ПРЕДИКАТЫ

Вводный курс математики

Предикаты

“x – четное число”

$P(x_1,\ldots,x_n)$ – n-местный предикат, определенный на множестве X

P(x): “x>0” определен на Q

P(2)= И

P(-3/4)= Л

T(x;y): “x – делитель числа y” определен на Z

T(3;7)= Л

T(-10;30)= И

Предикаты

$P(x_1,\ldots,x_n)$ – n-местный предикат, определенный на множестве X

$$I = \{ (a_1,\ldots,a_n) \mid P(a_1,\ldots,a_n)=И \}$$

– область истинности

A={3; 5; 12}

P(x): “x – простое число”

$I_P = \{3; 5\}$

T(x;y): “x – делитель числа y”

$I_T = \{(3;3), (3;12), (5;5), (12;12)\}$

Операции над предикатами

P(x), Q(x) – предикаты, определенные на множестве X

$\rceil$ P(x) - отрицание

P(x) & Q(x) - конъюнкция

P(x) V Q(x) - дизюнъюнкция

P(x) => Q(x) - импликация

P(x) <=> Q(x) – эквиваленция

Операции над предикатами

P(x): “x>5”; Q(x): “x≤10” – предикаты, определенные на множестве R

$\rceil$ P(x) : “x≤5”

P(x) & Q(x) : “x>5 и x≤10”

P(x) & Q(x) : “5<x≤10”

P(x) V Q(x) : “x>5 или x≤10”

P(x) V Q(x) : “x – любое действительное число”

Предикаты

P(x) – предикат, определенный на множестве X

P(x) – тождественно истинный предикат, если P(a)=И при любом $a \in X$

$$I_P = X$$

P(x) – тождественно ложный предикат, если P(a)=Л при любом $a \in X$

$$I_P = \varnothing$$

Кванторы

P(x) – предикат, определенный на множестве X

$\exists$x P(x) – ложное высказывание т.т.т. P(x) – тождественно ложный предикат

$\exists$ - квантор существования

Когда $\exists$x P(x) – истинное высказывание ???

Кванторы

P(x) – предикат, определенный на множестве X

$\forall x\, P(x)$ – истинное высказывание т.т.т. P(x) – тождественно истинный предикат

$\forall$ - квантор всеобщности (общности)

Когда $\forall x\, P(x)$ – ложное высказывание ???

Кванторы

P(x) : “$x>0$”
T(x): “$x^2+1>0$”
K(x): “$x^2+1<0$”   определены на R

$\exists x\, P(x)$ – истинно; $\forall x\, P(x)$ – ложно

$\exists x\, T(x)$ – истинно; $\forall x\, T(x)$ – истинно

$\exists x\, K(x)$ – ложно; $\forall x\, K(x)$ – ложно

Кванторы

P(x,y) “x+y=0” – двуместный предикат, определенный на Z

$\exists x\,(x+y=0)$ – одноместный предикат
x – связанная переменная
y – свободная переменная

$\exists x \forall y\,(x+y=0)$ – нульместный предикат (высказывание)

$\forall x\ \exists y\,(x+y=0)$ – истинное высказывание

$\exists x\ \forall y\,(x+y=0)$ – ложное высказывание

Равносильные предикаты

P(x), Q(x) – предикаты, определенные на множестве X

P(x) равносилен Q(x), если они принимают одинаковые значения истинности при любом значении переменной $x \in X$

$$P(x) \equiv Q(x)$$

$P(x) \equiv Q(x)$ т.и.т. $P \Leftrightarrow Q$ – тождественно истинный предикат

Законы логики

1. Перестановочность одноименных кванторов:
   $\forall x\ \forall y\ P(x,y) \equiv \forall y\ \forall x\ P(x,y)$
   $\exists x\ \exists y\ P(x,y) \equiv \exists y\ \exists x\ P(x,y)$
2. Дистрибутивность $\forall$ относительно &:
   $\forall x\ (P(x) \& Q(x)) \equiv \forall x P(x)\ \&\ \forall x Q(x)$
3. Дистрибутивность $\exists$ относительно V:
   $\exists x\ (P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$
4. Законы отрицания кванторов:
   $\neg \forall x\ P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$
   $\neg \exists x\ P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$

Законы логики

Докажем закон: $\rceil \exists x\, P(x) \equiv \forall x \rceil P(x)$

Пусть $\rceil \exists x\, P(x)$ – истинное высказывание

Тогда $\exists x\, P(x)$ – ложное высказывание

Т.е. $P(x)$ – тождественно ложный предикат

Т.е. $\rceil P(x)$ - тождественно истинный предикат

Т.е. $\forall x \rceil P(x)$ – истинное высказывание

В обратную сторону аналогично