Раздел. Функции многих переменных
Лекция 6. Двойной и тройной интегралы

Лектор: к.п.н, и.о.доцента кафедры ВМ КарТУ

Абаева Нелла Фуатовна

План

1. Применение двойного интеграла к решению задач физики и механики

2. Определение тройного интеграла
3. Вычисление тройного интеграла

4. Примеры вычисления тройного интеграла

1. Применение двойного интеграла к решению задач
физики и механики

1. Плотность распределения вещества

Пусть в области D распределено некоторое вещество, так что на каждую единицу площади области D приходится определенное количество этого вещества. Мы будем говорить в дальнейшем о распределении *массы*, хотя наши рассуждения сохранятся и в том случае, когда идет речь о распределении электрического заряда, количества тепла и т.п.

Рассмотрим произвольную площадку ΔS области D. Пусть масса вещества, приходящаяся на данную площадку, есть Δm. Тогда отношение $\frac{\Delta m}{\Delta S}$ называется средней поверхностной плотностью вещества в области ΔS. Пусть теперь площадка ΔS уменьшается, стягиваясь к точке $P(x;\ y)$.

Рассмотрим предел $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta S}$. Если этот предел существует, то, вообще говоря, он будет зависеть от положения точки P, т.е. от ее координат x и y, *и* будет представлять собой некоторую функцию $\gamma(P)$ точки P. Будем называть этот предел *поверхностной плотностью* вещества в точке P:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta S} = \gamma(P) = \gamma(x, y). \qquad (3)$$

Таким образом, поверхностная плотность есть функция $\gamma(x, y)$ координат точки области. Общее количество вещества в области D можно найти по формуле

$$M = \iint_D \gamma(P_i)\, dS = \iint_D \gamma(x, y)\, dxdy,$$

т.е. равно двойному интегралу по области D от плотности $\gamma(P) = \gamma(x, y)$ этого вещества.

Пример 14. Найти массу кругового кольца, если в каждой его точке поверхностная плотность обратно пропорциональна квадрату расстояния ее до центра кольца.

Решение. По условию задачи, заданная область – кольцо. Обозначим радиусы окружностей, ограничивающих кольцо, через r_1 и r_2 $(r_1 < r_2)$. Пусть центр окружностей находится в точке O(0,0), тогда уравнения окружностей: $x^2 + y^2 = r_1^2$ и $x^2 + y^2 = r_2^2$, поверхностная плотность в точке $M(x;y)$ кольца задана соотношением $\gamma(x;y) = \dfrac{k}{x^2 + y^2}$.

Так как областью интегрирования является кольцо, то вычисления удобно проводить в полярной системе координат. Полагаем $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ и поместим полюс полярной системы координат в центре кольца. Тогда уравнения окружностей в полярной системе координат будут $\rho=r_1$ и $\rho=r_2$, а поверхностная плотность в точке $M(\varphi;\rho)$ кольца $\gamma(\mathrm{M})=\dfrac{k}{\rho^2}$.

Массу всего кольца найдем по формуле, преобразуя ее к полярным координатам

$$\mathrm{M}=\iint\limits_{D}\gamma(x;y)dxdy=\iint\limits_{r_1\le\rho\le r_2}\gamma(\varphi;\rho)\rho d\varphi d\rho=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{k}{\rho^2}\rho d\rho=k\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{1}{\rho}d\rho=$$

$$=k\int\limits_0^{2\pi}\ln\rho\Big|_{r_1}^{r_2}d\varphi=k\ln\frac{r_2}{r_1}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=2\pi k\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

2. Момент инерции площади плоской фигуры

Моментом инерции I *материальной точки* M с массой m относительно некоторой точки O называется произведение массы m на квадрат ее расстояния r от точки O: $I = mr^2$.

Момент инерции фигуры D относительно начала координат равен

$$I_0 = \iint_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy,$$

где D — область, совпадающая с данной плоской фигурой. Интегралы

$$I_{xx} = \iint_D y^2 dxdy, \quad I_{yy} = \iint_D x^2 dxdy$$

называются, соответственно, *моментами инерции* фигуры D относительно осей Ox и Oy.

Замечание. Если поверхностная плотность γ не равна единице, а является функцией x и y, то есть $\gamma(x, y)$, то момент инерции плоской фигуры относительно начала координат будет находиться по формуле

$$I_0 = \iint_D \gamma(x, y)\left(x^2 + y^2\right)dxdy.$$

Пример 15. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник, в каждой его точке поверхностная плотность пропорциональна расстоянию ее до гипотенузы. Найти момент инерции данного треугольника относительно его гипотенузы.

Решение. Расположим равнобедренный прямоугольный треугольник, так как показано на рис. 42.

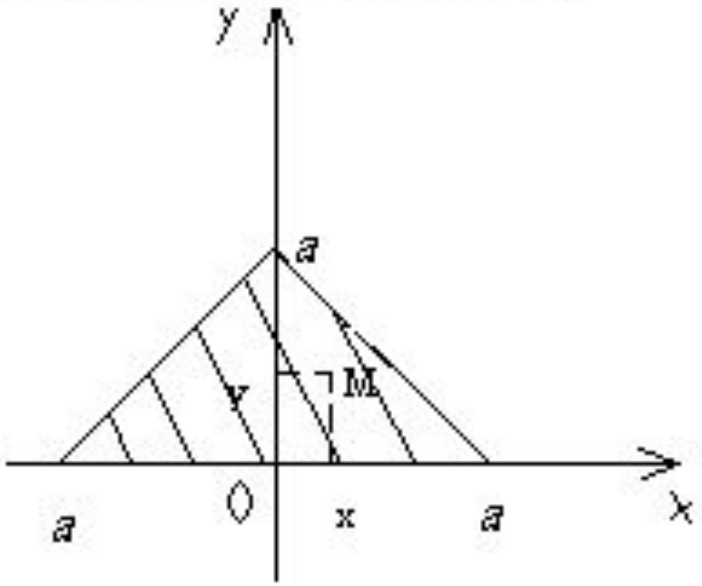


Рисунок 42 – Равнобедренный треугольник примера 15

Так как гипотенуза расположена на оси *Ox,* то будем искать момент инерции треугольника относительно оси *Ox*.

Тогда для любой точки *M(x,y)* треугольника расстояние до гипотенузы равно *y*. Следовательно, получим $\gamma(x,y)=y$.

$$I_{xx} = \iint\limits_{D} \gamma(x, y) \cdot y^2 dxdy = \iint\limits_{D} y^3 dxdy = \int\limits_0^a dy \int\limits_{y-a}^{a-y} y^3 dx = = \int\limits_0^a y^3 \left(x\Big|_{y-a}^{a-y} \right) dy =$$

$$\int\limits_0^a y^3 (a - y - y + a) dy = \int\limits_0^a \left(2ay^3 - 2y^4\right) dy = = \left(\frac{1}{2} ay^4 - \frac{2}{5} y^5 \right)\Bigg|_0^a = \frac{5a^5 - 4a^5}{10} = 0{,}1a^5 .$$

3. Координаты центра тяжести площади плоской фигуры

Известно, что координаты центра тяжести системы материальных точек P_1, P_2, ..., P_n с массами m_1, m_2, ..., m_n определяются по формулам

$$x_c = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}, \qquad y_c = \frac{\sum y_i m_i}{\sum m_i}, \qquad (3)$$

Тогда формулы для вычисления координат центра тяжести плоской фигуры имеют вид:

$$x_c = \frac{\iint\limits_D x\,dxdy}{\iint\limits_D dxdy}, \quad y_c = \frac{\iint\limits_D y\,dxdy}{\iint\limits_D dxdy}.$$

Эти формулы, выведенные для плоской фигуры с поверхностной плотностью 1, остаются, очевидно, в силе и для фигуры, имеющей любую другую, постоянную во всех точках, плотность γ. Если же поверхностная плотность переменна: $\gamma = \gamma(x, y)$, то соответствующие формулы будут иметь вид

$$x_c = \frac{\iint\limits_D \gamma(x, y) \cdot x dx dy}{\iint\limits_D \gamma(x, y) dx dy}, \quad y_c = \frac{\iint\limits_D \gamma(x, y) \cdot y dx dy}{\iint\limits_D \gamma(x, y) dx dy}.$$

Выражения

$$M_y = \iint_D \gamma(x,y)\cdot x dxdy \quad \text{и} \quad M_x = \iint_D \gamma(x,y)\cdot y dxdy$$

называются *статическими моментами* плоской фигуры D относительно осей Oy и Ox. Интеграл $\iint_D \gamma(x,y)dxdy$ выражает величину *массы* рассматриваемой фигуры: $m = \iint_D \gamma(x,y)dxdy$.

Пример 16. Найти центр тяжести однородной (*γ = γ(x, y)=1)* плоской фигуры, ограниченной окружностью $x^2 + y^2 = 1$ и прямой $x + y = 1$.

Решение: На рис. 43 изображена заданная фигура.

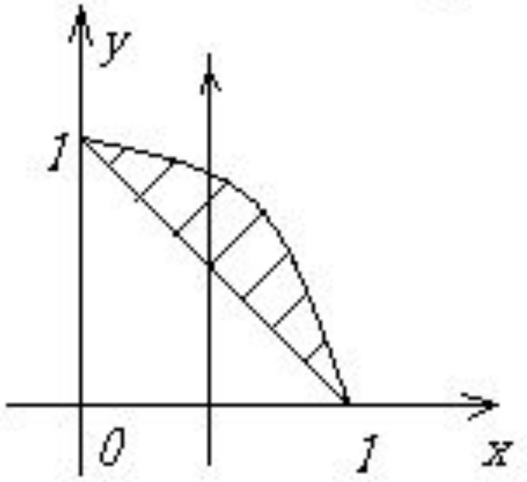


Рисунок 43 – Плоская фигура примера 16

По рисунку видно, что $x \in [0,1]$, y изменяется между линиями $y = 1 - x$ и $y = \sqrt{1 - x^2}$. Следовательно,

$$m = \iint\limits_D \gamma(x, y) dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} dy = \frac{1}{4}(\pi - 2).$$

В данном случае масса фигуры равна площади четверти круга радиуса 1 без площади треугольника, то есть $S = \frac{1}{4}\pi \cdot 1^2 - \frac{1}{2} 1 \cdot 1 = \frac{1}{4}(\pi - 2).$

$$M_y = \iint_D \gamma(x,y)\cdot x dx dy = \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} x dy = \int_0^1 xy\Big|_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 x\left(\sqrt{1-x^2} - 1 + x\right)dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x\sqrt{1-x^2} - x + x^2\right)dx = \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{\left(1-x^2\right)^3} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1 == -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{-3+2+2}{6} = \frac{1}{6},$$

.

$$M_x = \iint_D \gamma(x,y)\cdot y dx dy = \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} y dy = \frac{1}{2}\int_0^1 y^2\Big|_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1 - x^2 - 1 + 2x - x^2\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(2x - 2x^2\right)dx = = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Следовательно, $x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{4}{6(\pi-2)} = \frac{2}{3(\pi-2)}$; $y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{4}{6(\pi-2)} = \frac{2}{3(\pi-2)}$.

2. Определение тройного интеграла

Пусть в некотором пространстве задана некоторая область V, ограниченная замкнутой поверхностью S.

Пусть в области V и на ее границе определена некоторая непрерывная функция $f(x,y,z)$, где x,y,z - прямоугольные координаты точки области.

Если $f(x,y,z) \geq 0$, можно считать эту функцию плотностью распределения этого вещества области V.

Разобьем область V произвольным образом на области Δv_i, обозначая символом Δv_i не только саму область, но и ее объем. В каждой области Δv_i выберем произвольную точку P_i и обозначим через $f(P_i)$ значение функции f в этой точке.

Составим интегральную сумму

$$\sum f(P_i)\Delta v_i \tag{1}$$

и будем неограниченно увеличивать число малых областей Δv_i так, чтобы наибольший диаметр Δv_i стремился к нулю. Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна, то предел интегральных сумм вида (1) существует. Этот предел, не зависящий ни от способа разбиения области *V*, ни от выбора точек P_i, обозначается символом

$$\iiint\limits_V f(P)dv$$

и называется ***тройным интегралом***.

Таким образом, по определению

$$\lim_{diam \Delta v_i \to 0} \sum f(P_i)\Delta v_i = \iiint_V f(P)dv = \iiint_V f(x,y,z)dxdydz.$$

Если $f(x,y,z)$ считать обьемной плотностью распределения вещества в области V, то интеграл дает массу всего вещества, заключенного в обьеме V.

Предположим, что пространственная (трехмерная) область V, ограниченная замкнутой поверхностью S, обладает следующими свойствами:

1. всякая прямая, параллельная оси Oz, проведенная через внутреннюю (т.е. не лежащую на границе S) точку области V, пересекает поверхность S в двух точках;

2. вся область V проектируется на плоскость Oxy в правильную (двумерную) область D;

3. всякая часть области V, отсеченная плоскостью, параллельной любой из координатных плоскостей (Oxy, Oxz, Oyz), также обладает свойствами 1) и 2).

Область V, обладающую указанными свойствами, мы будем называть ***правильной*** трехмерной областью.

Правильными трехмерными областями являются, например, эллипсоид, прямоугольный параллелепипед, тетраэдр и т.д. Мы будем рассматривать только правильные области.

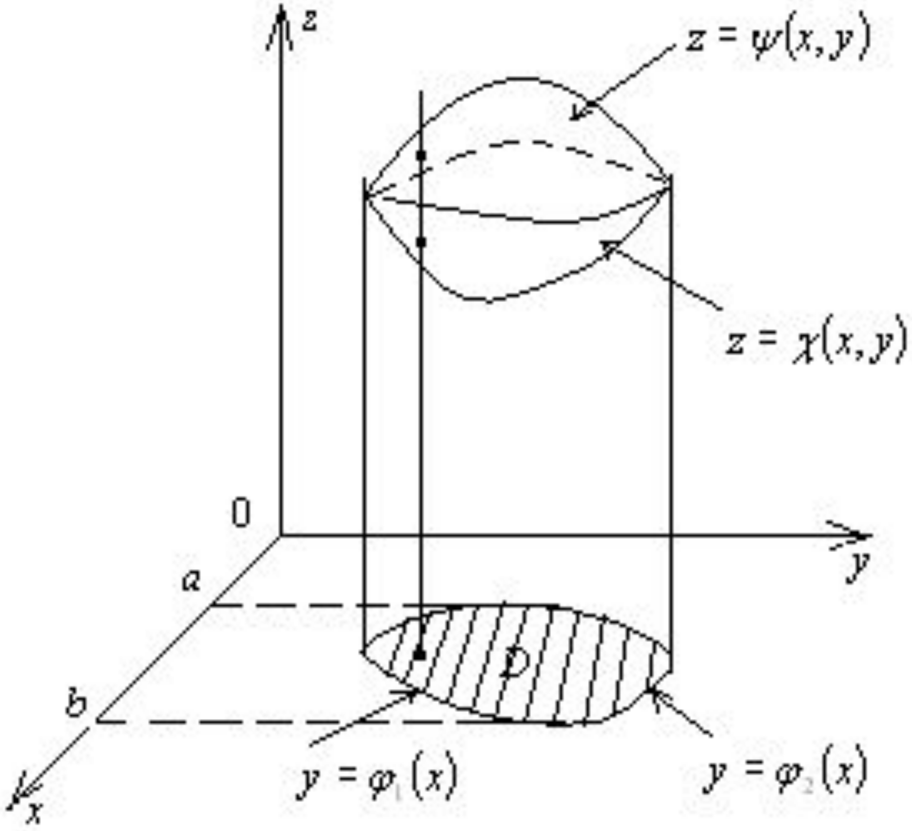


Рисунок 44- Пространственная область

Пусть поверхность, ограничивающая область V снизу, имеет уравнение $z = \chi(x, y)$, а поверхность, ограничивающая эту область сверху, имеет уравнение $z = \psi(x, y)$ (рис.44).

Введем понятие *трехкратного* интеграла I_v по области V от функции трех переменных $f(x,y,z)$, определенной и непрерывной в области V.

3. Вычисление тройного интеграла

Предположим, что область D — проекция области V на плоскость Oxy — ограничена линиями: $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$, $x=a$, $x=b$. Тогда *трехкратный интеграл* от функции $f(x,y,z)$ по области V определяется так:

$$I_v = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int_{\chi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dy \right\} dx. \qquad (2)$$

Заметим, что в результате интегрирования по z и подстановки пределов в фигурных скобках получится функция от x и y. Далее вычисляется двойной интеграл от этой функции по области D, как это было рассмотрено выше.

Рассмотрим свойства трехкратного интеграла.

Свойство 1. Если область V разбить на две области V_1 и V_2 плоскостью, параллельной какой-либо из плоскостей координат, то трехкратный интеграл по области V равен сумме трехкратных интегралов по областям V_1 и V_2.

Следствие. При любом разбиении области V на конечное число областей $V_1,\ldots, V_n$ плоскостями, параллельными координатным плоскостям, имеет место равенство $I_V = I_{V_1} + I_{V_2} + \ldots + I_{V_n}$.

Свойство 2 (теорема об оценке трехкратного интеграла). Если m и M, соответственно, наименьшее и наибольшее значения функции $f(x,y,z)$ в области V, то имеет место неравенство $mV \le I_V \le MV$, где V - объем данной области, I_V - трехкратный интеграл от функции $f(x,y,z)$ по области V.

Свойство 3 (теорема о среднем). Трехкратный интеграл I_V от непрерывной функции $f(x,y,z)$ по области V равен произведению его объема V на значение функции в некоторой точке P области V, т. е.

$$I_v = \int_b^a \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int_{\chi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dy \right\} dx = f(P)V.$$

Теорема. Тройной интеграл от функции $f(x,y,z)$ по правильной области V равен трехкратному интегралу по той же области, т. е.

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dv = \int\limits_b^a \left\{ \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int\limits_{\chi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dy \right\} dx.$$

Здесь $z = \chi(x, y)$ и $z = \psi(x, y)$ - уравнения поверхностей, ограничивающих правильную область V снизу и сверху. Линии $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $x = a$, $x = b$ ограничивают область D, являющуюся проекцией области V на плоскость Oxy.

Замечание. Аналогично тому, как это было в случае двукратного интеграла, можно составить трехкратный интеграл с другим порядком интегрирования по переменным и другими пределами, если, конечно, это позволяет форма области V.

Вычисление объема тела с помощью трехкратного интеграла. Если подынтегральная функция $f(x, y, z) = 1$, то тройной интеграл по области V выражает *объем области* V:

$$V = \iiint_V dxdydz.$$

4. Примеры вычисления тройного интеграла

Пример 1. Вычислить трехкратный интеграл $I=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{1}dy\int\limits_{0}^{2}(4+z)dz.$

Решение. Вычисление интеграла начинается с внутреннего интеграла

$$I=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{1}dy\int\limits_{0}^{2}(4+z)dz=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{1}\left(4z+\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 dy=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{1}(8+2)dy=$$

$$=10\int\limits_{-1}^{1}y\Big|_{x^2}^{1}dx=10\int\limits_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)dx=10\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=10\left(1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}\right)=\frac{40}{3}.$$

Пример 2. Вычислить тройной интеграл $I = \iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$, где область V ограничена плоскостями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$

Решение. Изобразим область интегрирования на рисунке 45.

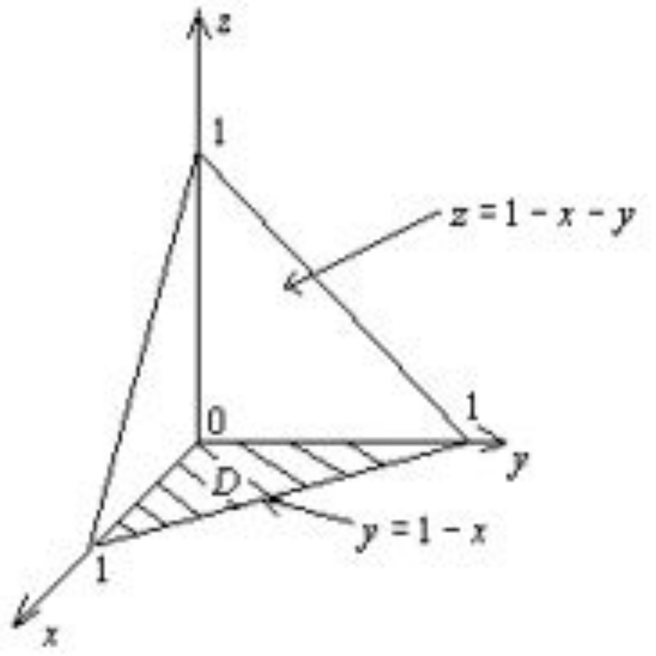


Рисунок 45 – Область интегрирования

Из рисунка видно, что вдоль оси z область V расположена между плоскостями $z=0$ и $z=1-x-y$, проекцией области V на плоскость $x0y$ является область D, которая ограничена прямыми

$$x=0, \quad y=0, \quad y=1-x.$$

Пример 3. С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного цилиндром $x^2+y^2=R^2$ и плоскостями $z=2y$ и $z=0$.

Решение. Изобразим область интегрирования на рисунке 46.

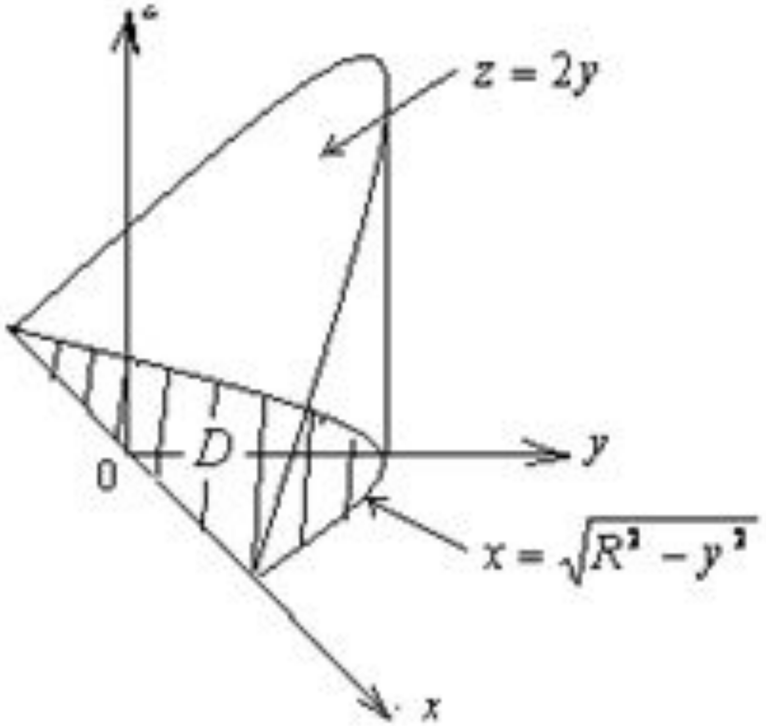


Рисунок 46 – Объемное тело примера 3

Из рисунка видно, что вдоль оси z область V расположена между плоскостями $z=0$ и $z=2y$, проекцией области V на плоскость $x0y$ является область D, которая ограничена прямой $x=0$ и окружностью $x=\sqrt{R^2-y^2}$.

Следовательно, можно вычислить объем этого тела с помощью интеграла

Пример Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 - ax = 0.$$

Решение. Рассмотрим одну четвёртую часть тела, лежащёю в первом октанте. Часть поверхности

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2},$$

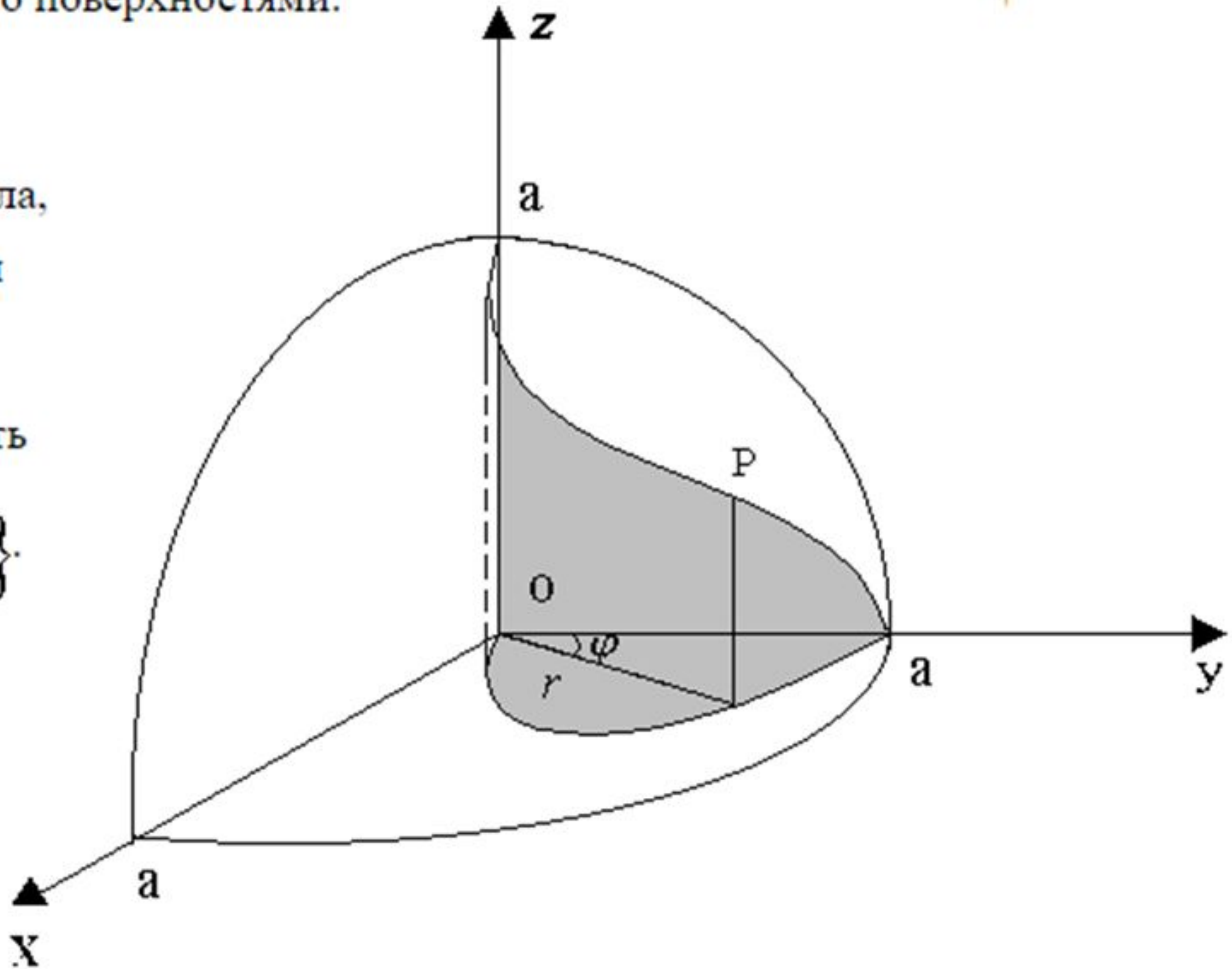
вырезанная цилиндром, проектируется в область

$$D = \left\{(x, y) : 0 \le x \le a, 0 \le y \le \sqrt{2ax - x^2}\right\}.$$

Тогда

$$\frac{1}{4}V = \iint_D dxdy \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dz.$$

Перейдём в интеграле к цилиндрическим координатам



При этом уравнение окружности

$$x^2 + y^2 - ax = 0$$

преобразуется в кривую $r = a\cos\varphi$ где $0 \le \varphi \le \frac{1}{2}\pi$, а уравнение поверхности

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

- к виду

$$z = \sqrt{a^2 - r^2}.$$

Таким образом

$$\frac{1}{4}V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} rdr \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \sqrt{a^2 - r^2}\, rdr = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \frac{(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{a\cos\varphi} = -\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[a^3(1 - \cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}} - a^3\right] d\varphi =$$

$$= \frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos^2\varphi\, d\cos\varphi + \frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{a^3}{3}\left(\cos\varphi - \frac{\cos^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{a^3}{3}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{a^3}{3}\left(-1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{a^3\pi}{6} = -\frac{a^3}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{a^3\pi}{6} = \frac{a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right), \quad V = \frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$

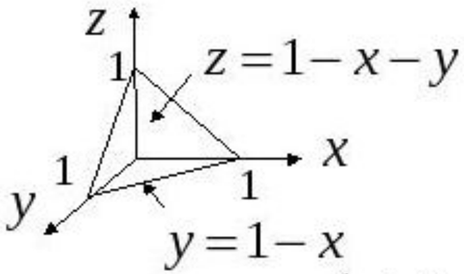
Пример.

Вычислить тройной интеграл $I = \iiint\limits_V (x+y+z)\,dxdydz$

по области, ограниченной плоскостями: $x=0,\ y=0,\ z=0$ и $x+y+z=1$.

Решение.

Построим область интегрирования:



$$I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y}(x+y+z)\,dz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\left(xz+yz+\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x-y}=$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(-\frac{x^2}{2}-xy-\frac{y^2}{2}+\frac{1}{2}\right)dy=\int_0^1 dx\left(-\frac{x^2}{2}y-x\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{6}+\frac{1}{2}y\right)\Bigg|_0^{1-x}=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{3}-\frac{x}{2}+\frac{x^3}{6}\right)dx=\left(\frac{1}{3}x-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{24}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{24}=\frac{1}{8}.$$

Контрольные вопросы

1. Применение двойного интеграла к решению задач физики и механики.
2. Определение тройного интеграла.
3. Свойства тройного интеграла.
4. Сведение тройного интеграла к трехкратному интегралу.
5. Расстановка пределов вычисления в тройном интеграле.

Литература

1. Привалов И.И. Аналитическая геометрия, М: Гос. изд-во Юрайт, 2017.

2. Егоров В.В., Мустафина Л.М., Абаева Н.Ф., Головачёва В.Н. Математика. Часть I (для студентов горного профиля), изд-во КарГТУ, 2015.

3. Мустафина Л.М. Высшая математика для студентов технических специальностей. Часть 1: Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. Изд-во КарГТУ, Караганда, 2016.

4. Мустафина Л.М. Высшая математика для студентов технических специальностей. Часть 2: Введение в математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. Изд-во КарГТУ, Караганда, 2017.

5. Мустафина Л.М., Абаева Н.Ф. Высшая математика для студентов технических специальностей. Часть 3: Функции многих переменных. Кратные интегралы. Дифференциальные уравнения. Изд-во КарГТУ, Караганда, 2017.

6. Мустафина Л.М., Абаева Н.Ф. Высшая математика для студентов технических специальностей. Часть 4: Ряды. Элементы теории вероятностей и математической статистики. Изд-во КарГТУ, Караганда, 2018.

7. Мустафина Л.М. Высшая математика для студентов технических специальностей. Часть 2: Введение в математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. Изд-во КарГТУ, Караганда, 2017.

8. Мустафина Л.М., Абаева Н.Ф. Высшая математика для студентов технических специальностей. Часть 3: Функции многих переменных. Кратные интегралы. Дифференциальные уравнения. Изд-во КарГТУ, Караганда, 2017.

9. Мустафина Л.М., Абаева Н.Ф. Высшая математика для студентов технических специальностей. Часть 4: Ряды. Элементы теории вероятностей и математической статистики. Изд-во КарГТУ, Караганда, 2018.

10. Хрипунова М.Б. [и др.] Высшая математика: учебник и практикум для вузов; под общей редакцией М.Б. Хрипуновой, И.И. Цыганок. М: Издательство Юрайт, 2020.

11. Мустафина Л.М., Швейдель А.П. Индивидуальные задания для СРС и СРСП по математике для студентов технических специальностей. Часть II, Изд-во КарГТУ, Караганда, 2010.

12. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии, Спб.: Лань, 2019.

13. Рябушко А.П., Индивидуальные задания по высшей математике: Т-1,2, 3, Минск: Высшая школа, 2013.

14. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах, т.1-2., М.: Мир и образование, 2016.

15. Берман Н.Г. Сборник задач по курсу математического анализа: Учебное пособие, Спб.: Лань, 2019.

16. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу, Спб.: Лань, 2010.

17. Демидович Б.П. и др., Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов: Учебное пособие для студентов высших технических учебных заведений, М.: Транспортная компания, 2016.

Список дополнительной литературы

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: т.1-3. Спб.: Лань, 2018

2. Логинова В.В. и др. Математический анализ. Сборник заданий: учебное пособие для вузов, под общей ред. Е.Г. Плотниковой М: Изд-во Юрайт, 2020.

3. Лунгу К.Н. Сборник задач по высшей математике с контрольными работами, М.: Айрис-пресс, 2013.