Задание 1. (5 баллов)

Вычислите $\log_3 27 + \log_{0,5} 4$

Варианты ответов:

- 1 - правильно
- 2
- 3
- 4

Решение:

$$\log_3 27 + \log_{0,5} 4 = \log_3 3^3 + \log_{0,5} 0,5^{-2} = 3 - 2 = 1$$

Задание 2. (5 баллов)
Вычислите

$$\sqrt{(813)^2-(787)^2}\times\sqrt{26}$$

Варианты ответов:
- 26
- 720
- 980
- 1040 - правильно

Решение:

$$a^2-b^2=(a-b)\times(a+b)$$

$$\sqrt{(813-787)\times(813+787)}\times\sqrt{26}=\sqrt{26\times1600}\times\sqrt{26}=26\times40=1040$$

Задание 3. (10 баллов)

Интернет-магазин установил цену на книгу на 15% выше цены издательства, затем повысил ее на 25 руб., в результате чего цена книги составила 600 руб. За неделю по этой цене были проданы 2 экземпляра книги. Гонорар автора составляет 12% от цены издательства. Определите гонорар автора за книги, проданные интернет-магазином в течение недели.

Варианты ответов:

- 120 руб. - правильно
- 124 руб.
- 140 руб.
- 146 руб.

Решение:

Пусть x – цена издательства

$$x \times 1{,}15 + 25 = 600$$

$$x = \frac{575}{1{,}15} = 500$$

Гонорар автора $= 500 \times 0{,}12 \times 2 = 120$

Задание 4. (10 баллов)

Вкладчик внес в банк 200 тыс. руб. и заключил договор банковского вклада на срок 1 год с начислением процентов по ставке 6% годовых. Через 1 год вкладчик пополнил остаток на счете, после чего заключил новый договор на срок 1 год с начислением процентов по ставке 5% годовых. После истечения срока действия второго договора остаток на счете составил 525 тыс. руб. Проценты по вкладу начисляются один раз в год. Определите сумму (в тыс. руб.), которую вкладчик внес в банк через год после первоначального помещения денежных средств в банк.

Варианты ответов:

- 275 тыс. руб.
- 280 тыс. руб.
- 288 тыс. руб. – правильно
- 296 тыс. руб.

Решение:

Пусть x – сумма пополнения вклада через 1 год

$$(200 \times 1,06 + x) \times 1,05 = 525$$

$$x = 500 - 212 = 288$$

Задание 5. (10 баллов)
Найдите значение функции

$$y = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x + 4$$

в точке локального минимума.
Варианты ответов:

- -1
- $2\frac{2}{3}$ – правильно
- 3
- $3\frac{1}{3}$

Решение:

$$y' = x^2 + 4x + 3 = (x+3)(x+1)$$

Критические точки: x_1=-3; x_2=-1.

При переходе через x_2=-1 знак производной меняется с «-» на «+», поэтому x_2=-1 – точка локального минимума.

$$f(-1) = -\frac{1}{3} + 2 - 3 + 4 = 2\frac{2}{3}$$

Задание 6. (10 баллов)

Решите уравнение

$3^x + 3^{2-x} = 10$

и рассчитайте сумму полученных корней, которую укажите в ответе.

Варианты ответов:

- 2 - правильно
- 3
- 4
- 10

Решение:

$y = 3^x$ $\quad y + \frac{9}{y} - 10 = 0$ $\quad y^2 - 10y + 9 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 100 - 4 \times 9 = 64 = 8^2$

$y_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{10-8}{2} = 1$ $\quad y_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{10+8}{2} = 9$

$3^{x_1} = 1 = 3^0$ $\quad x_1 = 0$ $\quad 3^{x_2} = 9 = 3^2$ $\quad x_2 = 2$

$x_1 + x_2 = 0 + 2 = 2$

Задание 7. (10 баллов)

Решите уравнение

$$\log_{x+4}(x^2+2x-8)=1$$

и рассчитайте сумму полученных корней, которую укажите в ответе.

Варианты ответов:

- -4
- 1
- 3 – правильно
- 4

Решение:

ОДЗ: $x+4>0 \qquad x>-4$

$x+4\neq 1 \qquad x\neq -3$

$x^2+2x-8>0$

$$x^2+2x-8=x+4$$

$$x^2+x-12=0$$

$$D=1+48=49=7^2$$

$x_1=\dfrac{-1-7}{2}=-4$ не удовлетворяет ОДЗ

$x_2=\dfrac{-1+7}{2}=3$ удовлетворяет ОДЗ

Ответ: 3.

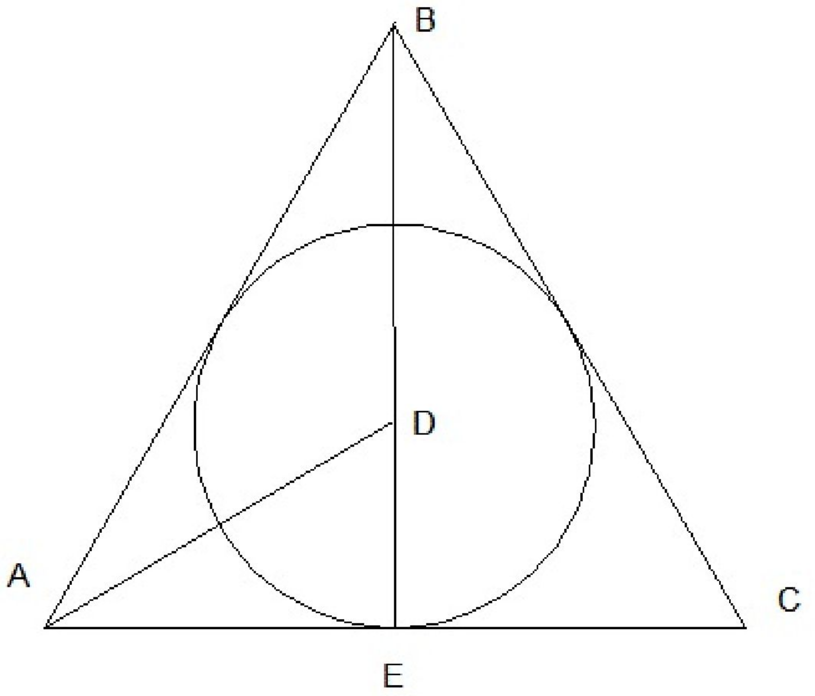
Задание 8. (10 баллов)

Найдите биссектрису равностороннего треугольника, если диаметр вписанной в него окружности равен 8 см.

Варианты ответов:

- 10 см.
- 12 см. - правильно
- $7\sqrt{3}$ см.
- $12\sqrt{3}$ см.

Решение:



$$DE = 8/2 = 4$$

$$DE = AD\sin 30^\circ$$

$$AD = BD = DE/\sin 30^\circ = 8$$

$$BE = BD + DE = 8 + 4 = 12$$

Задание 9. (15 баллов)

Решите уравнение

$$2\cos^2 x-\sin x=1$$

Варианты ответов:

$\frac{\pi}{6}+2\pi k, k$ – целое

$\frac{\pi}{6}+2\pi k; \frac{5\pi}{6}+2\pi k; k$ – целое

$\frac{\pi}{6}+2\pi k; \frac{5\pi}{6}+2\pi k; \frac{3\pi}{2}+2\pi k, k$ – целое

(правильно)

$\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{2\pi}{3}+2\pi k; k$ – целое

Решение:

$$\cos^2 x=1-\sin^2 x$$

$$y=\sin x \qquad y\in[-1;1]$$

$$2\times(1-y^2)-y-1=0$$

$$2y^2+y-1=0$$

$$D=1+8=9=3^2$$

$$y_1=\frac{-1-3}{4}=-1 \qquad y_2=\frac{-1+3}{4}=\frac{1}{2}$$

$$x_1=\frac{3\pi}{2}+2\pi k,\ k \text{ – целое} \qquad x_2=\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k \text{ – целое}$$

$$x_3=\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k \text{ – целое}$$

Ответ: $\frac{\pi}{6}+2\pi k; \frac{5\pi}{6}+2\pi k; \frac{3\pi}{2}+2\pi k, k$ – целое

Задание 10. (15 баллов)

При каких значениях параметра k уравнение

$x^2 + 2kx - k^2 + 2 = 0$

имеет два отрицательных корня?

Варианты ответов:

- $(-\infty; -\sqrt{2})$
- $(-\sqrt{2}; -1)$
- $(1; \sqrt{2})$ – правильно
- $(\sqrt{2}; +\infty)$

Решение:

Должны одновременно выполняться 3 условия:

1) D>0 – 2 корня

2) -b/2a < 0 – вершина параболы находится слева от оси ординат

3) f(0)>0 – оба корня отрицательны

$D = 4k^2 - 4(-k^2 + 2) = 8k^2 - 8 > 0 \qquad k^2 > 1 \qquad k \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

$-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2k}{2} < 0 \qquad k > 0 \qquad k \in (0; +\infty)$

$f(0) = -k^2 + 2 > 0 \qquad k^2 < 2 \qquad k \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$

Ответ: $k \in (1; \sqrt{2})$