})$ матриц второго порядка с элементами из $\mathbb{R}$ имеет размерность $\dim M(2\times 2, \mathbb{R}) = 4$. Его базисом являются, например, матрицы

$$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{E}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Действительно, 1) $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_4$ – линейно независимы (показали ранее); 2) $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_4, \mathbf{A}$ – линейно зависимы для любой матрицы $\mathbf{A} \in M(2\times 2, \mathbb{R})$, так как

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\mathbf{E}_1 + a_{12}\mathbf{E}_2 + a_{21}\mathbf{E}_3 + a_{22}\mathbf{E}_4.$$

Базис $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_4$ в дальнейшем будем называть ***стандартным базисом*** линейного пространства $M(2\times 2, \mathbb{R})$.

Пример 3.5. Обозначим через $\mathbb{R}^n[x]$ – линейное пространство многочленов, степень которых меньше n и имеющих коэффициенты из $\mathbb{R}$. Это линейное пространство имеет размерность $\dim \mathbb{R}^n[x] = n$. Его базисом являются, например, многочлены

$$f_0(x) = 1,\ f_1(x) = x,\ f_2(x) = x^2,\ \ldots,\ f_{n-1}(x) = x^{n-1}.$$

Будем называть этот базис ***стандартным базисом*** линейного пространства $\mathbb{R}^n[x]$.

Пример 3.6. Линейное пространство $\mathbb{R}[x]$ многочленов с коэффициентами из $\mathbb{R}$ является бесконечномерным: $\dim \mathbb{R}[x] = \infty$. Для любого натурального n многочлены

$$f_0(x) = 1,\ f_1(x) = x,\ f_2(x) = x^2,\ \ldots,\ f_{n-1}(x) = x^{n-1}$$

являются линейно независимыми.

Роль базиса характеризует следующая теорема.

Теорема 3.2 (о базисе). *Каждый вектор линейного пространства линейно выражается через любой его базис, причем единственным образом.*

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – базис, a – произвольный вектор. Тогда согласно теореме 3.2 о базисе, вектор a можно единственным образом представить в виде линейной комбинации базисных векторов:

$$a = \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \ldots + \alpha_n \cdot e_n .$$

При этом коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ называют ***координатами*** вектора a в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Пример 3.7. Матрица $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ имеет в стандартном базисе $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_4$ линейного пространства $M(2\times 2, \mathbb{R})$ координаты $1, -2, -3, 4$. Действительно,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-2)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-3)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 4\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{E}_1 - 2\mathbf{E}_2 - 3\mathbf{E}_3 + 4\mathbf{E}_4.$$

Теорема 3.3. 1) *Если вектор a имеет в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ координаты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, а вектор b имеет в том же базисе координаты $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, то вектор $a+b$ будет иметь в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ координаты $\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \ldots, \alpha_n+\beta_n$.*

2) *Если вектор a имеет в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ координаты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, то для любого числа $\lambda \in \mathbb{R}$ вектор λa будет иметь в том же базисе координаты $\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_n$.*

Задача 3.8. Найти координаты вектора $x = (2, 3, 5) \in \mathbb{R}^3$

1) в стандартном базисе этого линейного пространства;

2) в базисе $b_1 = (0, 0, 10)$, $b_2 = (2, 0, 0)$, $b_3 = (0, 1, 0)$.

Решение.

1) Стандартный базис линейного пространства $\mathbb{R}^3$ образуют векторы

$$e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1).$$

Тогда

$$x = (2, 3, 5) = (2, 0, 0) + (0, 3, 0) + (0, 0, 5) =$$
$$2 \cdot (1, 0, 0) + 3 \cdot (0, 1, 0) + 5 \cdot (0, 0, 1) = 2e_1 + 3e_2 + 5e_3,$$

то есть координатами вектора x в стандартном базисе являются $2, 3, 5$.

2) Разложим вектор $x = (2, 3, 5)$ по базису $b_1 = (0, 0, 10)$, $b_2 = (2, 0, 0)$, $b_3 = (0, 1, 0)$.

$$x = (2, 3, 5) = \frac{1}{2} \cdot (0, 0, 10) + (2, 0, 0) + 3 \cdot (0, 1, 0) = \frac{1}{2} b_1 + b_2 + 3b_3,$$

то есть координатами вектора x в базисе $b_1 = (0, 0, 10)$, $b_2 = (2, 0, 0)$, $b_3 = (0, 1, 0)$ являются $\frac{1}{2}, 1, 3$.

Задача 3.9. Найти координаты вектора $3x^2 - 2x + 2 \in \mathbb{R}^3[x]$

1) в стандартном базисе этого линейного пространства;

2) в базисе x^2, $x - 1$, 1.

Задача 3.9. Найти координаты вектора $3x^2 - 2x + 2 \in \mathbb{R}^3[x]$

1) в стандартном базисе этого линейного пространства;

2) в базисе x^2, $x-1$, 1.

Решение.

1) Стандартный базис линейного пространства $\mathbb{R}^3[x]$ образуют векторы

$$e_1 = 1,\ e_2 = x,\ e_3 = x^2.$$

Тогда

$$3x^2 - 2x + 2 = 2\cdot 1 - 2\cdot x + 3\cdot x^2 = 2e_1 - 2e_2 + 3e_3,$$

то есть координатами вектора $3x^2 - 2x + 2$ в стандартном базисе являются $2, -2, 3$.

Задача 3.9. Найти координаты вектора $3x^2 - 2x + 2 \in \mathbb{R}^3[x]$

1) в стандартном базисе этого линейного пространства;

2) в базисе x^2, $x-1$, 1.

Решение.

2) Разложим вектор $3x^2 - 2x + 2$ по базису x^2, $x-1$, 1.

$$3x^2 - 2x + 2 = 3 \cdot x^2 - 2(x-1) + 0 \cdot 1,$$

то есть координатами вектора $3x^2 - 2x + 2$ в базисе x^2, $x-1$, 1 являются $3, -2, 0$.

Задача 3.10. Найти координаты вектора $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$

1) в стандартном базисе этого линейного пространства;

2) в базисе $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 3.10. Найти координаты вектора $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M(2\times 2, \mathbb{R})$

1) в стандартном базисе этого линейного пространства;

2) в базисе $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

1) Стандартный базис линейного пространства $M(2\times 2, \mathbb{R})$ образуют векторы

$$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{E}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 1\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-1)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}_1 + 2\mathbf{E}_2 + (-1)\mathbf{E}_3 + 0\cdot\mathbf{E}_4,$$

то есть координатами вектора $\mathbf{X}$ в стандартном базисе являются $1, 2, -1, 0$.

Задача 3.10. Найти координаты вектора $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M(2\times 2, \mathbb{R})$

1) в стандартном базисе этого линейного пространства;

2) в базисе $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Разложим вектор $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ по базису $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-1)\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + (-1)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 + 0\cdot\mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_4,$$

то есть координатами вектора $\mathbf{X}$ в базисе $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4$ являются $1, -1, 0, -1$.

Задача 3.11. Найти размерность линейного пространства диагональных матриц третьего порядка.

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Покажем, что одним из базисов этого линейного пространства является система векторов

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко показать, что $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3$ – линейно независимы, и если $\mathbf{A}$ – диагональная матрица третьего порядка, то

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= a_1\mathbf{B}_1 + a_2\mathbf{B}_2 + a_3\mathbf{B}_3 .$$

Таким образом, $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3$ – максимальная линейно независимая система, то есть базис линейного пространства диагональных матриц третьего порядка.

Так как размерность конечномерного линейного пространства – это количество векторов в базисе, то размерность линейного пространства диагональных матриц третьего порядка равна 3.

Задача 3.12. Найти размерность линейного пространства матриц второго порядка с нулевым первым столбцом;

Задача 3.12. Найти размерность линейного пространства матриц второго порядка с нулевым первым столбцом;

Решение.

Покажем, что одним из базисов этого линейного пространства является система векторов

$$\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко показать, что $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$ – линейно независимы, и если $\mathbf{A}$ – матрица второго порядка с нулевым первым столбцом, то

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a_1\mathbf{C}_1 + a_2\mathbf{C}_2 .$$

Таким образом, $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$ – максимальная линейно независимая система, то есть базис линейного пространства матриц второго порядка с нулевым первым столбцом. Размерность этого пространства равна 2.

Задача 3.16. Доказать, что система векторов $f_1(x) = 2x^2 + 3x + 1$, $f_2(x) = -3x^2 + 2x + 4$, $f_3(x) = x^2 - x - 5$ образует базис линейного пространства $\mathbb{R}^3[x]$.

Задача 3.16. Доказать, что система векторов $f_1(x) = 2x^2 + 3x + 1$, $f_2(x) = -3x^2 + 2x + 4$, $f_3(x) = x^2 - x - 5$ образует базис линейного пространства $\mathbb{R}^3[x]$.

Решение.

Так как $\dim \mathbb{R}^3[x] = 3$, достаточно показать, что $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ – линейно независимы.

Аналогично предыдущему примеру получаем систему

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 4\alpha_2 - 5\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Определитель основной матрицы этой системы

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -5 \end{vmatrix} = -44 \neq 0,$$

то есть система имеет единственное решение $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Таким образом, $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ – линейно независимы, следовательно, образуют базис линейного пространства $\mathbb{R}^3[x]$.

Задача 3.17. Доказать, что система векторов $a_1 = (2, 1, -3)$, $a_2 = (3, 2, -5)$, $a_3 = (1, -1, 1)$ образует базис линейного пространства $\mathbb{R}^3$.

Решение.

Так как $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, достаточно показать, что a_1, a_2, a_3 – линейно независимы.

Пусть

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = \alpha_1 (2, 1, -3) + \alpha_2 (3, 2, -5) + \alpha_3 (1, -1, 1) =$$
$$= (2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3, -3\alpha_1 - 5\alpha_2 + \alpha_3) = (0, 0, 0) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ -3\alpha_1 - 5\alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Определитель основной матрицы этой системы

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

то есть система имеет единственное решение $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Таким образом, a_1, a_2, a_3 – линейно независимы и, следовательно, образуют базис линейного пространства $\mathbb{R}^3$.

4. Связь между координатами вектора в различных базисах

Теорема 4.1. *Пусть* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *и* $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ *– два базиса линейного пространства* L *. Причем имеют место равенства:*

$$\begin{array}{ccccccccc} e_1' & = & t_{11}e_1 & + & t_{21}e_2 & + & \ldots & + & t_{n1}e_n, \\ e_2' & = & t_{12}e_1 & + & t_{22}e_2 & + & \ldots & + & t_{n2}e_n, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e_n' & = & t_{1n}e_1 & + & t_{2n}e_2 & + & \ldots & + & t_{nn}e_n. \end{array}$$

Если вектор a *имеет в базисе* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *координаты* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$*, а в базисе* $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ *– координаты* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$*, то справедливо равенство*

$$\mathbf{A} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{B}, \text{ где}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \ldots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \ldots & t_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{n1} & t_{n2} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Составленную таким образом матрицу $\mathbf{T}$ называют ***матрицей перехода*** от базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ к базису $e_1', e_2', \ldots, e_n'$.

$$\mathbf{A} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{B}, \ \textit{где}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Замечания. 1) Столбцы матрицы $\mathbf{T}$ – это координаты векторов $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$. Но $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ – это базис, то есть линейно независимая система. Таким образом, столбцы матрицы $\mathbf{T}$ – линейно независимы. Тогда согласно критерию равенства нулю определителя, $|\mathbf{T}| \neq 0$.

2) Найдём теперь матрицу перехода от базиса $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ к базису $e_1, e_2, \dots, e_n$. Имеем $\mathbf{A} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{B}$. Тогда $\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}$, то есть $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A}$. Таким образом, если $\mathbf{T}$ – это матрица перехода от базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ к базису $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$, то $\mathbf{T}^{-1}$ – это матрица перехода от базиса $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ к базису $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Рассмотрим в качестве примера следующую задачу.

Пример 4.1. Вектор x в стандартном базисе линейного пространства $\mathbb{R}^2$ имеет координаты 2, 3. Найти его координаты в базисе $c_1 = (4, 3)$, $c_2 = (5, 4)$.

Стандартный базис линейного пространства $\mathbb{R}^2$ образуют векторы $e_1 = (1, 0)$ и $e_2 = (0, 1)$.

Найдём матрицу перехода от базиса e_1, e_2 к базису c_1, c_2:

$$\begin{matrix} c_1 = 4e_1 + 3e_2 \\ c_2 = 5e_1 + 4e_2 \end{matrix} \;\Rightarrow\; \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Можно найти, что $\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, тогда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Координатами вектора x в базисе c_1, c_2 будут –7 и 6, то есть $x = -7c_1 + 6c_2$.

Задача 4.2. Найти в базисе $f_1(x) = x - 3$, $f_2(x) = 2x - 5$ линейного пространства $\mathbb{R}^2[x]$ координаты вектора $g(x) = x - 4$.

Решение.

Решим эту задачу двумя способами.

Способ 1.

Пусть $g(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$. Тогда

$$x - 4 = \alpha_1(x-3) + \alpha_2(2x-5) = (\alpha_1 + 2\alpha_2)x + (-3\alpha_1 - 5\alpha_2) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -3\alpha_1 - 5\alpha_2 = -4, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 1. \end{cases}$$

Решим эту систему методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\alpha_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-3}{-1} = 3, \quad \alpha_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{-1} = -1.$$

Таким образом, координатами вектора $g(x)$ в базисе $f_1(x), f_2(x)$ являются $3, -1$, то есть $g(x) = 3f_1(x) - f_2(x)$.

Способ 2.

Пусть $g(x)=\alpha_1 f_1(x)+\alpha_2 f_2(x)$. Обозначим через $\mathbf{B}$ – столбец координат вектора $g(x)$ в базисе $f_1(x), f_2(x)$ и через $\mathbf{A}$ – столбец координат вектора $g(x)$ в стандартном базисе $1, x$ линейного пространства $\mathbb{R}^2[x]$. Тогда

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix},\quad \mathbf{A}=\begin{pmatrix}-4\\ 1\end{pmatrix}.$$

Согласно теореме 4.1

$$\mathbf{A}=\mathbf{T}\cdot\mathbf{B},$$

где $\mathbf{T}$ – матрица перехода от базиса $1, x$ к базису $f_1(x), f_2(x)$. Первый столбец матрицы $\mathbf{T}$ – это координаты вектора $f_1(x)$ в базисе $1, x$, второй столбец – координаты вектора $f_2(x)$ в базисе $1, x$. Так как

$$f_1(x)=-3\cdot 1+1\cdot x,\quad f_2(x)=-5\cdot 1+2\cdot x,$$

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix}-3 & -5\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Из равенства $\mathbf{A} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{B}$ следует, что

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A}.$$

Найдем $\mathbf{T}^{-1}$. Для этого найдем алгебраические дополнения для каждого из элементов матрицы $\mathbf{T}$:

$T_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 2 = 2, \qquad T_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 1 = -1,$

$T_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-5) = 5, \quad T_{22} = (-1)^{2+2} \cdot (-3) = -3.$

Тогда

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{S}^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{T}|} \cdot \mathbf{S}^T = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Получаем, что

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, координатами вектора $g(x)$ в базисе $f_1(x), f_2(x)$ являются $3, -1$, то есть $g(x) = 3 f_1(x) - f_2(x)$.

Задача 4.3. Найти в базисе $f_1(x) = 2x^2 + 3x + 1$, $f_2(x) = -3x^2 + 2x + 4$, $f_3(x) = x^2 - x - 5$ линейного пространства $\mathbb{R}^3[x]$ координаты вектора $g(x) = 4x^2 + x - 9$.

Задача 4.3. Найти в базисе $f_1(x)=2x^2+3x+1$, $f_2(x)=-3x^2+2x+4$, $f_3(x)=x^2-x-5$ линейного пространства $\mathbb{R}^3[x]$ координаты вектора $g(x)=4x^2+x-9$.

Решение.

Пусть $g(x)=\alpha_1 f_1(x)+\alpha_2 f_2(x)+\alpha_3 f_3(x)$. Найдем координаты $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, применяя второй способ из предыдущей задачи.

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix},\quad \mathbf{A}=\begin{pmatrix}-9\\ 1\\ 4\end{pmatrix},\quad \mathbf{T}=\begin{pmatrix}1 & 4 & -5\\ 3 & 2 & -1\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}.$$

$$|\mathbf{T}|=44,\quad \mathbf{S}=\begin{pmatrix}-1 & -5 & -13\\ 11 & 11 & 11\\ 6 & -14 & -10\end{pmatrix}\quad\Rightarrow$$

$$\mathbf{T}^{-1}=\frac{\mathbf{1}}{|\mathbf{T}|}\cdot\mathbf{S}^T=\frac{1}{44}\begin{pmatrix}-1 & 11 & 6\\ -5 & 11 & -14\\ -13 & 11 & -10\end{pmatrix}\quad\Rightarrow$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{44}\begin{pmatrix} -1 & 11 & 6 \\ -5 & 11 & -14 \\ -13 & 11 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, координатами вектора $g(x)$ в базисе $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ являются $1, 0, 2$, то есть $g(x) = f_1(x) + 2f_3(x)$.

Задача 4.4. Найти в базисе $a_1 = (2, 1, -3)$, $a_2 = (3, 2, -5)$, $a_3 = (1, -1, 1)$ пространства $\mathbb{R}^3$ координаты вектора $b = (6, 2, -7)$.

Задача 4.4. Найти в базисе $a_1 = (2, 1, -3)$, $a_2 = (3, 2, -5)$, $a_3 = (1, -1, 1)$ пространства $\mathbb{R}^3$ координаты вектора $b = (6, 2, -7)$.

Решение.

Пусть $b = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$. Найдем координаты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, применяя способ 1 из задачи 4.2.

$$(6, 2, -7) = \alpha_1 (2, 1, -3) + \alpha_2 (3, 2, -5) + \alpha_3 (1, -1, 1) =$$
$$= (2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3, -3\alpha_1 - 5\alpha_2 + \alpha_3) = (0, 0, 0) \quad \Rightarrow$$
$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 6, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 2, \\ -3\alpha_1 - 5\alpha_2 + \alpha_3 = -7. \end{cases}$$

Решим эту систему методом Крамера: $\alpha_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 1$, $\alpha_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = 1$, $\alpha_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = 1$.

Таким образом, координатами вектора b в базисе a_1, a_2, a_3 являются $1, 1, 1$, то есть $b = a_1 + a_2 + a_3$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.5. Найти в базисе $a_1 = (1, 1), a_2 = (2, -1)$ линейного пространства $\mathbb{R}^2$ координаты вектора $b = (2,-4)$.

Задача 4.6. Найти в базисе $f_1(x) = 2x^2 + 2x - 1$, $f_2(x) = 2x^2 - x + 2$, $f_3(x) = -x^2 + 2x + 2$ линейного пространства $\mathbb{R}^3[x]$ координаты вектора $g(x) = x^2 + x + 1$.

Задача 4.7. Найти в базисе $\overline{\mathbf{p}} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, $\overline{\mathbf{q}} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ линейного пространства $V^{(2)}$ (линейного пространства свободных векторов плоскости) координаты вектора $\overline{\mathbf{a}} = 9\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$.

Задача 4.8. Найти в базисе $\overline{\mathbf{p}} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\overline{\mathbf{q}} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\overline{\mathbf{r}} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ линейного пространства $V^{(3)}$ (линейного пространства свободных векторов пространства) координаты вектора $\overline{\mathbf{c}} = 11\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$.

5. Подпространства линейного пространства

Определение. Множество L называется ***линейным пространством над*** $\mathbb{R}$ или ***вещественным линейным пространством***, если выполняются следующие условия:

1) $a+b=b+a$ для любых $a,b\in L$;
2) $(a+b)+c=a+(b+c)$ для любых $a,b,c\in L$;
3) во множестве L существует элемент o, называемый ***нулевым элементом***, такой, что $a+o=a$ для любого $a\in L$;
4) для каждого элемента $a\in L$ существует элемент $-a\in L$, называемый ***противоположным*** элементу a, такой, что $a+(-a)=o$;
5) $\alpha(\beta a)=(\alpha\beta)a$ для любых $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ и любого $a\in L$;
6) $(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a$ для любых $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ и любого $a\in L$;
7) $\alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b$ для любого $\alpha\in\mathbb{R}$ и любых $a,b\in L$;
8) $1a=a$ для любого $a\in L$.

Пусть L – вещественное линейное пространство, L_1 – непустое подмножество L.

Определение. Множество L_1 называют ***подпространством линейного пространства*** L, если оно образует линейное пространство относительно операций, определенных на L.

Рассмотрим примеры линейных подпространств.

Пример 5.1. Линейное пространство $V^{(2)}$ свободных векторов плоскости является подпространством линейного пространства $V^{(3)}$ свободных векторов пространства.

Пример 5.2. Линейное пространство $\mathbb{R}^n[x]$ является подпространством линейного пространства $\mathbb{R}[x]$ всех многочленов.

Для того чтобы показать, что множество является линейным подпространством некоторого линейного пространства, приходится показывать, что оно само является линейным пространством, то есть проверять, выполняются ли все восемь условий из определения линейного пространства. Следующая теорема позволяет значительно уменьшить количество проверяемых условий.

Теорема 5.1 (критерий подпространства). *Пусть* L *– вещественное линейное пространство,* L_1 *– непустое подмножество* L. *Множество* L_1 *является подпространством линейного пространства* L *тогда и только тогда, когда для любых элементов* $a, b \in L_1$ *и любого* $\alpha \in \mathbb{R}$ *выполняются условия:*

$$1)\ a - b \in L_1;$$

$$2)\ \alpha \cdot a \in L_1.$$

Рассмотрим, как применяется критерий подпространства на следующем примере.

Пример 5.3. Пусть M – множество решений системы линейных однородных уравнений с n неизвестными. Покажем, что это множество является вещественным линейным пространством.

Для этого покажем, что оно является подпространством $\mathbb{R}^n$. По свойству решений системы линейных однородных уравнений линейная комбинация решений также является решением этой системы. Следовательно, для любых решений $a, b \in M$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$ $a - b \in M$ и $\alpha \cdot a \in M$. Тогда согласно критерию подпространства, M – подпространство $\mathbb{R}^n$, то есть само является линейным пространством.

Задача 5.4. Являются ли следующие множества подпространствами линейного пространства $\mathbb{R}_5[x]$:

1) B_1 – множество четных многочленов, степень которых меньше 5;

2) B_2 – множество многочленов третьей степени;

3) $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел?

Решение.

1) Множество B_1 (множество четных многочленов, степень которых меньше 5) является подмножеством множества $\mathbb{R}_5[x]$, которое является линейным пространством. Воспользуемся критерием подпространства.

Пусть $g_1(x), g_2(x) \in B_1$. Тогда

$$g_1(x) = a_1x^4 + b_1x^2 + c_1, \quad g_2(x) = a_2x^4 + b_2x^2 + c_2,$$

$$g_1(x) - g_2(x) = (a_1 - a_2)x^4 + (b_1 - b_2)x^2 + (c_1 - c_2),$$

то есть $g_1(x) - g_2(x) \in B_1$.

Пусть $g(x) \in B_1$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\alpha \cdot g(x) = \alpha \cdot (ax^4 + bx^2 + c) = (\alpha \cdot a)x^4 + (\alpha \cdot b)x^2 + (\alpha \cdot c),$$

то есть $\alpha \cdot g(x) \in B_1$.

Таким образом, согласно критерию подпространства, B_1 является подпространством линейного пространства $\mathbb{R}_5[x]$.

2) Множество B_2 (множество многочленов третей степени) является подмножеством множества $\mathbb{R}_5[x]$, которое является линейным пространством. Воспользуемся критерием подпространства.

Пусть $g_1(x) = x^3 + x$, $g_2(x) = x^3 + 1$. Тогда

$$g_1(x) - g_2(x) = x - 1,$$

то есть $g_1(x) - g_2(x) \notin B_2$.

Таким образом, согласно критерию подпространства, B_2 не является подпространством линейного пространства $\mathbb{R}_5[x]$.

3) Множество $\mathbb{R}$ является подмножеством множества $\mathbb{R}_5[x]$, которое является линейным пространством. Воспользуемся критерием подпространства.

Пусть $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$. Тогда $a - b \in \mathbb{R}$ и $\alpha \cdot a \in \mathbb{R}$.

Таким образом, согласно критерию подпространства, $\mathbb{R}$ является подпространством линейного пространства $\mathbb{R}_5[x]$.

Задача 5.5. Образуют ли следующие множества матриц линейные пространства, если сложение и умножение матриц на число производится стандартным образом (то есть поэлементно):

1) M_1 – множество матриц второго порядка с нулевой первой строкой;

2) M_2 – множество диагональных матриц третьего порядка;

3) M_3 – множество вырожденных матриц третьего порядка (матриц, у которых определитель равен нулю)?

Решение.

1) Множество M_1 (множество матриц второго порядка с нулевой первой строкой) является подмножеством множества $M(2\times 2,\mathbb{R})$, которое является линейным пространством. Воспользуемся критерием подпространства.

Пусть $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_1$. Тогда

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \end{pmatrix},$$

то есть $\mathbf{A} - \mathbf{B} \in M_1$.

Пусть $\mathbf{A} \in M_1$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\alpha \cdot \mathbf{A} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} \end{pmatrix},$$

то есть $\alpha \cdot \mathbf{A} \in M_1$.

Таким образом, согласно критерию подпространства, M_1 является подпространством линейного пространства $M(2 \times 2, \mathbb{R})$, то есть само является линейным пространством.

Задача 5.6. Найти размерность и один из базисов линейного пространства решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Задача 5.7. Проверить, являются ли следующие множества подпространствами линейного пространства $M(2\times 2,\mathbb{R})$:

1) M_1 – множество матриц, имеющих вид

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},\ \text{где } a,b,c\in\mathbb{R};$$

2) M_2 – множество матриц второго порядка, у которых главная диагональ состоит из 1;

3) M_3 – множество матриц, имеющих вид

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix},\ \text{где } b\in\mathbb{R}.$$

Задача 5.8. Образуют ли следующие множества числовых последовательностей линейные пространства, если сложение и умножение последовательностей на число производится стандартным образом (то есть поэлементно):

1) M_1 – множество последовательностей $(a_1, a_2, \ldots, a_8)$, у которых $a_2 = a_4 = a_6 = a_8 = 0$;

2) M_2 – множество последовательностей $(a_1, a_2, \ldots, a_5)$, у которых $a_1 = a_5$;

3) M_3 – множество последовательностей (a_1, a_2, a_3, a_4) целых чисел?

Задача 5.9. Найти размерность и один из базисов линейного пространства решений системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Задача 5.6. Найти размерность и один из базисов линейного пространства решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение.

Базисом линейного пространства решений системы линейных однородных уравнений является любая из её фундаментальных систем решений. Найдем одну из них.

Приведем основную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3x_3, \\ 5x_2 = -7x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 1.4x_3, \\ x_1 = 3x_3 - 2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0.2x_3, \\ x_2 = 1.4x_3. \end{cases}$$

Таким образом, фундаментальная система решений состоит из одного решения, например,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix},$$

которое и является базисом линейного пространства решений исходной системы. Размерность этого линейного пространства равна 1.

6. Линейные операторы

Пусть $L^{(n)}$ – линейное пространство размерности n.

Определение. Отображение f линейного пространства $L^{(n)}$ в $L^{(n)}$ (то есть в само себя) называется ***линейным оператором*** этого линейного пространства, если для любых $x, y \in L^{(n)}$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$ выполняются следующие два условия:

1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$;
2) $f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x)$.

Замечание. Из второго условия определения линейного оператора и леммы 1.1 следует, что

$$f(o) = f(0 \cdot x) = 0 \cdot f(x) = o\,.$$

Рассмотрим примеры линейных операторов.

Пример 6.1. Пусть $f(x) = o$ для любого $x \in L^{(n)}$ (o – нулевой элемент линейного пространства $L^{(n)}$). Тогда для любых $x, y \in L^{(n)}$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f(x+y) = o = o + o = f(x) + f(y),$$
$$f(\alpha \cdot x) = o = \alpha \cdot o = \alpha \cdot f(x),$$

то есть отображение f является линейным оператором. Этот оператор называют ***нулевым оператором***, будем обозначать его O.

Пример 6.2. Пусть $f(x) = x$ для любого $x \in L^{(n)}$. Тогда для любых $x, y \in L^{(n)}$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f(x+y) = x + y = f(x) + f(y),$$
$$f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot x = \alpha \cdot f(x),$$

то есть отображение f является линейным оператором. Этот оператор называют ***тождественным оператором***, будем обозначать его J.

Пример 6.3. Рассмотрим линейное пространство $V^{(3)}$ (свободных векторов в пространстве). Пусть k – некоторое действительное число, отличное от нуля, и пусть $f(x) = k \cdot x$ для любого $x \in V^{(3)}$. Тогда для любых $x, y \in L^{(n)}$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f(x+y) = k \cdot (x+y) = k \cdot x + k \cdot y = f(x) + f(y),$$

$$f(\alpha \cdot x) = k \cdot (\alpha \cdot x) = \alpha \cdot (k \cdot x) = \alpha \cdot f(x),$$

то есть отображение f является линейным оператором. Этот оператор называют ***оператором*** подобия.

Задача 6.4. Проверить, является ли отображение f линейным оператором линейного пространства $\mathbb{R}^3$, если для любого $x=(x_1, x_2, x_3)\in\mathbb{R}^3$

$$f(x)=(x_2, x_3, x_1+2x_2).$$

Решение.

Отображение f является линейным оператором линейного пространства $\mathbb{R}^3$, если для любых $x, y\in\mathbb{R}^3$ и любого $\alpha\in\mathbb{R}$ выполняются следующие два условия:

$$f(x+y)=f(x)+f(y),$$
$$f(\alpha x)=\alpha f(x).$$

Проверим, выполняется ли первое условие. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Тогда

$$
\begin{aligned}
f(x+y) &= f((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)) = \\
&= f((x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)) = \\
&= (x_2 + y_2, x_3 + y_3, (x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2)),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) + f(y) &= f((x_1, x_2, x_3)) + f((y_1, y_2, y_3)) = \\
&= (x_2, x_3, x_1 + 2x_2) + (y_2, y_3, y_1 + 2y_2) = \\
&= (x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_1 + 2x_2 + y_1 + 2y_2) = \\
&= (x_2 + y_2, x_3 + y_3, (x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2),
\end{aligned}
$$

следовательно, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Проверим, выполняется ли второе условие. Пусть $x=(x_1, x_2, x_3)\in\mathbb{R}^3$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Тогда

$$\begin{aligned} f(\alpha x) &= f(\alpha(x_1, x_2, x_3)) = f((\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)) = \\ &= (\alpha x_2, \alpha x_3, \alpha x_1 + 2\alpha x_2), \\ \alpha f(x) &= \alpha f((x_1, x_2, x_3)) = \alpha(x_2, x_3, x_1 + 2x_2) = \\ &= (\alpha x_2, \alpha x_3, \alpha x_1 + 2\alpha x_2), \end{aligned}$$

следовательно, $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Таким образом, f – линейный оператор линейного пространства $\mathbb{R}^3$.

Задача 6.5. Проверить, является ли отображение f линейным оператором линейного пространства $\mathbb{R}^2$, если для любого $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x) = (x_2 + x_1, 2x_1 + x_2).$$

Задача 6.5. Проверить, является ли отображение f линейным оператором линейного пространства $\mathbb{R}^2$, если для любого $x=(x_1, x_2)\in\mathbb{R}^2$

$$f(x)=(x_2+x_1, 2x_1+x_2).$$

Решение.

Пусть $x=(x_1, x_2)$, $y=(y_1, y_2)\in\mathbb{R}^2$. Тогда

$$f(x+y)=f((x_1+y_1, x_2+y_2))=$$
$$=((x_2+y_2)+(x_1+y_1), 2(x_1+y_1)+(x_2+y_2))=$$
$$=(x_2+y_2+x_1+y_1, 2x_1+2y_1+x_2+y_2),$$
$$f(x)+f(y)=(x_2+x_2, 2x_1+x_2)+(y_2+y_2, 2y_1+y_2)=$$
$$=(x_2+y_2+x_1+y_1, 2x_1+2y_1+x_2+y_2),$$

следовательно, $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

Пусть $x=(x_1, x_2)\in\mathbb{R}^2$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Тогда

$$f(\alpha x)=f((\alpha x_1, \alpha x_2))=(\alpha x_2+\alpha x_1, 2\alpha x_1+\alpha x_2),$$
$$\alpha f(x)=\alpha(x_2+x_1, 2x_1+2x_1)=(\alpha x_2+\alpha x_1, 2\alpha x_1+\alpha x_2)$$

следовательно, $f(\alpha x)=\alpha f(x)$.

Таким образом, f – линейный оператор линейного пространства $\mathbb{R}^2$.

Задача 6.6. Проверить, является ли отображение f линейным оператором линейного пространства $\mathbb{R}^3$, если для любого $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$$f(x) = (x_1, x_2, x_3 + 1).$$

Решение.

Если $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$, то

$$f(\alpha x) = f((\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3 + 1),$$

$$\alpha f(x) = \alpha(x_1, x_2, x_3 + 1) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3 + \alpha),$$

следовательно, $f(\alpha x) \neq \alpha f(x)$ при $\alpha \neq 1$.

Таким образом, f не является линейным оператором линейного пространства $\mathbb{R}^3$.

Задача 6.7. Проверить, является ли отображение f линейным оператором линейного пространства $\mathbb{R}^2$, если для любого $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x) = (x_1, x_2^2).$$

Решение.

Заметим, что если $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, то

$$f(x+y) = f((x_1 + y_1, x_2 + y_2)) = (x_1 + x_2, (x_2 + y_2)^2) =$$
$$= (x_1 + x_2, x_2^2 + y_2^2 + 2x_2 y_2),$$

$$f(x) + f(y) = (x_1, x_2^2) + (y_1, y_2^2) = (x_1 + x_2, x_2^2 + y_2^2),$$

следовательно, $f(x+y) \neq f(x) + f(y)$ при $x_2 y_2 \neq 0$.

Таким образом, f не является линейным оператором линейного пространства $\mathbb{R}^2$.

Задача 6.8. Проверить, является ли отображение f линейным оператором линейного пространства $\mathbb{R}^3[x]$, если для любого $g(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}^3[x]$

$$f(g(x)) = bx + c.$$

Решение.

Пусть $g_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$, $g_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2 \in \mathbb{R}^3[x]$. Тогда

$$f(g_1(x) + g_2(x)) = f(a_1x^2 + b_1x + c_1 + a_2x^2 + b_2x + c_2) =$$
$$= f((a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)) =$$
$$= (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2),$$

$$f(g_1(x)) + f(g_2(x)) = b_1x + c_1 + b_2x + c_2 = (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2),$$

следовательно, $f(g_1(x) + g_2(x)) = f(g_1(x)) + f(g_2(x))$.

Пусть $g(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}^3[x]$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда

$$f(\alpha g(x)) = f(\alpha(ax^2 + bx + c)) = f(\alpha ax^2 + \alpha bx + \alpha c) = \alpha bx + \alpha c,$$

$$\alpha f(g(x)) = \alpha(bx + c) = \alpha bx + \alpha c,$$

следовательно, $f(\alpha g(x)) = \alpha f(g(x))$.

Таким образом, f – линейный оператор линейного пространства $\mathbb{R}^3[x]$.

Задача 6.9. Проверить, является ли отображение f линейным оператором линейного пространства $M(2\times 2,\mathbb{R})$, если для любого $\mathbf{X}\in M(2\times 2,\mathbb{R})$

$$f(\mathbf{X})=\mathbf{X}^T.$$

Решение.

Согласно свойствам операции транспонирования матриц

$$f(\mathbf{X}+\mathbf{Y})=(\mathbf{X}+\mathbf{Y})^T=\mathbf{X}^T+\mathbf{Y}^T=f(\mathbf{X})+f(\mathbf{Y}),$$

$$f(\alpha\mathbf{X})=(\alpha\mathbf{X})^T=\alpha(\mathbf{X}^T)=\alpha f(\mathbf{X}),$$

то есть f является линейным оператором линейного пространства $M(2\times 2,\mathbb{R})$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 6.10. Проверить, является ли отображение f линейным оператором линейного пространства $\mathbb{R}^3$, если для любого $x=(x_1, x_2, x_3)\in\mathbb{R}^3$

$$f(x)=(x_1-x_2+x_3, x_3+x_2, x_1).$$

Задача 6.11. Проверить, является ли отображение f линейным оператором линейного пространства $\mathbb{R}^3$, если для любого $x=(x_1, x_2, x_3)\in\mathbb{R}^3$

$$f(x)=(2x_1+x_2, x_3+x_1, x_3^2).$$

Задача 6.12. Проверить, является ли отображение f линейным оператором линейного пространства $\mathbb{R}^3[x]$, если для любого $g(x)=ax^2+bx+c\in\mathbb{R}^3[x]$

$$f(g(x))=cx^2+bx+a.$$

Задача 6.13. Проверить, является ли отображение f линейным оператором линейного пространства $M(2\times 2,\mathbb{R})$, если для любого $\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\in M(2\times 2,\mathbb{R})$

$$f(\mathbf{X})=\begin{pmatrix} x_{22} & 0 \\ 0 & x_{11} \end{pmatrix}.$$

Задача 6.14. Проверить, является ли отображение f линейным оператором линейного пространства V^3, если для любого $\overline{\mathbf{x}}\in V^3$

$$f(\overline{\mathbf{x}})=[\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{a}}],\ \text{где}\ \overline{\mathbf{a}}=\{1,\,3,\,-2\}.$$

7. Матрица линейного оператора

Пусть f – линейный оператор линейного пространства $L^{(n)}$, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – некоторый базис этого пространства.

Тогда любой вектор линейного пространства $L^{(n)}$ линейно выражается через векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Следовательно,

$$\begin{aligned} f(e_1) &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n, \\ f(e_2) &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{n2}e_n, \\ &\ldots \\ f(e_n) &= a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n. \end{aligned} \qquad \textbf{(7.1)}$$

Из коэффициентов в разложении векторов $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$ по базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$ составим матрицу $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Эту матрицу называют ***матрицей линейного оператора*** в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Замечание. Отметим, что в столбце с номером i матрицы $\mathbf{A}$ стоят координаты вектора $f(e_i)$ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Соотношение (7.1) можно записать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & \ldots & f(e_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \ldots & e_n \end{pmatrix} \cdot \mathbf{A}. \qquad \textbf{(7.2)}$$

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 7.1. Найдём матрицу нулевого оператора O произвольного линейного пространства $L^{(n)}$ в некотором базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

$$O(e_1) = O(e_2) = \ldots = O(e_n) = o = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \ldots + 0 \cdot e_n$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{O}.$$

Таким образом, нулевой оператор любого линейного пространства в любом базисе имеет нулевую матрицу.

Пример 7.2. Найдём матрицу тождественного оператора J произвольного линейного пространства $L^{(n)}$ в некотором базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

$$
\begin{gathered}
J(e_1) = e_1 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \ldots + 0 \cdot e_n, \\
J(e_2) = e_2 = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + \ldots + 0 \cdot e_n, \\
\ldots, \\
J(e_n) = e_n = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \ldots + 1 \cdot e_n \\
\Rightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}.
\end{gathered}
$$

Таким образом, тождественный оператор любого линейного пространства в любом базисе имеет единичную матрицу.

Пример 7.3. Рассмотрим линейное пространство $\mathbb{R}^n[x]$ (пространство многочленов, степень которых меньше n). Пусть f – оператор дифференцирования. Найдём матрицу линейного оператора f в стандартном базисе $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$.

$$
\begin{aligned}
&f(1) = 1' = 0 = 0\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + \ldots + 0\cdot x^{n-2} + 0\cdot x^{n-1},\\
&f(x) = x' = 1 = 1\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + \ldots + 0\cdot x^{n-2} + 0\cdot x^{n-1},\\
&f(x^2) = (x^2)' = 2x = 0\cdot 1 + 2\cdot x + 0\cdot x^2 + \ldots + 0\cdot x^{n-2} + 0\cdot x^{n-1},\\
&f(x^3) = (x^3)' = 3x^2 = 0\cdot 1 + 0\cdot x + 3\cdot x^2 + \ldots + 0\cdot x^{n-2} + 0\cdot x^{n-1},\\
&\ldots\\
&f(x^{n-1}) = (x^{n-1})' = (n-1)x^{n-2} =\\
&\qquad\qquad = 0\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + \ldots + (n-1)\cdot x^{n-2} + 0\cdot x^{n-1}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\
0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 0 & 0 & 3 & \ldots & 0\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n-1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}.
$$

Итак, для каждого линейного оператора можно построить матрицу этого оператора в данном базисе. Оказывается, справедливо и обратное: любой матрице порядка n соответствует линейный оператор n-мерного линейного пространства, более того это соответствие взаимно однозначное.

Теорема 7.1. *Существует взаимно однозначное соответствие между множеством линейных операторов n-мерного линейного пространства и множеством квадратных матриц порядка n.*

Задача 7.4. Найти матрицу линейного оператора f линейного пространства $\mathbb{R}^3$ в стандартном базисе, если для любого $x=(x_1, x_2, x_3)\in\mathbb{R}^3$

$$f(x)=(x_2, x_3, x_1+2x_2).$$

Решение.

Стандартным базисом линейного пространства $\mathbb{R}^3$ является базис

$$e_1=(1, 0, 0),\ e_2=(0, 1, 0),\ e_3=(0, 0, 1).$$

Обозначим матрицу линейного оператора f в стандартном базисе через $\mathbf{A}$. Согласно определению матрицы линейного оператора, элементами первого столбца матрицы $\mathbf{A}$ являются координаты вектора $f(e_1)$ в базисе e_1, e_2, e_3, элементами второго столбца – координаты вектора $f(e_2)$ в базисе e_1, e_2, e_3 и элементами третьего – координаты $f(e_3)$ в том же базисе.

Обозначим матрицу линейного оператора f в стандартном базисе через $\mathbf{A}$. Согласно определению матрицы линейного оператора, элементами первого столбца матрицы $\mathbf{A}$ являются координаты вектора $f(e_1)$ в базисе e_1, e_2, e_3, элементами второго столбца – координаты вектора $f(e_2)$ в базисе e_1, e_2, e_3 и элементами третьего – координаты $f(e_3)$ в том же базисе.

$$f(e_1) = f((1, 0, 0)) = \left(0, 0, 1 + 2 \cdot 0\right) = \left(0, 0, 1\right) = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3,$$
$$f(e_2) = f((0, 1, 0)) = \left(1, 0, 0 + 2 \cdot 1\right) = \left(1, 0, 2\right) = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 2 \cdot e_3,$$
$$f(e_3) = f((0, 0, 1)) = \left(0, 1, 0 + 2 \cdot 0\right) = \left(0, 1, 0\right) = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 7.5. Найти матрицу линейного оператора f линейного пространства $\mathbb{R}^2$ в стандартном базисе, если для любого $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x) = (x_2 + x_1, 2x_1 + x_2).$$

Задача 7.5. Найти матрицу линейного оператора f линейного пространства $\mathbb{R}^2$ в стандартном базисе, если для любого $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x) = (x_2 + x_1, 2x_1 + x_2).$$

Решение.

Стандартным базисом линейного пространства $\mathbb{R}^2$ является базис

$$e_1 = (1, 0), \; e_2 = (0, 1).$$

Тогда

$$f(e_1) = f((1, 0)) = \left(0+1, 2\cdot 1+0\right) = \left(1, 2\right) = 1\cdot e_1 + 2\cdot e_2,$$
$$f(e_2) = f((0, 1)) = \left(1+0, 2\cdot 0+1\right) = \left(1, 1\right) = 1\cdot e_1 + 1\cdot e_2$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 7.6. Найти матрицу линейного оператора f линейного пространства $\mathbb{R}^3[x]$ в стандартном базисе, если для любого $g(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}^3[x]$ $f(g(x)) = bx + c$.

Задача 7.6. Найти матрицу линейного оператора f линейного пространства $\mathbb{R}^3[x]$ в стандартном базисе, если для любого $g(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}^3[x]$ $\quad f(g(x)) = bx + c$.

Решение.

Стандартным базисом линейного пространства $\mathbb{R}^3[x]$ является базис 1, x, x^2. Тогда

$$f(1) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2,$$

$$f(x) = x = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2,$$

$$f(x^2) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 7.7. Найти матрицу линейного оператора f линейного пространства $M(2\times 2,\mathbb{R})$ в стандартном базисе, если для любого $\mathbf{X}\in M(2\times 2,\mathbb{R})$

$$f(\mathbf{X})=\mathbf{X}^T.$$

Решение.

Стандартным базисом линейного пространства $M(2\times 2,\mathbb{R})$ является

$$\mathbf{E}_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ \mathbf{E}_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ \mathbf{E}_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\mathbf{E}_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{E}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$f(\mathbf{E}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \mathbf{E}_1 + 0 \cdot \mathbf{E}_2 + 0 \cdot \mathbf{E}_3 + 0 \cdot \mathbf{E}_4,$$

$$f(\mathbf{E}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \mathbf{E}_1 + 0 \cdot \mathbf{E}_2 + 1 \cdot \mathbf{E}_3 + 0 \cdot \mathbf{E}_4,$$

$$f(\mathbf{E}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \mathbf{E}_1 + 1 \cdot \mathbf{E}_2 + 0 \cdot \mathbf{E}_3 + 0 \cdot \mathbf{E}_4,$$

$$f(\mathbf{E}_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \mathbf{E}_1 + 0 \cdot \mathbf{E}_2 + 0 \cdot \mathbf{E}_3 + 1 \cdot \mathbf{E}_4.$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 7.8. Найти матрицу линейного оператора f линейного пространства $\mathbb{R}^3$ в стандартном базисе, если для любого $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$$f(x) = (x_1 - x_2 + x_3, x_3 + x_2, x_1).$$

Задача 7.9. Найти матрицу линейного оператора f линейного пространства $\mathbb{R}^3[x]$ в стандартном базисе, если для любого $g(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}^3[x]$

$$f(g(x)) = cx^2 + bx + a.$$

Задача 7.10. Найти матрицу линейного оператора f линейного пространства $M(2\times 2, \mathbb{R})$ в стандартном базисе, если для любого $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \in M(2\times 2, \mathbb{R})$

$$f(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} x_{22} & 0 \\ 0 & x_{11} \end{pmatrix}.$$

8. Связь между координатами вектора и координатами его образа

Определение. Если f – линейный оператор линейного пространства $L^{(n)}$, то вектор $f(x)$ называют ***образом*** вектора $x \in L^{(n)}$.

Пусть f – линейный оператор линейного пространства $L^{(n)}$, $\mathbf{A}$ – матрица этого оператора в некотором базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Если $x \in L^{(n)}$, то $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – координаты вектора x в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Найдем координаты $y_1, y_2, \ldots, y_n$ вектора $y = f(x)$ в этом же базисе. Обозначим через

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$f(x) = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \ldots + y_n e_n = (e_1 \quad e_2 \quad \ldots \quad e_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad f(x) = (e_1 \quad e_2 \quad \ldots \quad e_n) \cdot \mathbf{Y} \qquad \textbf{(8.1)}$$

С другой стороны, из определения линейного оператора следует, что

$$f(x) = f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \ldots + x_n f(e_n) =$$

$$= (f(e_1) \quad f(e_2) \quad \ldots \quad f(e_n)) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (f(e_1) \quad f(e_2) \quad \ldots \quad f(e_n)) \cdot \mathbf{X}.$$

Но из равенства (7.2)

$$\begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{pmatrix} \cdot \mathbf{A}.$$

Следовательно,

$$f(x) = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{pmatrix} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}. \qquad \mathbf{(8.2)}$$

Из равенств (8.1) и (8.2) получаем, что

$$f(x) = (e_1 \quad e_2 \quad \dots \quad e_n) \cdot \mathbf{Y} = (e_1 \quad e_2 \quad \dots \quad e_n) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X},$$

откуда

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 8.1. Если $\mathbf{A}$ – матрица линейного оператора f в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – координаты вектора x в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – координаты вектора $f(x)$ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$, то имеет место следующее соотношение

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ или } \mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}, \text{ где } \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \ \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим следующий пример.

Пример 8.1. Пусть линейный оператор f в базисе e_1, e_2 задан матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдем $f(x)$, если $x = 2e_1 - e_2$. Согласно теореме 8.1

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad f(x) = 4e_1 + 5e_2.$$

Задача 8.2. Линейный оператор f имеет в стандартном базисе линейного пространства $\mathbb{R}^3$ матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = (1, 0, 2).$$

Найти вектор $f(x)$.

Решение.

Стандартным базисом линейного пространства $\mathbb{R}^3$ является базис

$$(1, 0, 0), \ (0, 1, 0), \ (0, 0, 1).$$

Вектор x в стандартном базисе имеет координаты $1, 0, 2$.

Обозначим через $\mathbf{X}$ – столбец координат вектора x в стандартном базисе, через $\mathbf{Y}$ – вектора $f(x)$. Согласно теореме 8.1

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда $f(x) = (-1, 3, 2)$.

Задача 8.3. Линейный оператор f имеет в стандартном базисе линейного пространства $\mathbb{R}^3$ матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad x = (-1, 3, 2).$$

Найти вектор $f(x)$.

Решение.

Стандартным базисом линейного пространства $\mathbb{R}^3$ является базис
(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1).

Вектор x в стандартном базисе имеет координаты $-1, 3, 2$.

Обозначим через $\mathbf{X}$ – столбец координат вектора x в стандартном базисе, через $\mathbf{Y}$ – вектора $f(x)$. Согласно теореме 8.1

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Тогда $f(x) = (7, 9, 13)$.

Задача 8.4. Линейный оператор f имеет в стандартном базисе линейного пространства $\mathbb{R}^2[x]$ матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad g(x) = x - 3.$$

Найти вектор $f(g(x))$.

Задача 8.4. Линейный оператор f имеет в стандартном базисе линейного пространства $\mathbb{R}^2[x]$ матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad g(x) = x - 3.$$

Найти вектор $f(g(x))$.

Решение.

Стандартным базисом линейного пространства $\mathbb{R}^2[x]$ является базис $1, x$. Вектор $g(x)$ в стандартном базисе имеет координаты $-3, 1$.

Обозначим через $\mathbf{X}$ – столбец координат вектора $g(x)$ в стандартном базисе, через $\mathbf{Y}$ – вектора $f(g(x))$. Согласно теореме 8.1

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Тогда $f(x) = -2 - 8x$.

Задача 8.5. Линейный оператор f имеет в стандартном базисе линейного пространства $\mathbb{R}^3[x]$ матрицу

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 5\\ 4 & 1 & -2\end{pmatrix},\quad g(x)=2x^2-3x+1.$$

Найти вектор $f(g(x))$.

Задача 8.5. Линейный оператор f имеет в стандартном базисе линейного пространства $\mathbb{R}^3[x]$ матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad g(x) = 2x^2 - 3x + 1.$$

Найти вектор $f(g(x))$.

Решение.

Стандартным базисом линейного пространства $\mathbb{R}^3[x]$ является базис $1, x, x^2$. Вектор $g(x)$ в стандартном базисе имеет координаты $1, -3, 2$.

Обозначим через $\mathbf{X}$ – столбец координат вектора $g(x)$ в стандартном базисе, через $\mathbf{Y}$ – вектора $f(g(x))$. Согласно теореме 8.1

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Тогда $f(x) = 4 + 3x - x^2$.

Задача 8.6. Линейный оператор f имеет в стандартном базисе линейного пространства $M(2\times 2,\mathbb{R})$ матрицу

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 3\\ 0 & -1 & 3 & 4\\ 2 & 5 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix} 2 & -1\\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти вектор $f(x)$.

Решение.

Стандартным базисом линейного пространства $M(2\times 2,\mathbb{R})$ является базис

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Вектор x в стандартном базисе имеет координаты $2, -1, 0, 1$.

Обозначим через $\mathbf{X}$ – столбец координат вектора x в стандартном базисе, через $\mathbf{Y}$ – вектора $f(x)$. Согласно теореме 8.1

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{X} = \begin{pmatrix}-2 & -1 & 0 & 3\\ 0 & -1 & 3 & 4\\ 2 & 5 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 5\\ -2\\ 1\end{pmatrix}.$$

Тогда $f(x) = 0\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + 5\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 5\\ -2 & 1\end{pmatrix}.$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 8.7. Линейный оператор f имеет в стандартном базисе линейного пространства $\mathbb{R}^2[x]$ матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad g(x) = 2x + 5.$$

Найти вектор $f(g(x))$.

Задача 8.8. Линейный оператор f имеет в стандартном базисе линейного пространства $M(2\times 2, \mathbb{R})$ матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найти вектор $f(x)$.