РАНГ МАТРИЦЫ. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

НЕВЫРОЖДЕННЫЕ МАТРИЦЫ

Основные понятия

Пусть A — квадратная матрица n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица A называется ***невырожденной***, если определитель $\Delta = \det A$ не равен нулю: $\Delta = \det A \neq 0$. В противном случае ($\Delta = 0$) матрица A называется ***вырожденной***.

Матрицей, ***союзной к матрице*** A, называется матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} данной матрицы A (оно определяется так же, как и алгебраическое дополнение элемента определителя).

Матрица A^{-1} называется ***обратной*** матрице A, если выполняется условие

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

где E — единичная матрица того же порядка, что и матрица A. Матрица A^{-1} имеет те же размеры, что и матрица A.

Обратная матрица

Теорема Всякая невырожденная матрица имеет обратную.

❑ Проведем доказательство для случая матрицы 3-го порядка. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \text{причем } \det A \neq 0.$$

Составим союзную матрицу

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

и найдем произведение матриц A и A^*:

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} & \ldots & a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} & \ldots & a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} \\ a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} & \ldots & a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix} = \det A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det A \cdot E,$$

т. е.

$$A \cdot A^* = \det A \cdot E.$$

Здесь мы использовали свойства 7 и 8 определителей

Аналогично убеждаемся, что

$$A^* \cdot A = \det A \cdot E.$$

Равенства $A \cdot A^* = \det A \cdot E.$ и $A^* \cdot A = \det A \cdot E.$

перепишем в виде $A \cdot \dfrac{A^*}{\det A} = E$ $\quad \dfrac{A^*}{\det A} \cdot A = E.$

Сравнивая полученные результаты с определением (3.1), получаем

$$A^{-1} = \frac{A^*}{\det A}, \quad \text{т. е.} \quad \boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.}$$

Отметим *свойства* обратной матрицы:

1. $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$;
2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;
3. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Пример .1. Найти A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение: 1) Находим $\det A$: $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5 \neq 0$.

2) Находим A^*: $A_{11} = 1$, $A_{21} = -3$, $A_{12} = -(-1) = 1$, $A_{22} = 2$, поэтому $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3) Находим A^{-1}: $A^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

Проверка:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} + \frac{3}{5} & -\frac{6}{5} + \frac{6}{5} \\ -\frac{1}{5} + \frac{1}{5} & \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Пример 2. Определить, при каких значениях λ существует матрица, обратная данной:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \lambda & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

○ Решение: Всякая невырожденная матрица имеет обратную. Найдем определитель матрицы A:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \lambda & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 0 + 2\lambda - 12 - 0 + 2\lambda = 4\lambda - 9.$$

Если $4\lambda - 9 \neq 0$, т. е. $\lambda \neq \frac{9}{4}$, то $\Delta A \neq 0$, т. е. матрица A невырожденная, имеет обратную. ●

Пример 3. Показать, что матрица A является обратной для B, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

◕ Решение: Найдем произведение матриц A и B:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3-3+1 & -3+5-2 & 1-2+1 \\ 3-6+3 & -3+10-6 & 1-4+3 \\ 3-9+6 & -3+15-12 & 1-6+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Аналогично $B \cdot A = E$. Следовательно, матрица A является обратной для B.

Найти (методом элементарных преобразований) матрицу, обратную к данной:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

● Записывая матрицу $\Gamma = (A|E)$ размера (3×6), с помощью элементарных преобразований над строками приведем ее сначала к ступенчатому виду $\Gamma_1 = (A_1|B)$, а затем к виду $\Gamma_2 = (E|A^{-1})$:

$$\Gamma = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mathrm{II} - \mathrm{I} \\ \mathrm{III} - 2 \cdot \mathrm{I} \end{array} \sim \Gamma_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \mathrm{II} + \mathrm{III} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{III} : 2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1/2 \end{array}\right)^{\mathrm{I} - \mathrm{II} - \mathrm{III}} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -1 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1/2 \end{array}\right) = \Gamma_2.$$

Итак, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3/2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Сделаем проверку:

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3/2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу A размера $m \times n$.

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{13} \\ a_{23} \end{matrix} & \begin{matrix} \ldots \\ \ldots \end{matrix} & \begin{matrix} a_{1n} \\ a_{2n} \end{matrix} \\ a_{31} \quad a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} \quad a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Выделим в ней k строк и k столбцов ($k \leqslant \min(m; n)$). Из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов, составим определитель k-го порядка. Все такие определители называются *минорами этой матрицы*. В матрице A пунктиром выделен минор 2-го порядка. (Заметим, что таких миноров можно составить $C_m^k \cdot C_n^k$ штук, где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ — число сочетаний из n элементов по k.)

Наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля, называется ***рангом матрицы***. Обозначается r, $r(A)$ или $\operatorname{rang} A$.

Очевидно, что $0 \leqslant r \leqslant \min(m; n)$, где $\min(m; n)$ — меньшее из чисел m и n.

Минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется ***базисным***. У матрицы может быть несколько базисных миноров.

Для следующей матрицы A ее ранг равен 1:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r(A) = 1.$$

Любой из миноров 2-го порядка матрицы A равен нулю, и существует хотя бы один минор 1-го порядка, не равный нулю, например, $|3| = 3$. Базисным минором матрицы A является каждый из ненулевых миноров 1-го порядка: $|3|(=3)$, $|-2|(=-2)$, $|2|(=2)$.

Для следующей матрицы A ее ранг равен 2:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad r(A) = 2,$$

так как существует минор 2-го порядка $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6$, не равный нулю, а миноров 3-го порядка у матрицы A нет. Единственный базисный минор матрицы A — минор $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$.

Теорема 1. При элементарных преобразованиях ранг матрицы не изменяется.

Теорема 2. . Ранг ступенчатой матрицы равен количеству ее ненулевых строк.

Метод элементарных преобразований нахождения ранга матрицы заключается в том, что матрицу A приводят к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований; количество ненулевых строк полученной ступенчатой матрицы есть искомый ранг матрицы A.

Метод окаймляющих миноров нахождения ранга матрицы A состоит в следующем. Необходимо:

1) Найти какой-нибудь минор M_1 первого порядка (т. е. элемент матрицы), отличный от нуля. Если такого минора нет, то матрица A нулевая и $r(A) = 0$.

2) Вычислять миноры 2-го порядка, содержащие M_1 (*окаймляющие* M_1) до тех пор, пока не найдется минор M_2, отличный от нуля. Если такого минора нет, то $r(A) = 1$, если есть, то $r(A) \geqslant 2$. И т. д.

...

k) Вычислять (если они существуют) миноры k-го порядка, окаймляющие минор $M_{k-1} \neq 0$. Если таких миноров нет, или они все равны нулю, то $r(A) = k - 1$; если есть хотя бы один такой минор $M_k \neq 0$, то $r(A) \geqslant k$, и процесс продолжается.

При нахождении ранга матрицы таким способом достаточно на каждом шаге найти *всего один* ненулевой минор k-го порядка, причем искать его только среди миноров, содержащих минор $M_{k-1} \neq 0$.

Найти ранг матрицы методом элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

❍ Приведем матрицу к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 2\cdot\mathrm{II}-\mathrm{I} \\ 2\cdot\mathrm{III}-\mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -9 & -3 & -12 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mathrm{III}+3\cdot\mathrm{II} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полученная ступенчатая матрица содержит две ненулевые строки, значит ее ранг равен 2. Следовательно, ранг исходной матрицы также равен 2.

Пример. Найти ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

❍ Решение: Все миноры 3-го порядка равны нулю. Есть минор 2-го порядка, отличный от нуля $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$. Значит, $r(A) = 2$. Базисный минор стоит на пересечении 2 и 3 строки с 1 и 3 столбцами.

Отметим *свойства ранга матрицы*:

1. При транспонировании матрицы ее ранг не меняется.
2. Если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд, то ранг матрицы не изменится.
3. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы

Ранг канонической матрицы равен числу единиц на главной диагонали. На этом основан один из способов вычисления ранга матрицы.

Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} -5 \\ 1 \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & -3 & -2 & -2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -15 & -6 & -9 \end{pmatrix} \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -15 & -6 & -9 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} & 5 & 2 & 3 \end{array} \end{array} \sim \begin{array}{c} \\ \\ 3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} & -1 & & \end{array} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

то есть

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, ранг матрицы A равен $r(A) = 2$.

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Основные понятия

Системой линейных алгебраических уравнений, содержащей m уравнений и n неизвестных, называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где числа a_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ называются *коэффициентами* системы, числа b_i — *свободными членами*. Подлежат нахождению числа x_n.

Такую систему удобно записывать в компактной ***матричной форме***

$$\boxed{A \cdot X = B.}$$

Здесь A — матрица коэффициентов системы, называемая *основной матрицей:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — вектор-столбец из неизвестных x_j,

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ — вектор-столбец из свободных членов b_i.

Произведение матриц $A \cdot X$ определено, так как в матрице A столбцов столько же, сколько строк в матрице X (n штук).

Расширенной матрицей системы называется матрица $\overline{A}$ системы, дополненная столбцом свободных членов

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Решением системы называется n значений неизвестных $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, $\ldots$, $x_n = c_n$, при подстановке которых все уравнения системы обращаются в верные равенства. Всякое решение системы можно записать в виде матрицы-столбца

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Система уравнений называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение, и ***несовместной***, если она не имеет ни одного решения.

Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения. В последнем случае каждое ее решение называется *частным решением* системы. Совокупность всех частных решений называется *общим решением*.

Решить систему – это значит выяснить, совместна она или несовместна. Если система совместна, найти ее общее решение.

Две системы называются *эквивалентными* (равносильными), если они имеют одно и то же общее решение. Другими словами, системы эквивалентны, если каждое решение одной из них является решением другой, и наоборот.

Эквивалентные системы получаются, в частности, при *элементарных преобразованиях* системы при условии, что преобразования выполняются лишь над строками матрицы.

Система линейных уравнений называется *однородной*, если все свободные члены равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Однородная система всегда совместна, так как $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ является решением системы. Это решение называется *нулевым* или *тривиальным*.

Решение систем линейных уравнений. Теорема Кронекера–Капелли

Пусть дана произвольная система m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Теорема *Кронекера–Капелли.*

Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы системы равен рангу основной матрицы

Теорема Если ранг совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение

Теорема . Если ранг совместной системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесчисленное множество решений

Исследовать систему линейных уравнений;

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_3 = 16. \end{cases}$$

❍ Приведем к ступенчатому виду расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 16 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mathrm{II}-\mathrm{I} \\ \mathrm{III}+2\cdot\mathrm{I} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{III}-2\cdot\mathrm{II} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Так как

$$r(A) = r(A|B) = 2 < 3 = n,$$

то *система совместна и неопределенна* (т. е имеет бесконечно много решений).

Правило решения произвольной системы линейных уравнений

1. Найти ранги основной и расширенной матриц системы. Если $r(A) \neq r(\overline{A})$, то система несовместна.

2. Если $r(A) = r(\overline{A}) = r$, система совместна. Найти какой-либо базисный минор порядка r (напоминание: минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется базисным). Взять r уравнений, из коэффициентов которых составлен базисный минор (остальные уравнения отбросить). Неизвестные, коэффициенты которых входят в базисный минор, называют *главными* и оставляют слева, а остальные $n - r$ неизвестных называют *свободными* и переносят в правые части уравнений.

3. Найти выражения главных неизвестных через свободные. Получено общее решение системы.

4. Придавая свободным неизвестным произвольные значения, получим соответствующие значения главных неизвестных. Таким образом можно найти частные решения исходной системы уравнений.

Пример. Исследовать на совместность систему

$$\begin{cases} x + \ \ y = 1, \\ 3x + 3y = -2. \end{cases}$$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad r(A) = 1,$$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad r(\overline{A}) = 2 \quad \left(\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \neq 0\right).$$

Таким образом, $r(A) \neq r(\overline{A})$, следовательно, система несовместна.

Пример . Решить систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

Решение: $r(A) = r(\overline{A}) = 2$. Берем два первых уравнения:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1. \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = 1 - x_1 + 2x_2, \\ x_3 - x_4 = -1 - x_1 + 2x_2. \end{cases} \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 - x_1 + 2x_2 & 1 \\ -1 - x_1 + 2x_2 & -1 \end{vmatrix} = 2x_1 - 4x_2,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 - x_1 + 2x_2 \\ 1 & -1 - x_1 + 2x_2 \end{vmatrix} = -2.$$

Следовательно, $x_3 = -x_1 + 2x_2$, $x_4 = 1$ — общее решение. Положив, например, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, получаем одно из частных решений: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$.

Решение невырожденных линейных систем. Формулы Крамера

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

или в матричной форме $A \cdot X = B$.

Основная матрица A такой системы квадратная. Определитель этой матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называется *определителем системы*. Если определитель системы отличен от нуля, то система называется *невырожденной*.

Найдем решение данной системы уравнений в случае $\Delta \neq 0$.

Умножив обе части уравнения $A \cdot X = B$ слева на матрицу A^{-1}, получим $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$. Поскольку $A^{-1} \cdot A = E$ и $E \cdot X = X$, то

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot B.}$$

Отыскание решения системы по формуле (4.1) называют *матричным способом* решения системы.

Матричное равенство (4.1) запишем в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

то есть

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \cdots + A_{n1}b_n}{\Delta} \\ \dfrac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \cdots + A_{n2}b_n}{\Delta} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \cdots + A_{nn}b_n}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$x_1 = \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \cdots + A_{n1}b_n}{\Delta},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_n = \frac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \cdots + A_{nn}b_n}{\Delta}.$$

Но $A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \cdots + A_{n1}b_n$ есть разложение определителя

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ .. & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

по элементам первого столбца. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

Итак, $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$.

Аналогично: $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, где Δ_2 получен из Δ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов; $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}, \dots$ $\dots, x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}$.

Формулы

$$\boxed{x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1, n}}$$

называются ***формулами Крамера.***

Итак, невырожденная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет единственное решение, которое может быть найдено матричным способом либо по формулам Крамера

Пример 4.3. Решить систему $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + 3x_2 = 7. \end{cases}$

Решение: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 7$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 14$.

Значит, $x_1 = \frac{7}{7} = 1$, $x_2 = \frac{14}{7} = 2$.

Пример Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 12, \\ x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

методом Крамера.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= (1 \cdot 1 - 3 \cdot 1) - (2 \cdot 1 - 1 \cdot 1) = -3.$$

Решение. Имеем

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 12 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 1 & 12 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -6, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 15 \end{vmatrix} = -9.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 3.$$

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ.

Пусть система из n линейных уравнений с n неизвестными записана в матричной форме:

$$AX = B,$$

где $A = (a_{ij})$ — матрица коэффициентов системы размера $n \times n$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — столбец неизвестных, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ — столбец свободных членов.

Если D — определитель матрицы A — не равен нулю, то система совместна и определенна, ее решение задается формулой:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Решить систему уравнений с помощью обратной матрицы: $\begin{cases} x_1 - x_2 = -1, \\ 2x_1 + x_2 = 7. \end{cases}$

Составим матрицу (A_{ij}) из алгебраических дополнений:

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем матрицу $\widetilde{A} = (A_{ij})^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Найдем матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Найдем решение системы уравнений:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot (-1) + \frac{1}{3} \cdot 7 \\ -\frac{2}{3} \cdot (-1) + \frac{1}{3} \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $(2; 3)$.

Матричные уравнения простейшего вида с неизвестной матрицей X записываются следующим образом

$$AX = B,$$

$$XA = B,$$

$$AXC = B.$$

В этих уравнениях A, B, C, X — матрицы таких размеров, что все используемые операции умножения возможны, и с обеих сторон от знаков равенства находятся матрицы одинаковых размеров.

Если в уравнениях матрица A невырожденная, то их решения записываются следующим образом:

$$X = A^{-1}B,$$

$$X = BA^{-1}.$$

Если в уравнении матрицы A и C невырождены, то его решение записывается так:

$$X = A^{-1}BC^{-1}.$$

Пример Решить уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$.

Решение. Это уравнение вида $AX = B$, его решением является матрица $X = A^{-1}B$.

Найдем обратную к матрице $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$:

$$\det A = -2,\ A_{11} = 4,\ A_{12} = -3,\ A_{21} = -2,\ A_{22} = 4,$$

тогда

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } X = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Матрица, обратная к матрице $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ имеет

вид $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Пример. Решить уравнение

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Решение. Это уравнение вида $A \cdot X \cdot B = C$; его решением является матрица $X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$.

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{(-1)} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{(-2)} \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -19 & -22 \\ -43 & -50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Пример Решить уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Это уравнение вида $XA = B$, поэтому используем схему $\left(A^T | X^T\right) \sim \left(E | X^T\right)$, где $X -$ искомая матрица.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 1 & -5 & -8 & -5 & -2 \\ 3 & -3 & 2 & 3 & 9 & 15 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & 9 & 15 \\ 0 & 11 & -10 & -8 & -5 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & 9 & 15 \\ 0 & 0 & -19 & -57 & -114 & -171 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & 9 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & 9 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -3 & -6 & -9 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & 15 & 24 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & 9 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & 9 \end{array}\right).$$

Тогда $X=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$