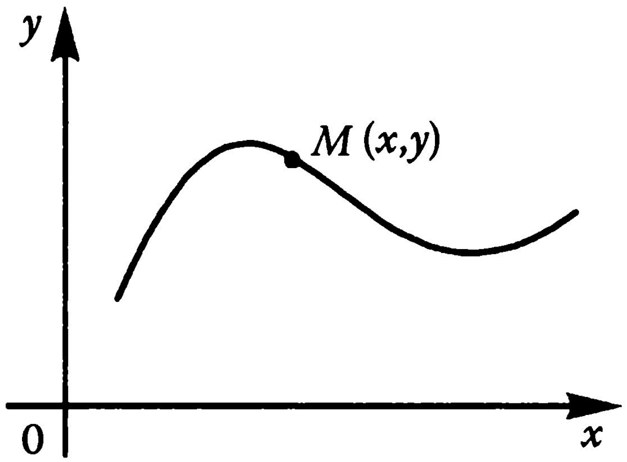
Линейные образы на плоскости и в пространстве

Уравнение линии на плоскости



Уравнение линии является важнейшим понятием аналитической геометрии.

Пусть мы имеем на плоскости некоторую линию (кривую)

Координаты x и y точки, лежащей на этой линии, не могут быть произвольными, они должны быть определенным образом связаны. Такая связь аналитически записывается в виде некоторого уравнения.

Определение. ***Уравнением линии (кривой) на плоскости*** *Oxy называется уравнение, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки данной линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.*

В общем случае уравнение линии может быть записано в виде $F(x, y) = 0$ или (если это возможно) $y = f(x)$, где $F(x, y)$ и $y = f(x)$ — некоторые функции

Если точка $M(x, y)$ передвигается по линии, то ее координаты, изменяясь, удовлетворяют уравнению этой линии. Поэтому координаты $M(x, y)$ называются *текущими* координатами (от слова «текут», меняются).

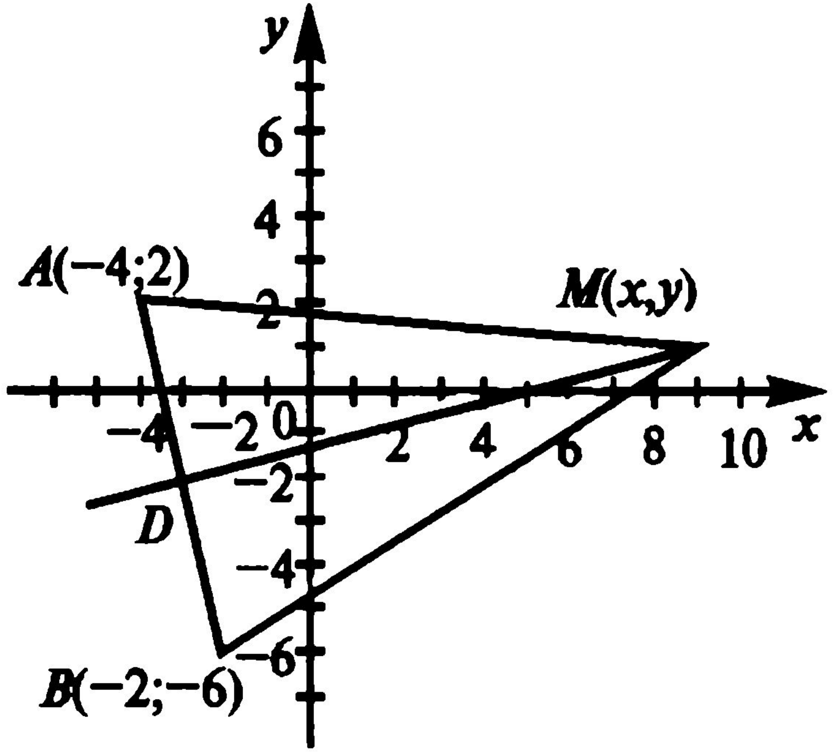
Пример Найти уравнение множества точек, равноудаленных от точек $A(-4; 2)$ и $B(-2; -6)$.

Р е ш е н и е. Расстояние между двумя точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ определяется по формуле (3.5):

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Если $M(x, y)$ — произвольная точка искомой линии, то согласно условию имеем $AM = BM$ или, учитывая

$$\sqrt{(x+4)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y+6)^2}.$$



Возведя обе части уравнения в квадрат, получим после преобразований уравнение $x - 4y - 5 = 0$ или $y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$.

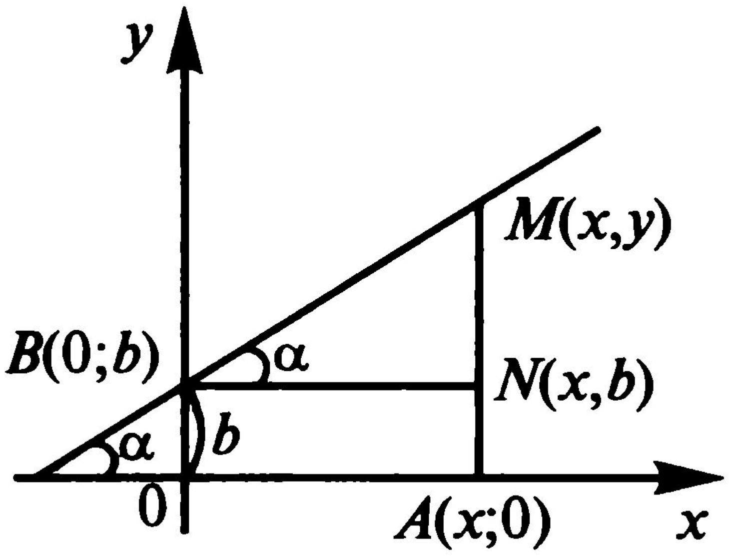
Очевидно, это уравнение прямой MD — перпендикуляра, восставленного из середины отрезка AB

Любую линию в принципе можно выразить соответствующим уравнением (хотя на практике это не всегда просто сделать). Однако не всякое уравнение определяет на плоскости некоторую линию.

Например, уравнение $x^2 + y^2 = 0$ определяет только одну точку (0; 0), а уравнение $x^2 + y^2 + 7 = 0$ не определяет никакого множества точек, ибо левая часть уравнения не может равняться нулю.

Чтобы убедиться, лежит ли точка $M(a, b)$ на данной линии $F(x, y) = 0$, надо проверить, удовлетворяют ли координаты этой точки уравнению $F(x, y) = 0$.

Уравнение прямой



Пусть прямая пересекает ось Oy в точке B (0; b) и образует с осью Ox угол α $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$

Возьмем на прямой произвольную точку M (x, y). Тогда тангенс угла α наклона прямой найдем из прямоугольного треугольника MBN:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{MN}{NB} = \frac{y-b}{x}.$$

Введем *угловой коэффициент* прямой $k = \operatorname{tg} \alpha$; получим

$$k = \frac{y-b}{x}$$

и

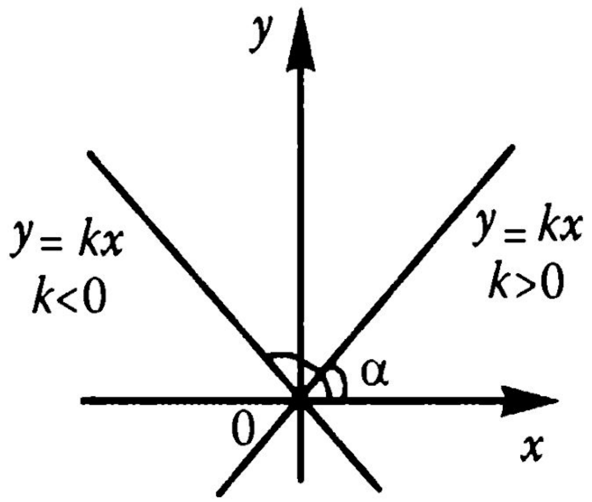
$$y = kx + b.$$

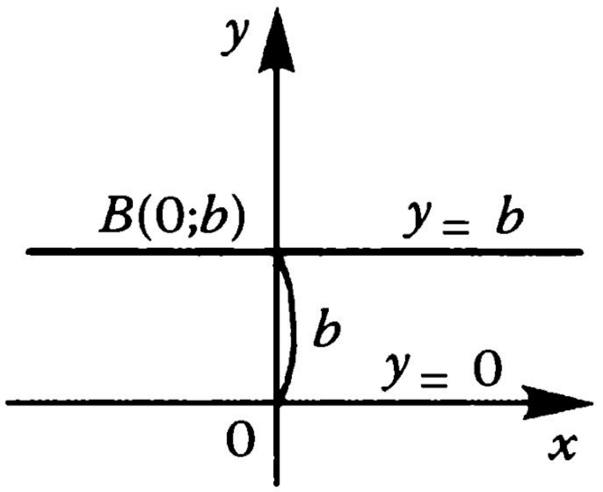
Можно показать, что формула остается справедливой и для случая $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

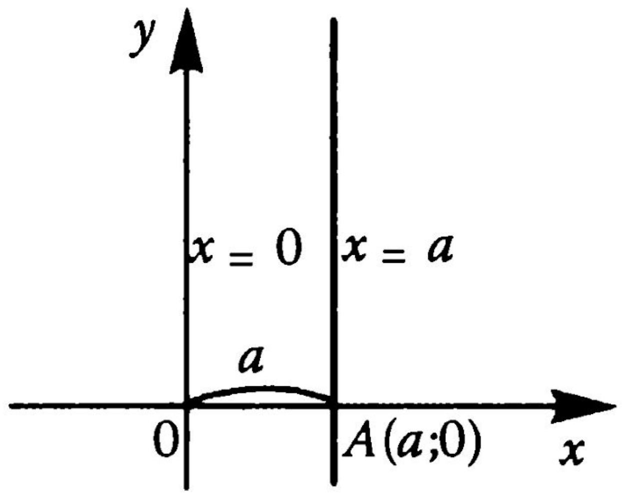
Итак, мы доказали, что координаты каждой точки прямой удовлетворяют уравнению $y = kx + b$. Нетрудно показать, что координаты любой точки, не лежащей на прямой, не удовлетворяют уравнению $y = kx + b$.

Уравнение $y = kx + b$ называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом.*

Рассмотрим частные случаи уравнения $y = kx + b$.

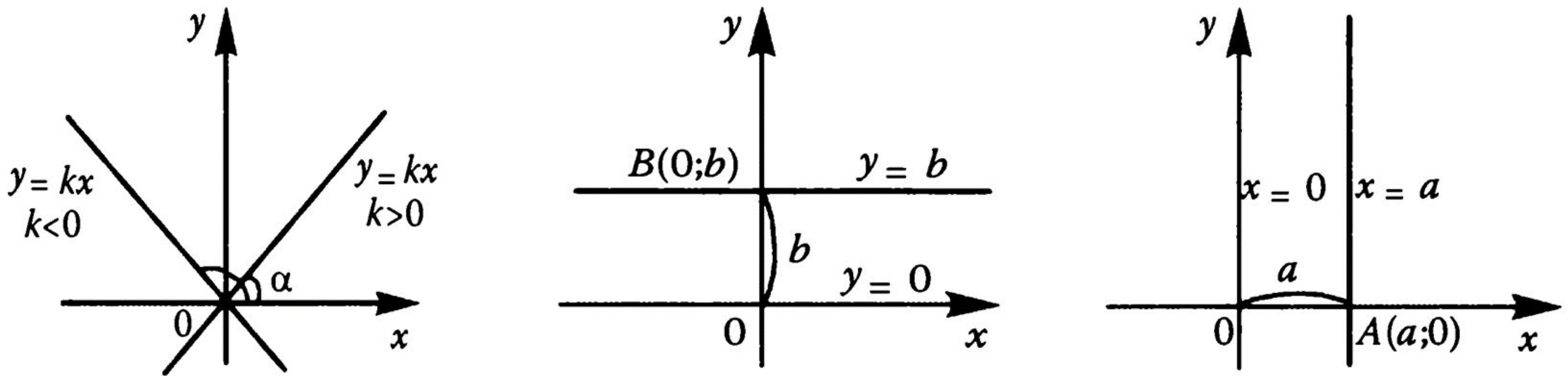




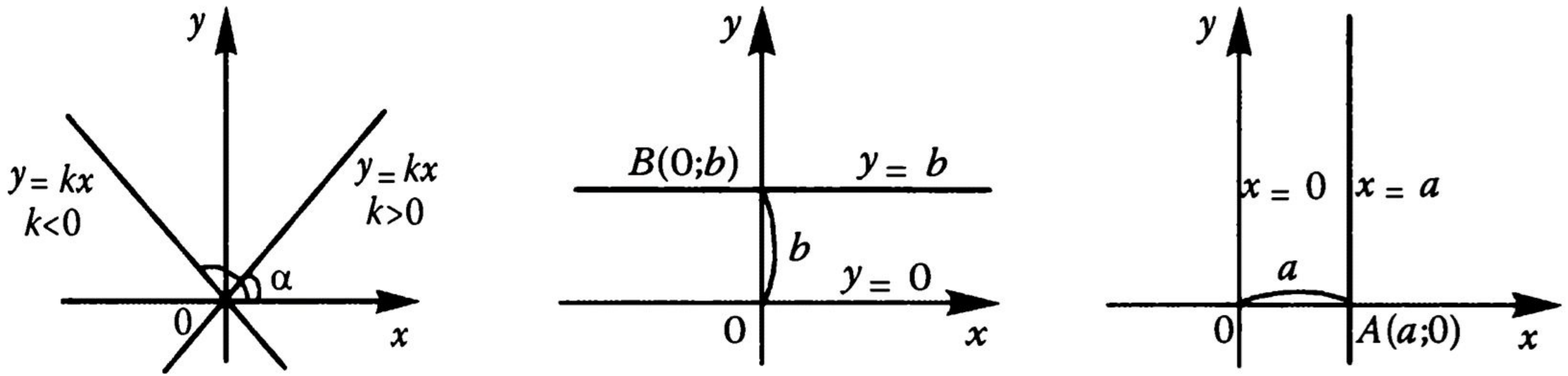


1. Если $b = 0$, то получаем $y = kx$ — уравнение прямой, проходящей через начало координат и образующей при $k = \operatorname{tg} \alpha > 0$ острый угол α с осью Ox, а при $k = \operatorname{tg} \alpha < 0$ — тупой угол

В частности, уравнение биссектрисы I и III координатных углов имеет вид $y = x$ (так как $k = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$), а уравнение биссектрисы II и IV координатных углов $y = -x$ ($k = \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} = -1$).



2. Если $\alpha = 0$, то $k = \operatorname{tg} 0 = 0$, и уравнение прямой, параллельной оси Ox, имеет вид $y = b$, а самой оси Ox – вид $y = 0$

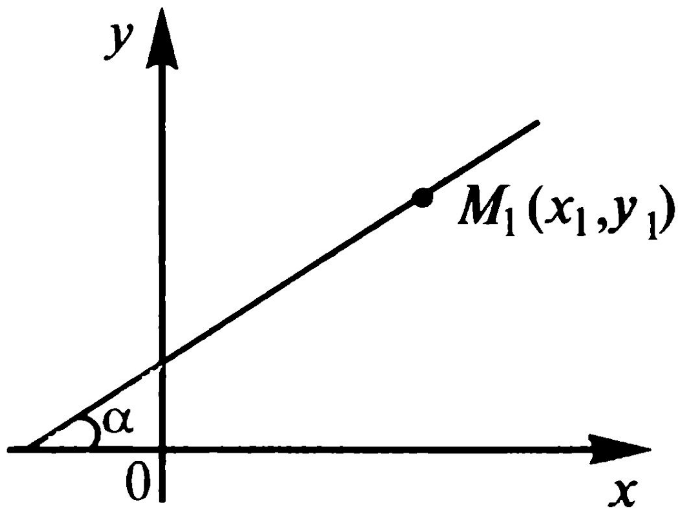


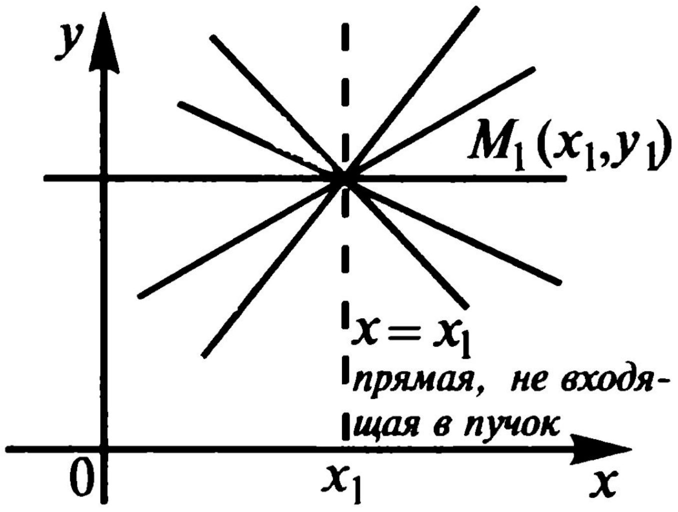
3. Если $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, то прямая перпендикулярна оси Ox

и $k = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}$ не существует, т.е. вертикальная прямая не

имеет углового коэффициента. Предположим, что эта прямая отсекает на оси Ox отрезок, равный a. Очевидно, что уравнение такой прямой $x = a$ (так как абсцисса любой точки прямой равна a), а уравнение оси Oy есть $x = 0$.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении. Пусть прямая проходит через точку $M_1(x_1, y_1)$ и образует с осью Ox угол $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$

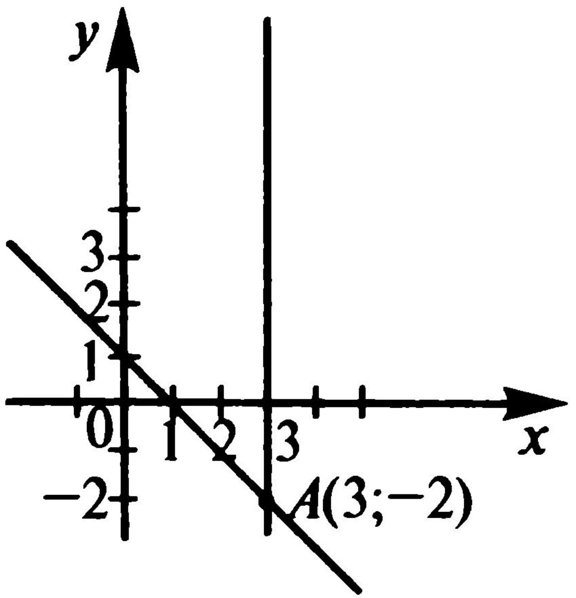




Так как точка $M(x_1, y_1)$ лежит на прямой, то ее координаты удовлетворяют уравнению $y = kx + b$, т.е. $y_1 = kx_1 + b$.

Вычитая второе равенство из первого получим уравнение искомой прямой $y - y_1 = k(x - x_1)$.

Уравнение пучка прямых. Если в уравнении k — произвольное число, то это уравнение определяет *пучок прямых*, проходящих через точку $M_1(x_1, y_1)$, кроме прямой, параллельной оси Oy и не имеющей углового коэффициента



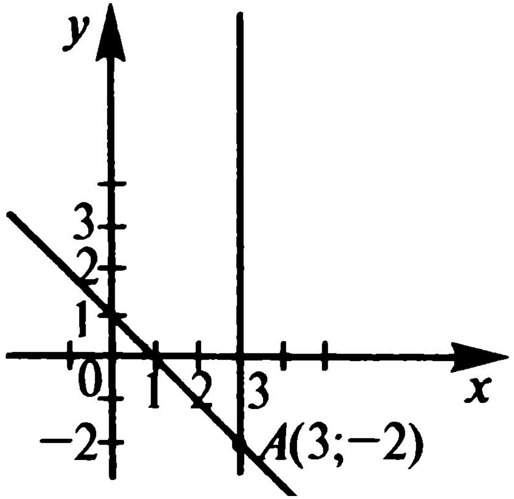
Пример 1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A (3;−2): а) под углом 135° к оси Ox; б) параллельно оси Oy. 2. Найти уравнение пучка прямых.

Р е ш е н и е. 1. а) угловой коэффициент прямой $k = \text{tg } 135° = -1$.

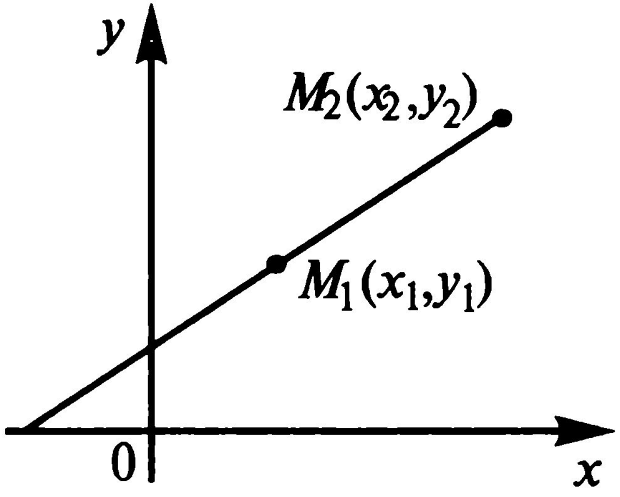
Уравнение прямой, проходящей через точку A (3; −2) , по формуле имеет вид $y + 2 = -1\ (x - 3)$ или

$y = -x + 1$

2. Уравнение пучка прямых, проходящих через точку A (3; −2), имеет вид $y + 2 = k(x - 3)$. ▶



Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Пусть даны две точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ и $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$.



Для составления уравнения прямой $M_1 M_2$ запишем уравнение пучка прямых, проходящих через точку M_1:

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Так как точка $M_2(x_2, y_2)$ лежит на данной прямой, то чтобы выделить ее из пучка, подставим координаты точки M_2 в уравнение пучка $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$ и найдем угловой коэффициент прямой

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Теперь уравнение искомой прямой примет вид

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\ (x - x_1)$$

или

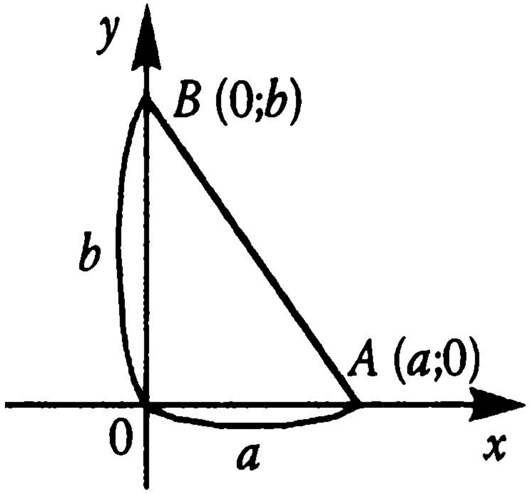
$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Пример Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A\ (-5;\ 4)$ и $B\ (3;\ -2)$.

Р е ш е н и е. По уравнению $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

$\dfrac{y-4}{-2-4} = \dfrac{x+5}{3+5}$, откуда после преобразований $y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{4}$. ▶

Уравнение прямой в отрезках. Найдем уравнение прямой по заданным отрезкам $a \neq 0$ и $b \neq 0$, отсекаемым на осях координат. Используя , уравнение прямой,



проходящей через точки $A\ (a;\ 0)$ и $B\ (0;\ b)$,

примет вид $$\frac{y-0}{b-0} = \frac{x-a}{0-a}$$

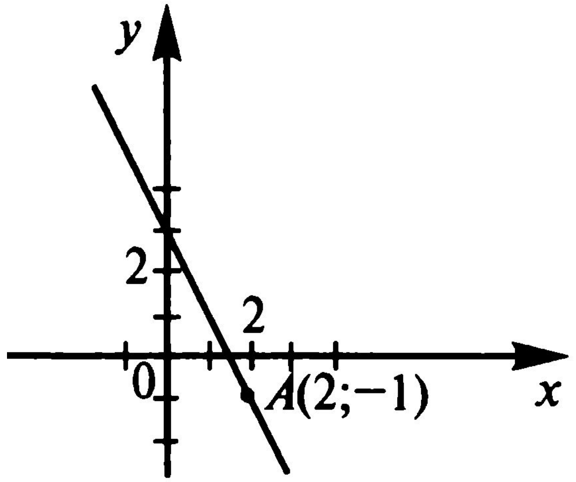
или после преобразований

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Уравнение называется *уравнением прямой в отрезках.*

Пример Составить уравнение прямой, проходящей через точку A (2; −1), если эта прямая отсекает от положительной полуоси Oy отрезок, вдвое больший, чем на положительной полуоси Ox

Р е ш е н и е. По условию $b = 2a$ ($a > 0$, $b > 0$). Подставляя это выражение в уравнение , получим $\frac{x}{a} + \frac{y}{2a} = 1$.



Так как точка A (2; −1) лежит на прямой, то ее координаты удовлетворяют этому уравнению, т.е. $\frac{2}{a} - \frac{1}{2a} = 1$, откуда $a = 1{,}5$.

Итак, уравнение искомой прямой имеет вид $\frac{x}{1{,}5} + \frac{y}{3} = 1$ или $y = -2x + 3$. ▶

Общее уравнение прямой и его исследование. Рассмотрим уравнение первой степени с двумя переменными в общем виде

$$Ax + By + C = 0,$$

в котором коэффициенты A и B не равны одновременно нулю, т.е. $A^2 + B^2 \neq 0$.

1. Пусть $B \neq 0$. Тогда уравнение можно записать в виде

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Обозначим $k = -A/B$, $b = -C/B$. Если $A \neq 0$, $C \neq 0$, то получим $y = kx + b$ (уравнение прямой с угловым коэффициентом); если $A \neq 0$, $C = 0$, то $y = kx$ (уравнение прямой, проходящей через начало координат); если $A = 0$, $C \neq 0$, то $y = b$ (уравнение прямой, параллельной оси Oy); если $A = 0$, $C = 0$, то $y = 0$ (уравнение оси Ox).

2. Пусть $B = 0$, $A \neq 0$. Тогда уравнение $Ax + By + C = 0$ примет вид

$x = -\dfrac{C}{A}$. Обозначим $a = -C/A$. Если $C \neq 0$, то получим $x = a$ (уравнение прямой, параллельной оси Oy); если $C = 0$, то $x = 0$ (уравнение оси Oy).

Условия параллельности и перпендикулярности прямых. Расстояние от точки до прямой

Угол между двумя прямыми. Пусть заданы две прямые

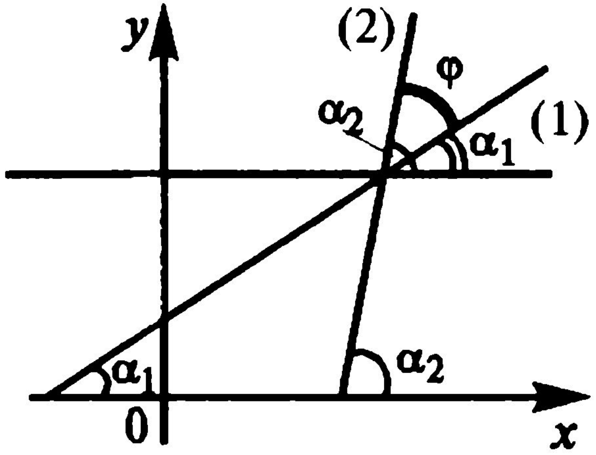
$y = k_1 x + b_1$ (1),

$y = k_2 x + b_2$ (2)

и требуется определить угол φ между ними. Из рис. видно, что $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$,

причем $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$, $k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$,

$\alpha_1 \neq \pi/2$, $\alpha_2 \neq \pi/2$.



Тогда

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2}$$

или

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2},$$

где стрелка означает, что угол φ получается поворотом прямой (1) к прямой (2) против часовой стрелки.

Условия параллельности и перпендикулярности прямых. Если прямые $y = k_1 x + b_1$ (1) и $y = k_2 x + b_2$ (2) параллельны, то угол $\varphi = 0$ и $\operatorname{tg} \varphi = 0$, откуда из формулы $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$ $k_1 = k_2$. И наоборот, если $k_1 = k_2$, то по формуле $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$ $\operatorname{tg} \varphi = 0$ и $\varphi = 0$. Таким образом, *равенство угловых коэффициентов является необходимым и достаточным условием параллельности двух прямых.*

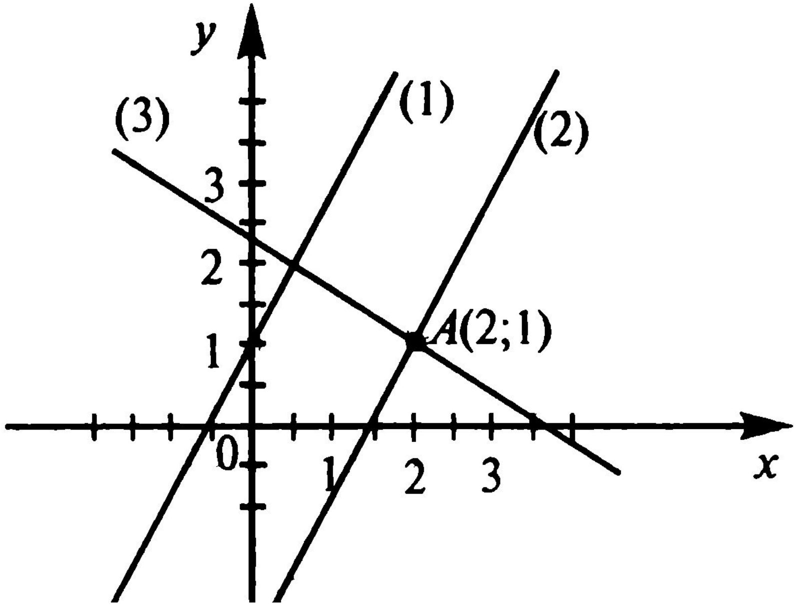
Если прямые перпендикулярны, то $\varphi = \pi/2$, при этом $\operatorname{ctg} \varphi = \operatorname{ctg}(\pi/2) = 0$ или $\operatorname{ctg} \varphi = \dfrac{1}{\operatorname{tg} \varphi} = \dfrac{1 + k_1 k_2}{k_2 - k_1} = 0$, откуда $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$ или $k_1 k_2 = -1$. Справедливо также и обратное утверждение.

Таким образом, *для перпендикулярности прямых необходимо и достаточно, чтобы их угловые коэффициенты были обратны по величине и противоположны по знаку.*

Если прямые заданы общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ (1) и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ (2), то учитывая, что их угловые коэффициенты $k_1 = -A_1/B_1$ и $k_2 = -A_2/B_2$, условие параллельности прямых $k_1 = k_2$ примет вид $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$. Следовательно, *условием параллельности прямых, заданных общими уравнениями, является пропорциональность коэффициентов при переменных.*

Условие перпендикулярности прямых $k_1k_2 = -1$ в этом случае примет вид $\left(-\frac{A_1}{B_1}\right)\left(-\frac{A_2}{B_2}\right) = -1$ или $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$, т.е. *условием перпендикулярности двух прямых, заданных общими уравнениями, является равенство нулю суммы произведений коэффициентов при переменных x и y.*

Пример Составить уравнения двух прямых, проходящих через точку A (2; 1), одна из которых параллельна прямой $3x - 2y + 2 = 0$, а другая перпендикулярна той же прямой.



Р е ш е н и е. Уравнение пучка прямых, проходящих через точку A (2; 1), имеет вид $y - 1 = k(x-2)$. Из этого пучка надо выделить две прямые (2) и (3) — параллельную и перпендикулярную данной. Угловой коэффициент прямой (1) $k_1 = 3/2$ (так как уравнение прямой (1) можно представить в виде $y = \frac{3}{2}x + 1$). По условию параллельности угловой коэффициент прямой (2) $k_2 = k_1 = 3/2$ и ее уравнение имеет вид $y - 1 = \frac{3}{2}(x - 2)$ или $3x - 2y - 4 = 0$. По условию перпендикулярности угловой коэффициент прямой (3) $k_3 = -\dfrac{1}{k_1} = -\dfrac{2}{3}$ и уравнение этой прямой $y - 1 = -\dfrac{2}{3}(x - 2)$ или $2x + 3y - 7 = 0$.

Задачу можно решить и другим способом. Прямая $Ax + By + C = 0$ будет параллельна прямой $3x - 2y + 2 = 0$, если ее коэффициенты при x и y пропорциональны, т.е. $\dfrac{A}{3} = \dfrac{B}{-2}$. Взяв $A = 3$, $B = -2$ (при коэффициенте пропорциональности, равном 1), получим уравнение $3x - 2y + C = 0$. Коэффициент C найдем с учетом того, что координаты точки A (2; 1), лежащей на прямой, должны удовлетворять ее уравнению, т.е. $3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + C = 0$, откуда $C = 4$ и уравнение прямой (2) $3x - 2y - 4 = 0$.

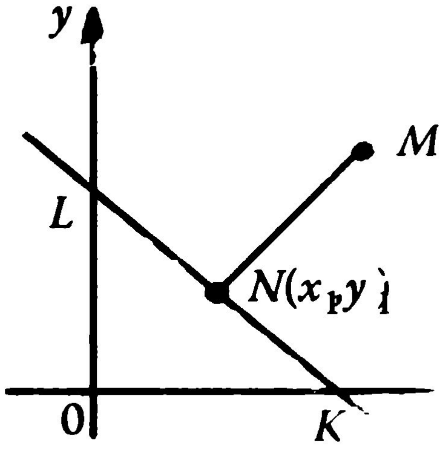
Уравнение прямой, перпендикулярной данной $3x - 2y + 2 = 0$, будет иметь вид: $2x + 3y + C = 0$ (ибо в этом случае сумма произведений коэффициентов при переменных x и y равна нулю, т.е. $3 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 = 0$). Теперь подставляя координаты точки A (2; 1) в уравнение прямой, получим $2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + C = 0$, откуда $C = -7$ и уравнение прямой (3) $2x - 3y - 7 = 0$. ▶

Точка пересечения прямых. Пусть даны две прямые $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$. Очевидно, координаты их точки пересечения должны удовлетворять уравнению каждой прямой, т.е. они могут быть найдены из системы

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Если прямые не параллельны, т.е. $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$, то решение системы дает единственную точку пересечения прямых.

Расстояние от точки до прямой. Пусть даны точка $M(x_0, y_0)$ и прямая $Ax + By + C = 0$. Под расстоянием от точки M до прямой KL понимается длина перпендикуляра $d = MN$, опущенного из точки M на прямую KL



Для определения расстояния d необходимо: а) составить уравнение прямой MN перпендикулярной данной и проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$; б) найти точку $N(x_1, y_1)$ пересечения прямых, решив систему уравнений этих прямых; в) по формуле $d = \sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

определить расстояние между двумя точками, т.е. найти $d = MN$. В результате преобразований получим

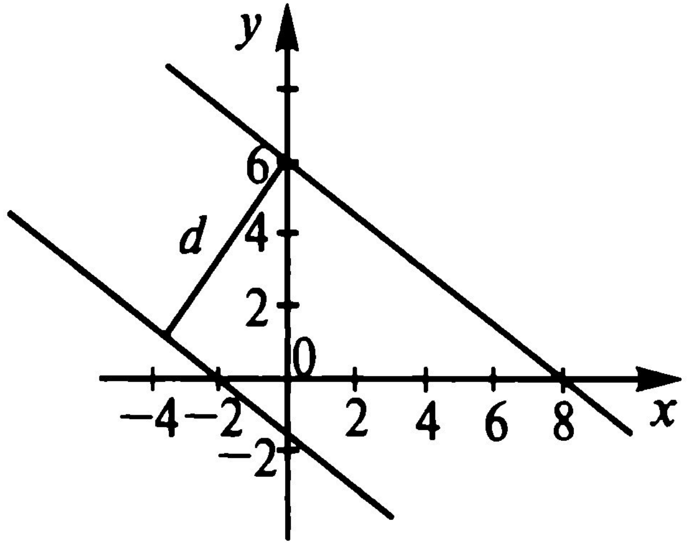
$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Пример Найти расстояние

между параллельными прямыми

$3x + 4y - 24 = 0$ и $3x + 4y + 6 = 0$.

Р е ш е н и е. Возьмем на одной из прямых, например прямой $3x + 4y - 24 = 0$, произвольную точку A (0; 6)



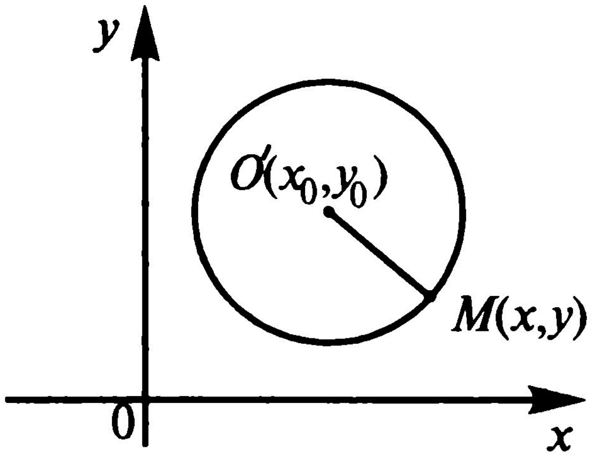
Тогда искомое расстояние равно расстоянию от точки A до прямой $3x + 4y + 6 = 0$:

$$d = \frac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot 6 + 6|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 6.$$ ►

Окружность и эллипс

Изучение *кривых второго порядка,* описываемых уравнениями второй степени с двумя переменными, начнем с окружности.

Пусть дана окружность радиуса R с центром $O'(x_0, y_0)$



Найдем ее уравнение. Для произвольной точки $M(x, y)$ окружности выполняется равенство $OM = R$. Используя формулу

$$d = \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

расстояния между двумя точками, получим

$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R$ или после возведения в квадрат (двух положительных частей уравнения) получим равносильное уравнение

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 .$$

Итак, координаты каждой точки окружности $M(x, y)$ удовлетворяют уравнению . Нетрудно показать, что координаты любой точки, не лежащей на окружности, этому уравнению не удовлетворяют.

Уравнение называется ***нормальным уравнением окружности.*** В частности, уравнение окружности с центром в начале координат ($x_0 = y_0 = 0$) имеет вид

$$x^2 + y^2 = R^2 .$$

Рассмотрим уравнение второй степени с двумя переменными в общем виде

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

в котором A, B и C не равны нулю одновременно, т.е. $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Выясним, при каких условиях это уравнение является уравнением окружности. С этой целью представим уравнение

в виде

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0.$$

Чтобы уравнения
$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$
$$x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+x_0^2+y_0^2-R^2=0$$ представляли одну и ту же линию, коэффициент B должен равняться нулю, т.е. $B=0$, а все остальные коэффициенты — пропорциональны, в частности $\dfrac{A}{1}=\dfrac{C}{1}$, откуда $A=C\neq 0$ (ибо $A^2+B^2+C^2\neq 0$, а $B=0$). Тогда получим уравнение
$$Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F=0,$$
называемое *общим уравнением окружности.*

Поделив обе части уравнения на $A\neq 0$ и дополнив члены, содержащие x и y, до полного квадрата, получим

$$\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2A}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2}.$$

Сравнивая уравнение с уравнением окружности $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ можно сделать вывод, что уравнение $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, есть уравнение действительной окружности, если 1) $A=C$; 2) $B=0$; 3) $D^2+E^2-4AF>0$. При выполнении этих условий центр окружности расположен в точке $O\left(-\frac{D}{2A};-\frac{E}{2A}\right)$, а ее радиус $R=$

$$=\frac{\sqrt{D^2+E^2-4AF}}{2|A|}.$$

Пример

Найти координаты центра и радиус окружности

$$x^2 + y^2 + 16y - 9 = 0.$$

Р е ш е н и е. Дополнив члены, содержащие y, до полного квадрата, получим

$x^2 + (y^2 + 16y + 64) - 64 - 9 = 0$, или

$x^2 + (y+8)^2 = 73$, т.е. центр окружности в точке $O\,(0; -8)$, а ее радиус $R = \sqrt{73}$. ▶

Рассмотрим уравнение кривой второго порядка, в котором по-прежнему будем полагать $B = 0$. Перепишем уравнение в виде

$$A\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2 + C\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2 = \frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}-F$$

или

$$A(x - x_0)^2 + C(y - y_0)^2 = \delta,$$

где

$$x_0 = -\frac{D}{2A};\ y_0 = -\frac{E}{2C};\ \delta = \frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}-F.$$

Будем предполагать для простоты исследования, что центр кривой находится в начале координат, т.е. $x_0 = y_0 = 0$. Тогда уравнение кривой примет вид $Ax^2 + Cy^2 = \delta.$

Кривая второго порядка называется ***эллипсом*** (точнее *кривой эллиптического типа*), если коэффициенты A и C имеют одинаковые знаки.

$$Ax^2 + Cy^2 = \delta$$

Для определенности будем полагать, что $A > 0$, $C > 0$ (в противном случае обе части уравнения можно умножить на (-1).

Возможны три случая:

а) $\delta > 0$; б) $\delta = 0$; в) $\delta < 0$.

Очевидно, что в третьем случае (при $\delta < 0$) кривая не имеет действительных точек, а во втором случае (при $\delta = 0$) кривая представляет собой одну точку $O\,(0;\ 0)$. Поэтому остановимся на первом случае ($\delta > 0$).

Получаемое при этом уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

называется *каноническим уравнением эллипса* с полуосями $a = \sqrt{\frac{\delta}{A}}$ и $b = \sqrt{\frac{\delta}{C}}$

При $a = b$ уравнение представляет

частный случай — уравнение окружности $x^2 + y^2 = a^2$.

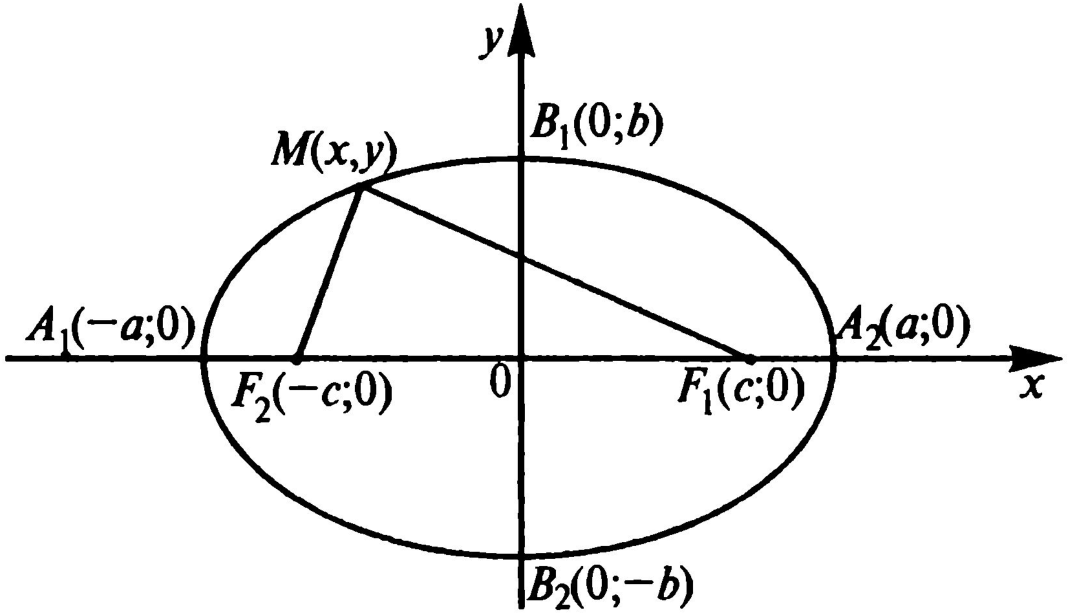
Точки $F_1(-c;\ 0)$ и $F_2(c;\ 0)$, где[1]

$$c = \sqrt{a^2 - b^2},$$

называются *фокусами* эллипса, а отношение

$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$

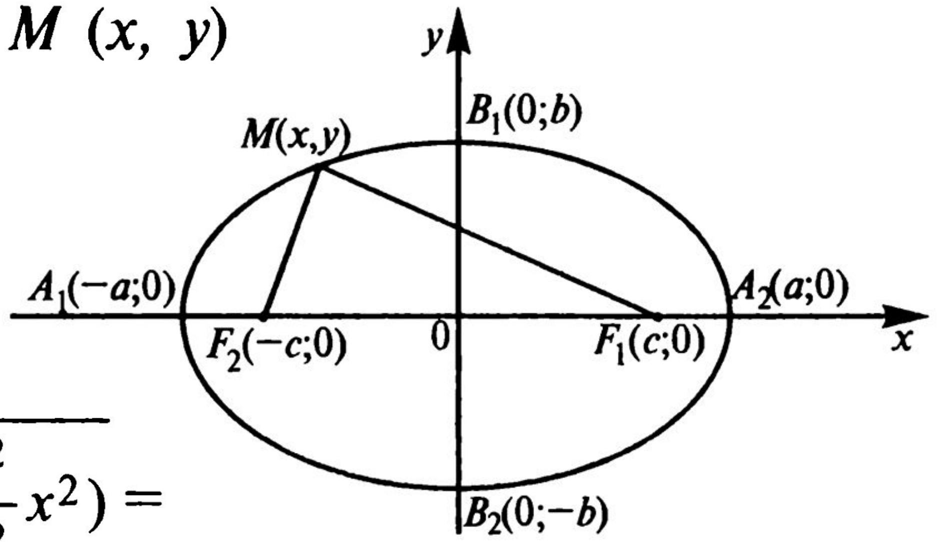
его *эксцентриситетом.*



Эксцентриситет характеризует форму эллипса. Очевидно, что $0 \le \varepsilon \le 1$, причем для окружности $\varepsilon = 0$.

Точки $A_1(-a;\ 0)$, $A_2(-a;\ 0)$, $B_1(0;\ b)$, $B_2(0;\ -b)$ называются *вершинами* эллипса.

Найдем сумму расстояний от любой точки эллипса $M\ (x,\ y)$ до ее фокусов, используя формулу



$$d = F_2M + MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\ .$$

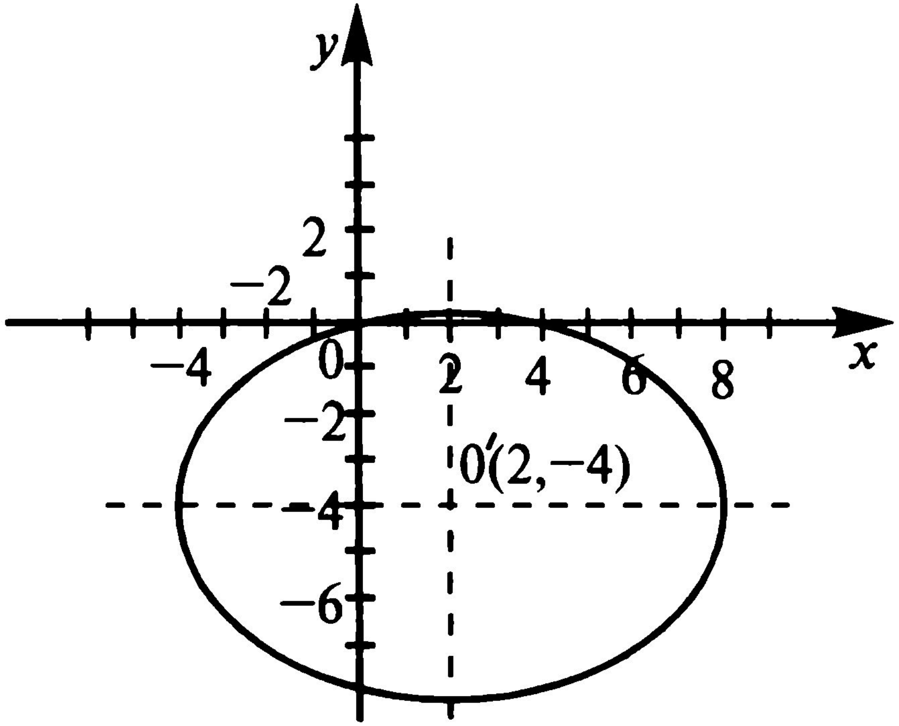
$$F_2M = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2cx + (a^2 - b^2) + (b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2)} =$$

$$= \sqrt{(1 - \frac{b^2}{a^2})x^2 + 2cx + a^2} = \sqrt{(\frac{c}{a}x + a)^2} = a + \varepsilon x.$$

Аналогично можно получить, что $MF_1 = a - \varepsilon x$. В результате $d = F_2M + MF_1 = (a + \varepsilon x) + (a - \varepsilon x) = 2a$, т.е. *для любой точки эллипса сумма расстояний этой точки до фокусов есть величина постоянная, равная 2а.* Это *характеристическое свойство эллипса* часто принимается за определение эллипса.

Пример Определить вид и расположение кривой

$$x^2+2y^2-4x+16y=0.$$



Р е ш е н и е. Так как $A=1$ и $C=2$ — числа одного знака, то данное уравнение кривой — эллиптического типа. Дополняя члены, содержащие x и y, до полного квадрата, получим $(x-2)^2+2(y+4)^2=36$ или

$$\frac{(x-2)^2}{6^2}+\frac{(y+4)^2}{(3\sqrt{2})^2}=1.$$

Следовательно, кривая представляет эллипс с полуосями $a=6$ и $b=3\sqrt{2}$, центр которого находится в точке $O'(2;-4)$

Гипербола и парабола

Кривая второго порядка $Ax^2 + Cy^2 = \delta$ называется ***гиперболой*** (точнее *кривой гиперболического типа*), если коэффициенты A и C имеют противоположные знаки, т.е. $AC < 0$.

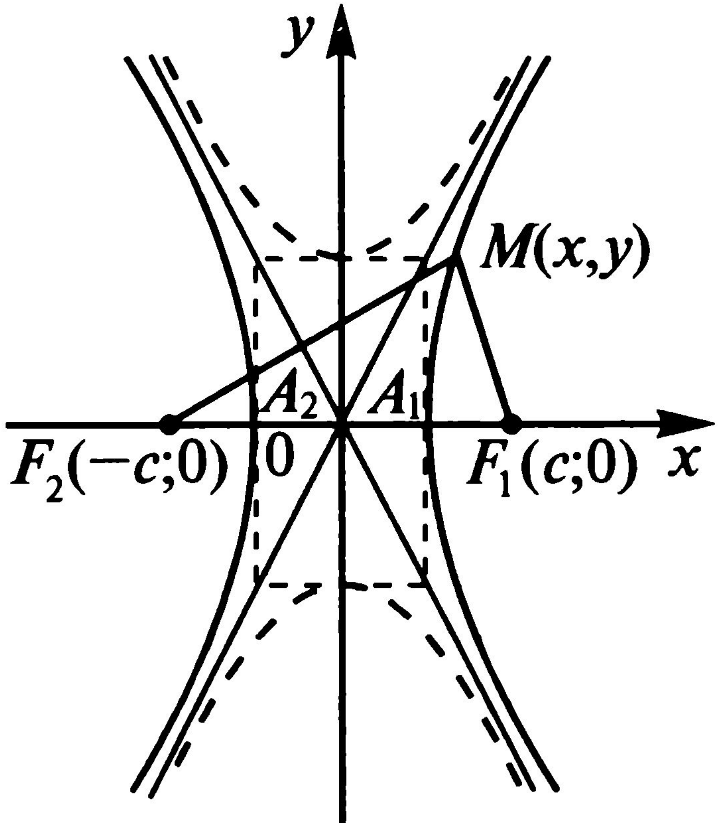
Пусть для определенности $A > 0$, $C < 0$. Возможны три случая: 1) $\delta > 0$; 2) $\delta = 0$; 3) $\delta < 0$.

В первом случае (при $\delta > 0$) имеем гиперболу, каноническое уравнение которой

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $a = \sqrt{\frac{\delta}{A}}$ — действительная полуось; $b = \sqrt{\frac{\delta}{-C}}$ — мнимая полуось

Фокусы гиперболы — точки $F_1(c;\ 0)$ и $F_2(-c;\ 0)$, где $c = \sqrt{a^2+b^2}$, а ее эксцентриситет $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ принимает любые значения, бо́льшие 1. Вершины гиперболы — точки $A_1(a;\ 0)$, $A_2(-a;\ 0)$.



Можно показать (аналогично тому, как мы поступали при исследовании эллипса), что *для любой точки гиперболы абсолютная величина разности ее расстояний до фокусов есть величина постоянная, равная* $2a$: $d = \left|F_2M - MF_1\right| = 2a$. Это *характеристическое свойство гиперболы* часто принимается за определение гиперболы.

Перепишем уравнение гиперболы в виде

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\ .$$

При достаточно больших x $\sqrt{x^2 - a^2} \approx \sqrt{x^2} = x$ и уравнение

примет вид $y \approx \pm\frac{b}{a}x$, т.е. при $x \to \infty$ ветви гиперболы как

угодно близко подходят к прямым $y = \pm\frac{b}{a}x$, называемым *асимптотами гиперболы.*

Для равносторонней гиперболы ($a = b$) $x^2 - y^2 = a^2$ асимптоты $y = \pm x$ взаимно перпендикулярны и представляют биссектрисы координатных углов.

Во втором случае (при $\delta = 0$) уравнение кривой примет

вид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, т.е. получаем пару пересекающихся прямых

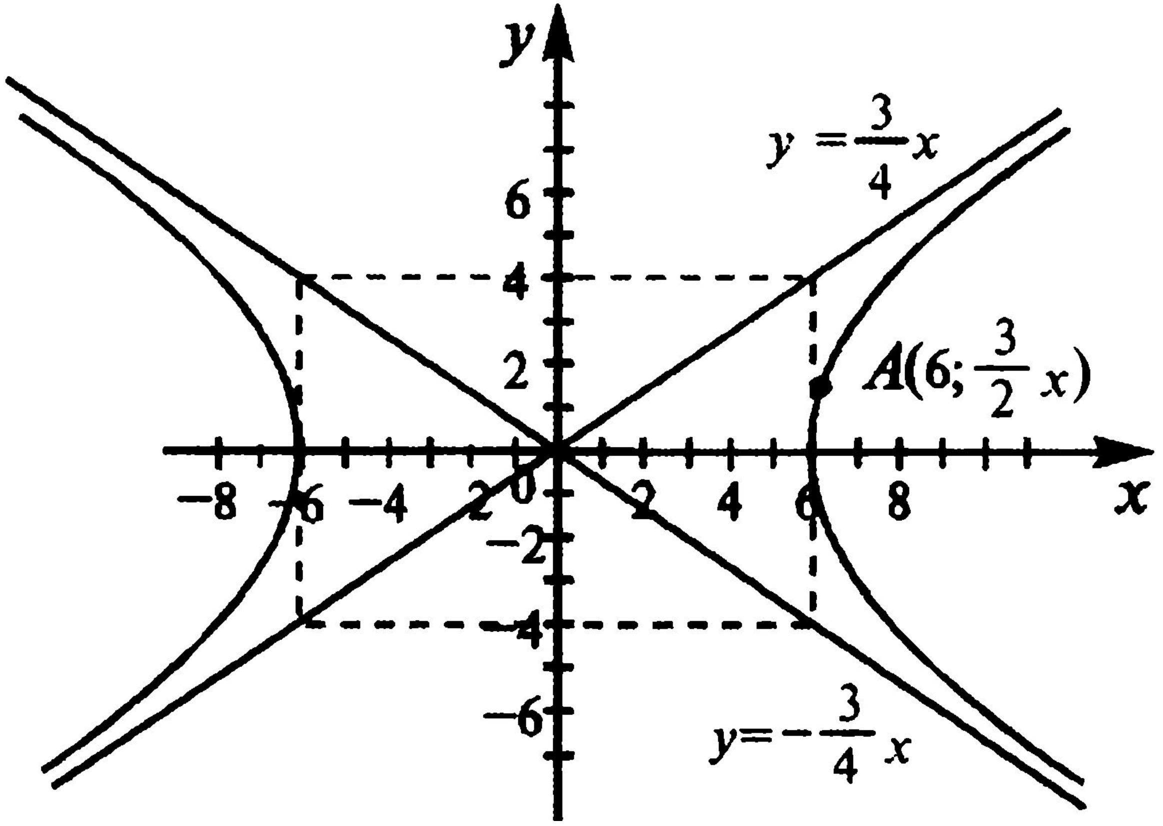
$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \text{ и } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0.$$

В третьем случае (при $\delta < 0$) получим гиперболу $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$

с полуосями $a = \sqrt{\dfrac{\delta}{-A}}$ и $b = \sqrt{\dfrac{\delta}{C}}$, называемую *сопряженной* с гиперболой

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1,$ (на рис. она изображена пунктиром).

Пример Написать уравнение гиперболы с асимптотами $y = \pm\frac{3}{4}x$, проходящими через точку (6; 3/2). Найти расстояние между ее вершинами.



Р е ш е н и е. Так как точка (6; 3/2) лежит на гиперболе, то ее координаты должны удовлетворять уравнению

$$\frac{36}{a^2} - \frac{9}{4b^2} = 1.$$

Кроме того, $\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$, так как асимптоты гиперболы $y = \pm\frac{3}{4}x$. Решая полученную систему двух уравнений, найдем $a = 4\sqrt{2}$, $b = 3\sqrt{2}$, т.е. уравнение гиперболы $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{18} = 1$. Расстояние между вершинами гиперболы равно $2a = 8\sqrt{2}$. ▶

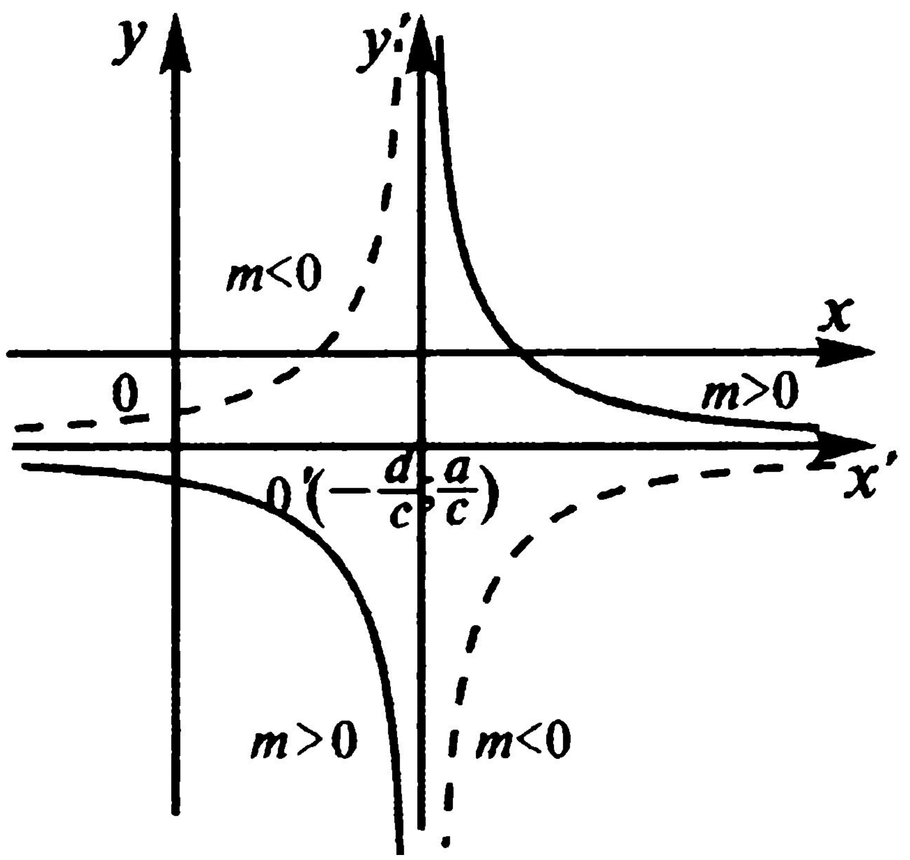
Рассмотрим график **дробно-линейной функции**

$$y = \frac{ax+b}{cx+d},$$

где $c \neq 0$, $bc - ad \neq 0$.

Преобразуя , получим

$$y = \frac{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)} = \frac{a\left[\left(x+\frac{d}{c}\right)+\frac{b}{a}-\frac{d}{c}\right]}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c} + \frac{(bc-ad)/c^2}{x+\frac{d}{c}}.$$



Введем новые координаты

$$x+\frac{d}{c}=x',\ y-\frac{a}{c}=y'.$$

Обозначим $m=(bc-ad)/c^2$. Тогда в новой системе координат $Ox'y'$, полученной параллельным переносом осей координат, с новым центром в точке $O'\ (-\frac{d}{c};\ \frac{a}{c})$ (см. рис. 4.23) уравнение примет вид $y'=\frac{m}{x'}$ или $x'y'=m$.

Итак, *график дробно-линейной функции есть равносторонняя гипербола с асимптотами* $x=-\frac{d}{c}$; $y=\frac{a}{c}$, *параллельными осям координат.*

Пусть в уравнении кривой второго порядка $B = 0$, а также один из коэффициентов A или C равен нулю; для определенности $A = 0$, $C \neq 0$, т.е.

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Пусть также $D \neq 0$ (в противном случае мы имели бы пару параллельных горизонтальных прямых $y = y_1$ и $y = y_2$, где y_1 и y_2 — корни уравнения $Cy^2 + Ey + F = 0$ или отсутствие каких-либо линий и точек вообще). Дополним члены, содержащие y, до полного квадрата

$$C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = -Dx - F + \frac{E^2}{4C}.$$

Полагая $x_0 = -\frac{F}{D} + \frac{E^2}{4DC}$, $y_0 = -\frac{E}{2C}$, $2p = -\frac{D}{C}$, получим

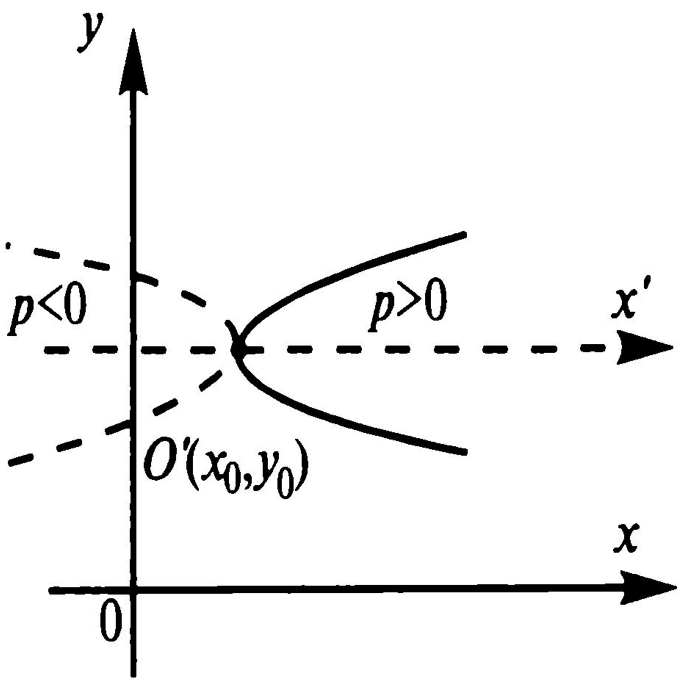
$$(y - y_0)^2 = 2p\,(x - x_0).$$

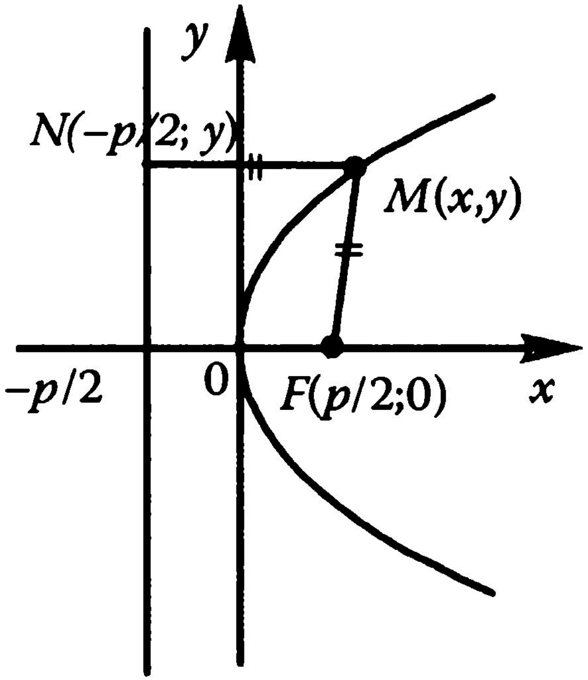
Кривая называется ***параболой,*** а точка $O'(x_0, y_0)$ — *вершиной* параболы, p — *параметром* параболы. При $p > 0$ ветви параболы направлены вправо, при $p < 0$ — влево

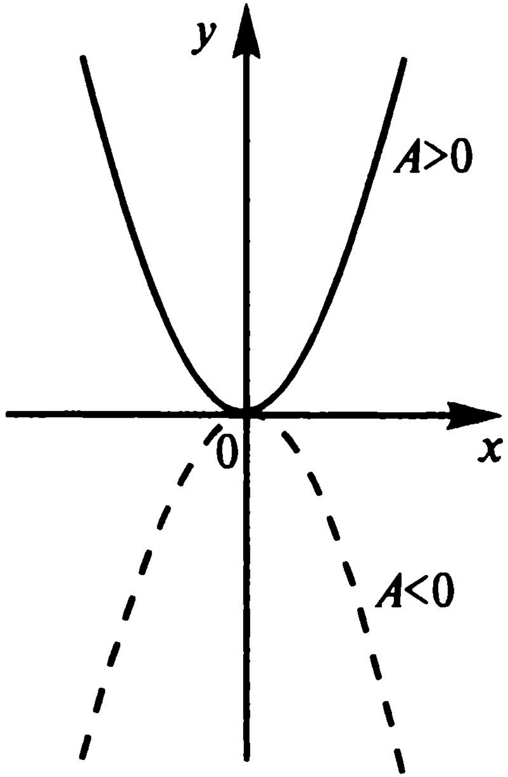
Прямая $y = y_0$ является осью симметрии параболы.

Если вершина параболы находится в начале координат, то уравнение принимает вид

$$y^2 = 2px.$$







Точка $F\ (\frac{p}{2};\ 0)$ называется *фокусом* параболы, а прямая $x = -\frac{p}{2}$ — ее *директрисой.*

Для произвольной точки $M\ (x,\ y)$ параболы расстояние до фокуса по формуле равно

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + 2px} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = x + \frac{p}{2}$$

(так как $x + \frac{p}{2} \geq 0$). С другой стороны, расстояние до директрисы $MN = x + \frac{p}{2}$

Таким образом, *парабола представляет множество всех точек плоскости, равноотстоящих от данной точки* (*фокуса*) *и от данной прямой* (*директрисы*). Это *характеристическое свойство параболы* часто принимается за определение параболы.

Если в уравнении поменять местами x и y, то получим $x^2 = 2py$ — уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси ординат. Это уравнение обычно записывают в виде $y = Ax^2$, где $A = \dfrac{1}{2p}$. При $A > 0$ ветви параболы направлены вверх, при $A < 0$ — вниз

Рассмотрим **квадратный трехчлен** $y = Ax^2 + Bx + C$ $(A \neq 0)$.

Отсюда $y - A(x^2 + \dfrac{B}{A}x + \dfrac{C}{A})$. Дополнив выражение, стоящее в скобках, до полного квадрата, получим

$$y = A\left[\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2 + \frac{C}{A} - \frac{B^2}{4A^2}\right] = A\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2 + \frac{4AC-B^2}{4A}.$$

Обозначив $x+\dfrac{B}{2A}=x'$, $y-\dfrac{4AC-B^2}{4A}=y'$, в новой системе координат $O'x'y'$ с центром $O'\left(-\dfrac{B}{2A},\ \dfrac{4AC-B^2}{4A}\right)$ уравнение примет вид $y' = Ax'^2$.

Таким образом, график квадратного трехчлена $y = Ax^2 + Bx + C$ есть парабола с вершиной в точке $O'\left(-\dfrac{B}{2A},\ \dfrac{4AC-B^2}{4A}\right)$ и осью симметрии $x = -\dfrac{B}{2A}$, параллельной оси Oy.

Пример Построить кривую $y = -3x^2 + 10x - 3$.

Р е ш е н и е. Вынося коэффициент при x^2 и дополняя правую часть уравнения до полного квадрата, получим

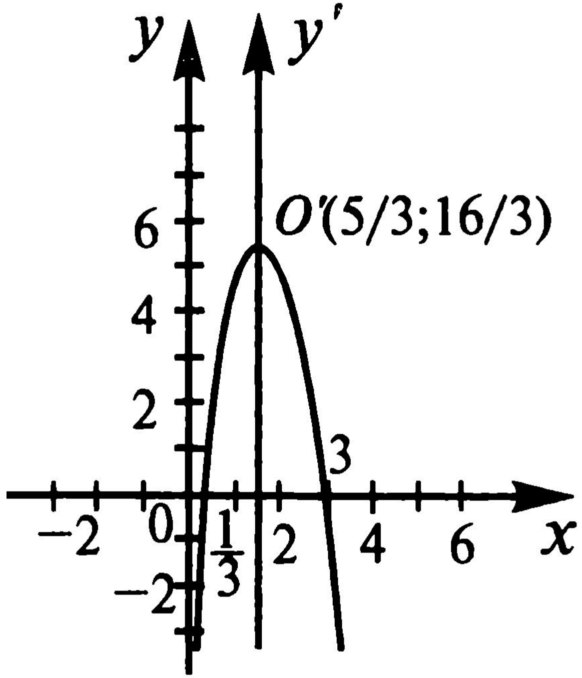
$$y = -3(x^2 - \frac{10}{3}x + 1) = -3\left[\left(x-\frac{5}{3}\right)^2 + 1 - \frac{25}{9}\right] = -3\left(x-\frac{5}{3}\right)^2 + \frac{16}{3}$$

или $y - \dfrac{16}{3} = -3\left(x-\dfrac{5}{3}\right)^2$. Полагая

$$x-\frac{5}{3} = x',\ y-\frac{16}{3} = y',$$

получим

$$y' = -3x'^2.$$



Таким образом, заданная кривая есть парабола с вершиной в точке $O'\left(\frac{5}{3}; \frac{16}{3}\right)$ и осью симметрии $O'y'$, параллельной оси Oy