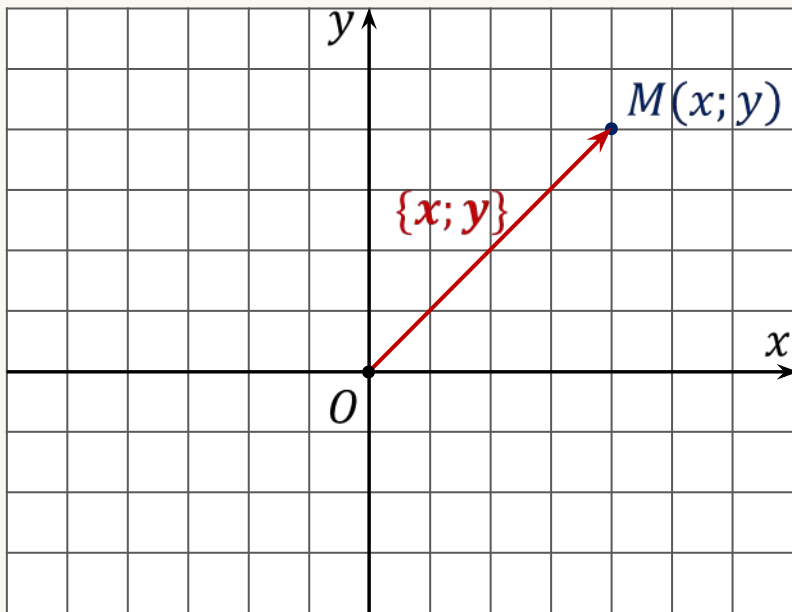


Связь между координатами векторов и координатами точек



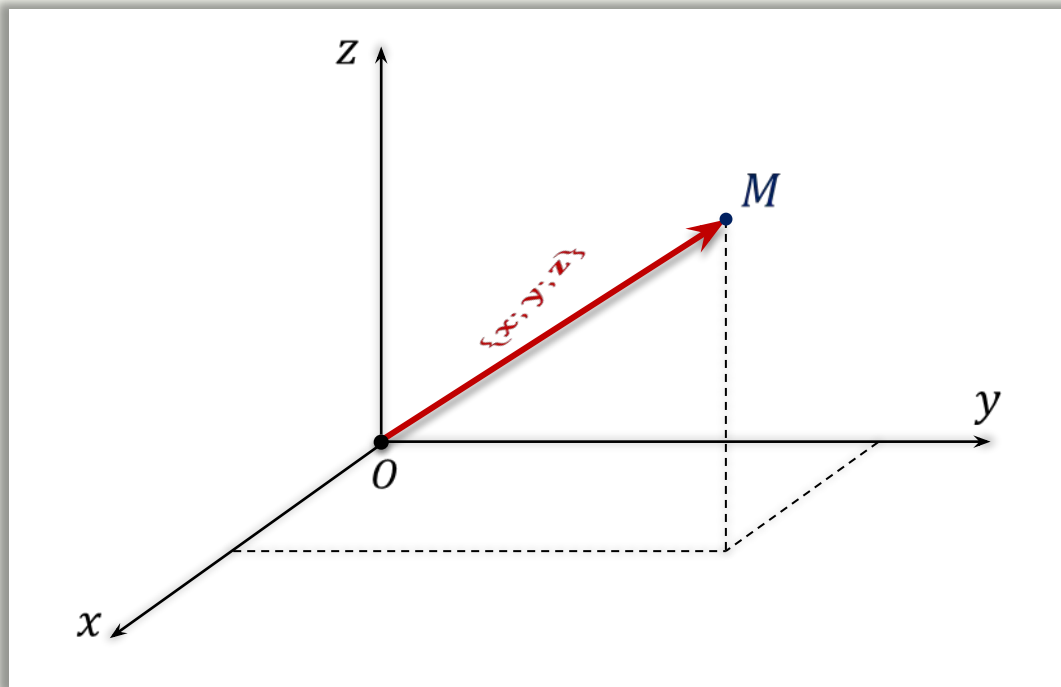
\overrightarrow{OM}
радиус-вектор точки M

$M(x; y)$

\Leftrightarrow

$\overrightarrow{OM} \{x; y\}$

Координаты точки M равны соответствующим координатам её радиус-вектора.



\overrightarrow{OM}
радиус-вектор точки M

$M(x; y; z)$

\Leftrightarrow

$\overrightarrow{OM} \{x; y; z\}$

Координаты точки M равны соответствующим координатам её радиус-вектора.

Координаты точки M равны соответствующим координатам её радиус-вектора.

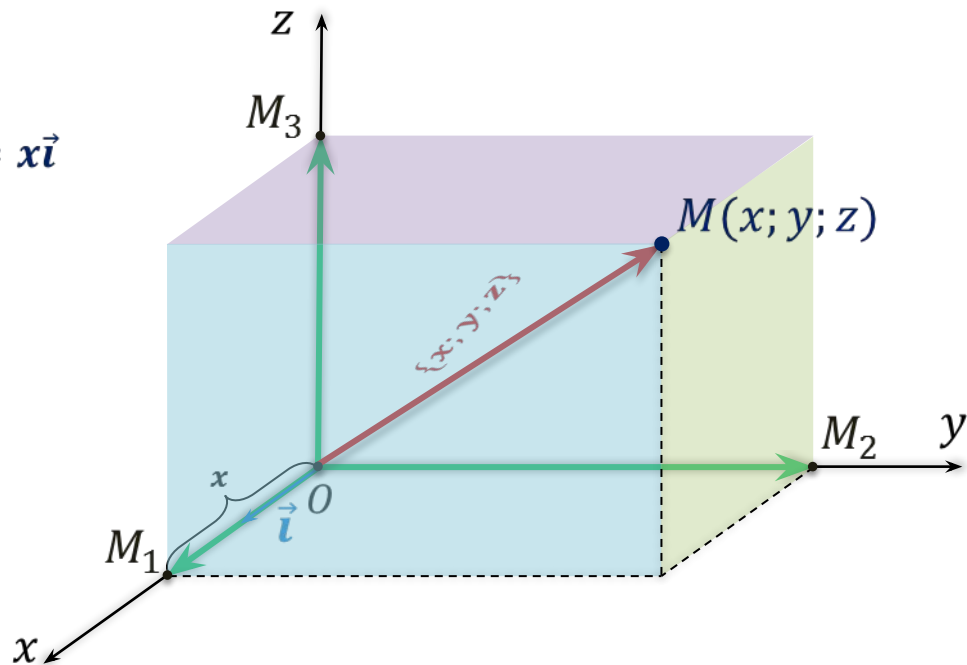
Доказательство:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}$$

$$x > 0$$

$$|\overrightarrow{OM_1}| = OM_1 = x$$

$$\overrightarrow{OM_1} \parallel \vec{i} \Rightarrow \overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$$



Координаты точки M равны соответствующим координатам её радиус-вектора.

Доказательство:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}$$

$$x > 0$$

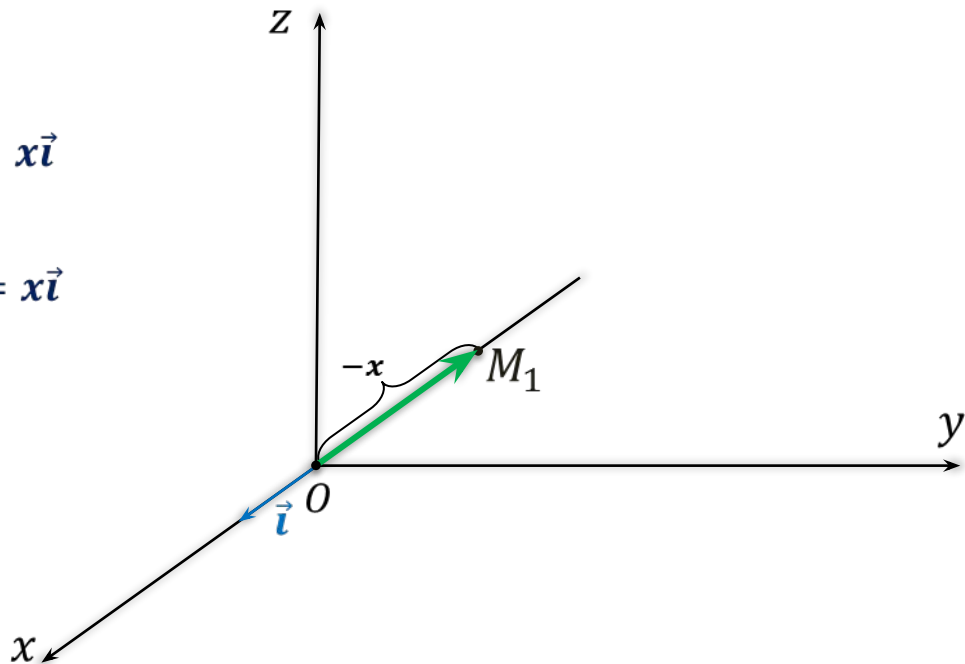
$$|\overrightarrow{OM_1}| = OM_1 = x$$

$$\overrightarrow{OM_1} \uparrow \uparrow \vec{i} \Rightarrow \overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$$

$$x < 0$$

$$|\overrightarrow{OM_1}| = OM_1 = -x$$

$$\overrightarrow{OM_1} \uparrow \downarrow \vec{i} \Rightarrow \overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$$



Координаты точки M равны соответствующим координатам её радиус-вектора.

Доказательство:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}$$

$$x > 0$$

$$|\overrightarrow{OM_1}| = OM_1 = x$$

$$\overrightarrow{OM_1} \uparrow \vec{i} \Rightarrow \overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$$

$$x < 0$$

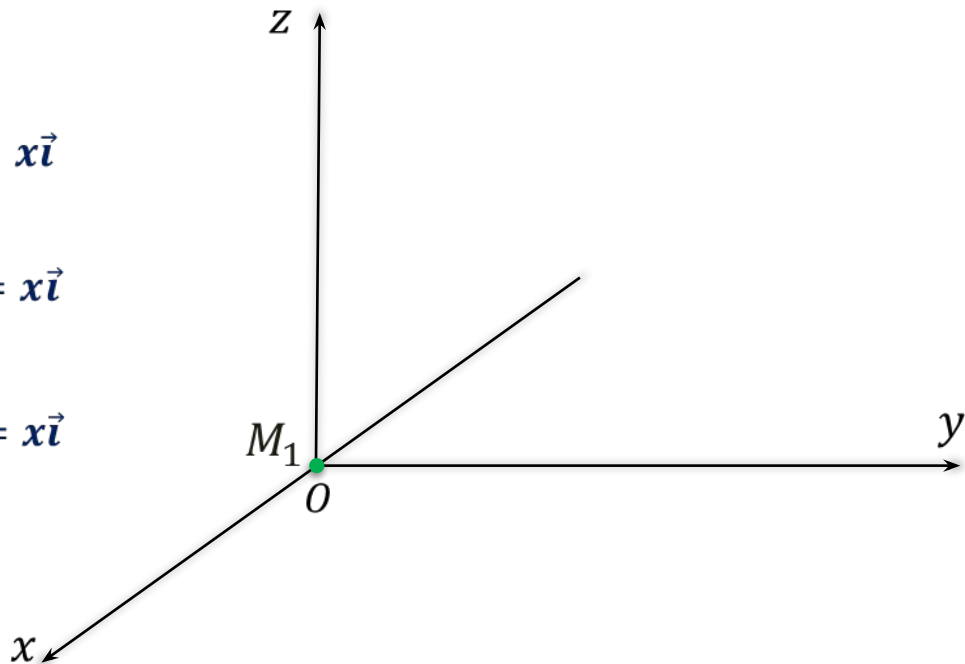
$$|\overrightarrow{OM_1}| = OM_1 = -x$$

$$\overrightarrow{OM_1} \updownarrow \vec{i} \Rightarrow \overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$$

$$x = 0$$

$$|\overrightarrow{OM_1}| = OM_1 = 0$$

$$\overrightarrow{OM_1} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$$



Координаты точки M равны соответствующим координатам её радиус-вектора.

Доказательство:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}$$

$$x > 0$$

$$|\overrightarrow{OM_1}| = OM_1 = x$$

$$\overrightarrow{OM_1} \uparrow \vec{i} \Rightarrow \overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$$

$$x < 0$$

$$|\overrightarrow{OM_1}| = OM_1 = -x$$

$$\overrightarrow{OM_1} \downarrow \vec{i} \Rightarrow \overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$$

$$x = 0$$

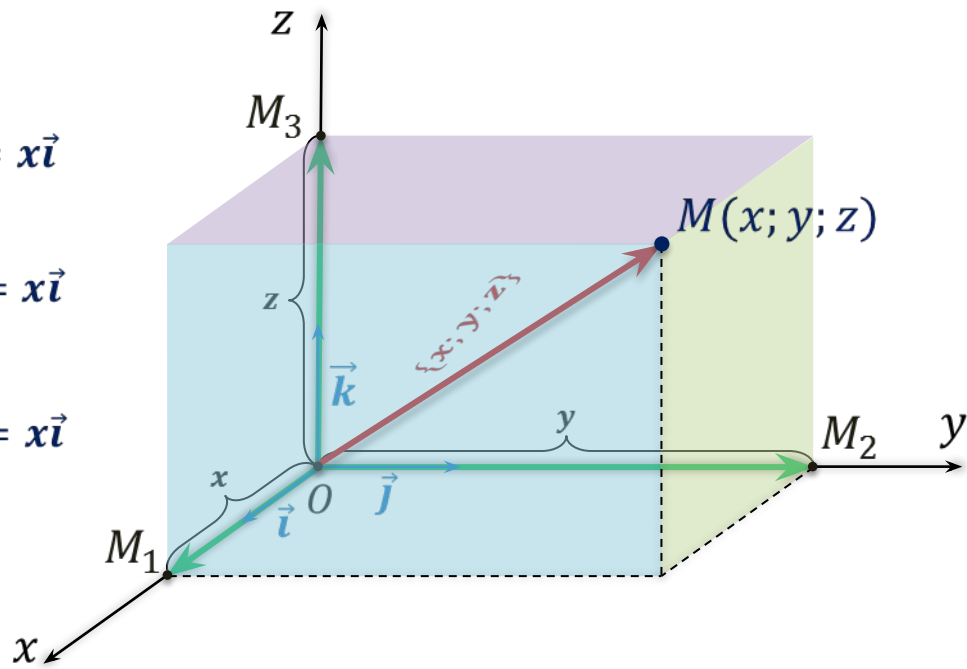
$$|\overrightarrow{OM_1}| = OM_1 = 0$$

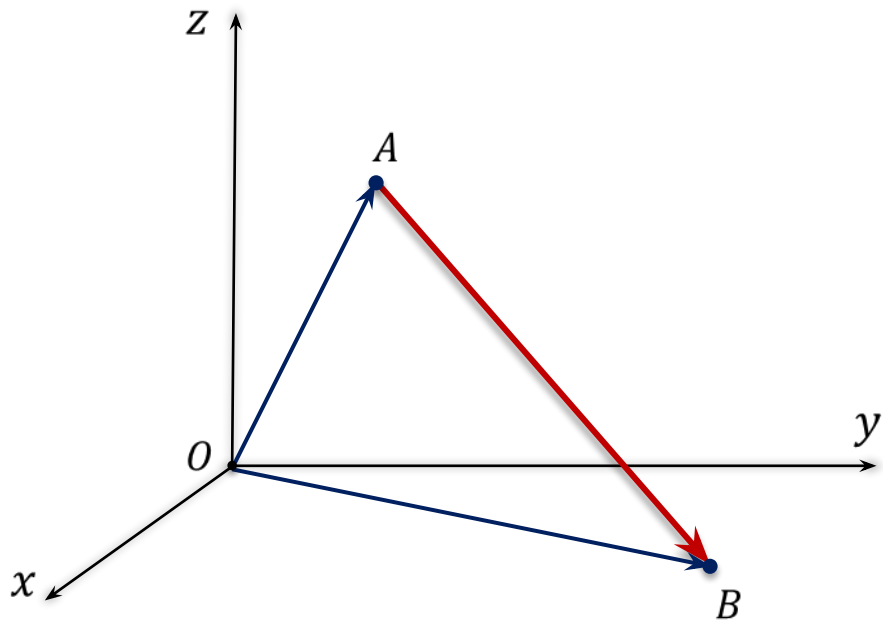
$$\overrightarrow{OM_1} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$$

$$\overrightarrow{OM_2} = y\vec{j}$$

$$\overrightarrow{OM_3} = z\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{OM} \{x; y; z\}$$





$$\vec{OA} \{x_1; y_1; z_1\}$$

$$\vec{OB} \{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

$$\vec{AB} \{ \quad ; \quad ; \quad \}$$

Каждая координата вектора равна
разности соответствующих координат его конца и начала.

Задача. По координатам точек $A(2; -3; 0)$, $B(7; -12; 18)$ и $C(-8; 0; 5)$ определить координаты векторов \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OC} , \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} и \overrightarrow{AC} , если точка O — точка начала координат.

Решение.

$$A(2; -3; 0) \quad B(7; -12; 18) \quad C(-8; 0; 5)$$

$$\overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{OA} \{ \quad \quad \}$$

$$\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OB} \{ \quad \quad \}$$

$$\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OC} \{ \quad \quad \}$$

Задача. По координатам точек $A(2; -3; 0)$, $B(7; -12; 18)$ и $C(-8; 0; 5)$ определить координаты векторов \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{OC} , \vec{AB} , \vec{BC} и \vec{AC} , если точка O — точка начала координат.

Решение.

$$A(2; -3; 0)$$

$$B(7; -12; 18)$$

$$C(-8; 0; 5)$$

\vec{OA} — радиус-вектор точки A

$$\vec{OA} \{2; -3; 0\}$$

$\vec{AB} \{ \quad ; \quad ; \quad \}$

$$\vec{AB} \{5; -9; 18\}$$

\vec{OB} — радиус-вектор точки B

$$\vec{OB} \{7; -12; 18\}$$

\vec{OC} — радиус-вектор точки C

$$\vec{OC} \{-8; 0; 5\}$$

Задача. По координатам точек $A(2; -3; 0)$, $B(7; -12; 18)$ и $C(-8; 0; 5)$ определить координаты векторов \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{OC} , \vec{AB} , \vec{BC} и \vec{AC} , если точка O — точка начала координат.

Решение.

$$A(2; -3; 0) \quad B(7; -12; 18) \quad C(-8; 0; 5)$$

\vec{OA} — радиус-вектор точки A

$$\vec{OA} \{2; -3; 0\}$$

\vec{OB} — радиус-вектор точки B

$$\vec{OB} \{7; -12; 18\}$$

\vec{OC} — радиус-вектор точки C

$$\vec{OC} \{-8; 0; 5\}$$

$$\vec{AB} \{7 - 2; -12 - (-3); 18 - 0\}$$

$$\vec{AB} \{5; -9; 18\}$$

$$\vec{BC} \{ \quad ; \quad ; \quad \}$$

$$\vec{BC} \{-15; 12; -13\}$$

Задача. По координатам точек $A(2; -3; 0)$, $B(7; -12; 18)$ и $C(-8; 0; 5)$ определить координаты векторов \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OC} , \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} и \overrightarrow{AC} , если точка O — точка начала координат.

Решение.

$$A(2; -3; 0) \quad B(7; -12; 18) \quad C(-8; 0; 5)$$

\overrightarrow{OA} — радиус-вектор точки A

$$\overrightarrow{OA} \{2; -3; 0\}$$

\overrightarrow{OB} — радиус-вектор точки B

$$\overrightarrow{OB} \{7; -12; 18\}$$

\overrightarrow{OC} — радиус-вектор точки C

$$\overrightarrow{OC} \{-8; 0; 5\}$$

$$\overrightarrow{AB} \{7 - 2; -12 - (-3); 18 - 0\}$$

$$\overrightarrow{AB} \{5; -9; 18\}$$

$$\overrightarrow{BC} \{-8 - 7; 0 - (-12); 5 - 18\}$$

$$\overrightarrow{BC} \{-15; 12; -13\}$$

$$\overrightarrow{AC} \{ \quad ; \quad ; \quad \}$$

$$\overrightarrow{AC} \{-10; 3; 5\}$$

Задача. По координатам векторов

$\overrightarrow{OA} \{4; -7; 1\}$, $\overrightarrow{OB} \{-2; 0; 3\}$, $\overrightarrow{OC} \{0,5; -4; 8\}$, $\overrightarrow{AD} \{13; -2; 5\}$, $\overrightarrow{BE} \{1; -3; 0\}$ и $\overrightarrow{CF} \{-9; 0; 0\}$ определить координаты точек A , B , C , D , E и F , если точка O — точка начала координат.

Решение.

$$\overrightarrow{OA} \{4; -7; 1\}$$

$$\overrightarrow{OC} \{0,5; -4; 8\}$$

$$\overrightarrow{BE} \{1; -3; 0\}$$

$$\overrightarrow{OB} \{-2; 0; 3\}$$

$$\overrightarrow{AD} \{13; -2; 5\}$$

$$\overrightarrow{CF} \{-9; 0; 0\}$$

$$\overrightarrow{OA}$$

$$A(\quad)$$

$$\overrightarrow{OB}$$

$$B(\quad)$$

$$\overrightarrow{OC}$$

$$C(\quad)$$

Задача. По координатам векторов

$\overrightarrow{OA} \{4; -7; 1\}$, $\overrightarrow{OB} \{-2; 0; 3\}$, $\overrightarrow{OC} \{0,5; -4; 8\}$, $\overrightarrow{AD} \{13; -2; 5\}$, $\overrightarrow{BE} \{1; -3; 0\}$ и $\overrightarrow{CF} \{-9; 0; 0\}$ определить координаты точек A , B , C , D , E и F , если точка O — точка начала координат.

Решение.

$\overrightarrow{OA} \{4; -7; 1\}$	$\overrightarrow{OC} \{0,5; -4; 8\}$	$\overrightarrow{BE} \{1; -3; 0\}$		
	$\overrightarrow{OB} \{-2; 0; 3\}$	$\overrightarrow{AD} \{13; -2; 5\}$	$\overrightarrow{CF} \{-9; 0; 0\}$	
\overrightarrow{OA} — радиус-вектор точки A		$x_2 = x_2 + x_1$	$y_2 = y_2 + y_1$	$z_2 = z_2 + z_1$
$A(4; -7; 1)$		$x_D =$	$y_D =$	$z_D =$
		$D(17; -9; 6)$		
\overrightarrow{OB} — радиус-вектор точки B		$x_E =$	$y_E =$	$z_E =$
$B(-2; 0; 3)$		$E(-1; -3; 3)$		
\overrightarrow{OC} — радиус-вектор точки C		$x_F =$	$y_F =$	$z_F =$
$C(0,5; -4; 8)$		$F(-8,5; -4; 8)$		

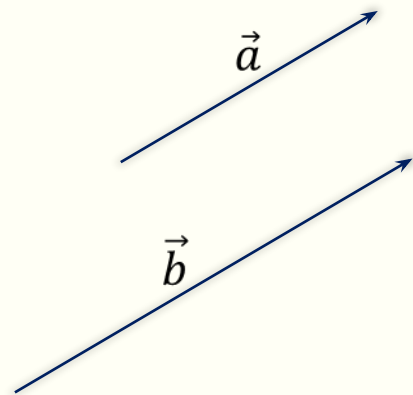
Коллинеарные векторы

Ненулевые векторы называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Лемма. Если векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны и $\vec{a} \neq \vec{0}$, то существует такое число k , что $\vec{b} = k\vec{a}$.

$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, если $k \geq 0$

$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, если $k < 0$



$$\vec{a} \{x; y; z\}$$

$$\vec{b} = k\vec{a} \implies \vec{b} \{kx; ky; kz\}$$

$$\frac{kx}{x} = \frac{ky}{y} = \frac{kz}{z} = k$$

Если координаты векторов пропорциональны, то данные векторы коллинеарны.

Задача. По координатам векторов определить, коллинеарны они или нет.

а) $\vec{a} \{3; 6; 8\}, \vec{b} \{6; 12; 16\}$
 $\vec{a} \parallel \vec{b}$

$$\frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{16}{8} = 2$$

б) $\vec{c} \{1; -1; 3\}, \vec{d} \{2; 3; 15\}$
 $\vec{c} \nparallel \vec{d}$

$$\frac{2}{1} \neq \frac{3}{-1} \neq \frac{15}{3}$$

в) $\vec{i} \{1; 0; 0\}, \vec{j} \{0; 1; 0\}$
 $\vec{i} \nparallel \vec{j}$

\vec{i}, \vec{j} – координатные векторы

г) $\vec{m} \{0; 0; 0\}, \vec{n} \{5; 7; -3\}$
 $\vec{m} \parallel \vec{n}$

$$\vec{m} = \vec{0}; \vec{0} \parallel \vec{n}$$

д) $\vec{p} \{\frac{1}{3}; -1; 5\}, \vec{q} \{-1; -3; -15\}$
 $\vec{p} \nparallel \vec{q}$

$$\frac{-1}{\frac{1}{3}} \neq \frac{-3}{-1} \neq \frac{-15}{5} \quad \Leftrightarrow \quad -3 \neq 3 \neq -3$$

Задача. Найти значения переменных m и n ,
при которых данные векторы будут коллинеарны.

а) $\vec{a} \{15; m; 1\}$, $\vec{b} \{18; 12; n\}$

$$\vec{a} \parallel \vec{b}$$

$$\frac{18}{15} = \frac{12}{m} = \frac{n}{1}$$

$$k = \frac{18}{15} = \frac{6}{5}$$

$$\frac{12}{m} = \frac{6}{5} \Rightarrow m = 10$$

$$\frac{n}{1} = \frac{6}{5} \Rightarrow n = 1,2$$

б) $\vec{c} \{m; 0,4; -1\}$, $\vec{d} \{-\frac{1}{2}; n; 5\}$

$$\vec{c} \parallel \vec{d}$$

$$\frac{-0,5}{m} = \frac{n}{0,4} = \frac{5}{-1}$$

$$k = \frac{5}{-1} = -5$$

$$\frac{-0,5}{m} = -5 \Rightarrow m = 0,1$$

$$\frac{n}{0,4} = -5 \Rightarrow n = -2$$

Компланарные векторы

Векторы называются **компланарными**, если при откладывании их от одной и той же точки они будут лежать в одной плоскости.

Векторы называются **компланарными**, если имеются равные им векторы, лежащие в одной плоскости.

Теорема. (признак компланарности трёх векторов)

Если вектор \vec{c} можно разложить по векторам \vec{a} и \vec{b} : $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$,
то векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} компланарны.

Теорема. (свойство трёх компланарных векторов)

Если векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} компланарны ($\vec{a} \nparallel \vec{b}$),
то вектор \vec{c} можно разложить по векторам \vec{a} и \vec{b} : $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

Компланарны ли тройки векторов?

$$\vec{a} \{-3; -3; 0\}, \vec{i} \{1; 0; 0\}, \vec{j} \{0; 1; 0\}$$

$$\vec{i} \nparallel \vec{j} \Rightarrow \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\begin{cases} -3 = x \cdot 1 + y \cdot 0 \\ -3 = x \cdot 0 + y \cdot 1 \\ 0 = x \cdot 0 + y \cdot 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 = x \\ -3 = y \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = -3\vec{i} - 3\vec{j}$$

$\vec{a}, \vec{i}, \vec{j}$ — компланарны

$$\vec{d} \{1; -1; 2\}, \vec{e} \{-2; 0; 1\}, \vec{f} \{5; -1; 0\}$$

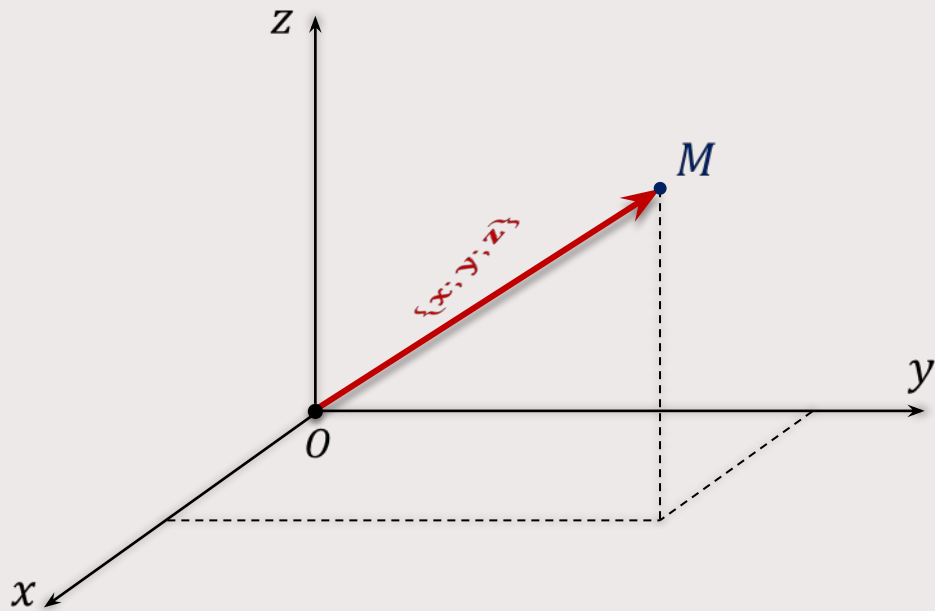
$$\vec{d} \nparallel \vec{e} \Rightarrow \vec{f} = x\vec{d} + y\vec{e}$$

$$\begin{cases} 5 = x \cdot 1 + y \cdot (-2) \\ -1 = x \cdot (-1) + y \cdot 0 \\ 0 = x \cdot 2 + y \cdot 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow \vec{f} = \vec{d} - 2\vec{e}$$

$\vec{d}, \vec{e}, \vec{f}$ — компланарны

Связь между координатами векторов и координатами точек



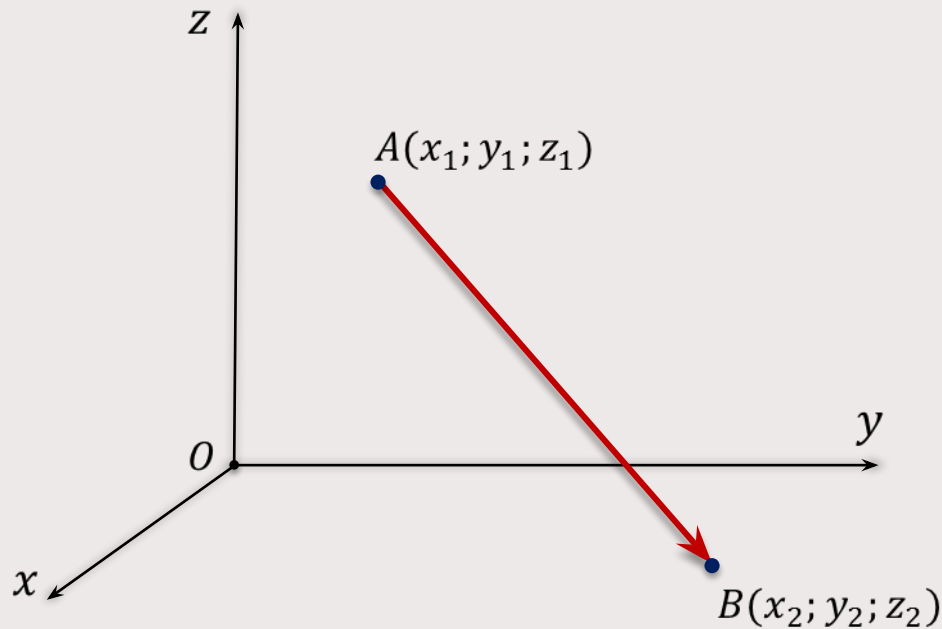
\overrightarrow{OM}
радиус-вектор точки M

$M(x; y; z)$

\Leftrightarrow

$\overrightarrow{OM} \{x; y; z\}$

Связь между координатами векторов и координатами точек



$$\overrightarrow{OA} \{x_1; y_1; z_1\}$$

$$\overrightarrow{OB} \{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\overrightarrow{AB} \{ \quad ; \quad ; \quad \}$$

Связь между координатами векторов и координатами точек

Если координаты векторов пропорциональны, то данные векторы коллинеарны.

Если вектор \vec{c} можно разложить по векторам \vec{a} и \vec{b} : $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, то векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} компланарны.

Задача. По координатам векторов определить коллинеарны они или нет.

а) $\vec{a} \{3; 6; 8\}$, $\vec{b} \{6; 12; 16\}$
 $\vec{a} \parallel \vec{b}$

$$\frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{16}{8} = 2$$

б) $\vec{c} \{1; -1; 3\}$, $\vec{d} \{2; 3; 15\}$
 $\vec{c} \nparallel \vec{d}$

$$\frac{2}{1} \neq \frac{3}{-1} \neq \frac{15}{3}$$

в) $\vec{i} \{1; 0; 0\}$, $\vec{j} \{0; 1; 0\}$
 $\vec{i} \nparallel \vec{j}$

\vec{i}, \vec{j} – координатные векторы

г) $\vec{m} \{0; 0; 0\}$, $\vec{n} \{5; 7; -3\}$
 $\vec{m} \parallel \vec{n}$

$$\vec{m} = \vec{0}; \vec{0} \parallel \vec{n}$$

д) $\vec{p} \left\{ \frac{1}{5}; -1; 5 \right\}$, $\vec{q} \{-1; -3; -15\}$
 $\vec{p} \nparallel \vec{q}$

$$\frac{-1}{\frac{1}{5}} \neq \frac{-3}{-1} \neq \frac{-15}{5}$$

Задача. Найти значения переменных m и n , при которых данные векторы будут коллинеарны.

а) $\vec{a} \{15; m; 1\}$, $\vec{b} \{18; 12; n\}$
 $\vec{a} \parallel \vec{b}$

$$\frac{18}{15} = \frac{12}{m} = \frac{n}{1}$$

$$k = \frac{18}{15} = \frac{6}{5}$$

$$\frac{12}{m} = \frac{6}{5} \Rightarrow m = 10$$

$$\frac{n}{1} = \frac{6}{5} \Rightarrow n = 1,2$$

б) $\vec{c} \{m; 0,4; -1\}$, $\vec{d} \left\{ -\frac{1}{2}; n; 5 \right\}$
 $\vec{c} \parallel \vec{d}$

$$\frac{-0,5}{m} = \frac{n}{0,4} = \frac{5}{-1}$$

$$k = \frac{5}{-1} = -5$$

$$\frac{-0,5}{m} = -5 \Rightarrow m = 0,1$$

$$\frac{n}{0,4} = -5 \Rightarrow n = 2$$

Компланарны ли тройки векторов?

$\vec{a} \{-3; -3; 0\}$, $\vec{i} \{1; 0; 0\}$, $\vec{j} \{0; 1; 0\}$

$$\vec{i} \nparallel \vec{j} \Rightarrow \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\begin{cases} -3 = x \cdot 1 + y \cdot 0 \\ -3 = x \cdot 0 + y \cdot 1 \\ 0 = x \cdot 0 + y \cdot 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 = x \\ -3 = y \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = -3\vec{i} - 3\vec{j}$$

$\vec{a}, \vec{i}, \vec{j}$ – компланарны

$\vec{d} \{1; -1; 2\}$, $\vec{e} \{-2; 0; 1\}$, $\vec{f} \{5; -1; 0\}$

$$\vec{d} \nparallel \vec{e} \Rightarrow \vec{f} = x\vec{d} + y\vec{e}$$

$$\begin{cases} 5 = x \cdot 1 + y \cdot (-2) \\ -1 = x \cdot (-1) + y \cdot 0 \\ 0 = x \cdot 2 + y \cdot 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow \vec{f} = \vec{d} - 2\vec{e}$$

$\vec{d}, \vec{e}, \vec{f}$ – компланарны