ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

И

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Текущий и итоговый контроль

КОНТР.РАБ. 1 + САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА + КОНТР.РАБ. 2 + ПОСЕЩАЕМОСТЬ +

+ ЕЩЕ ЧТО-ТО = АВТОМАТ (3)

Лекция 2

Часть 2. Содержание

- Предмет ТВ
- Случайное событие
- Вероятность события, классическое определение вероятности

Теория вероятностей (ТВ) – раздел математики, изучающий закономерности, присущие массовым случайным явлениям. При этом изучаемые явления рассматриваются в абстрактной форме, независимо от их конкретной природы.

Предмет ТВ

Предметом теории вероятностей является изучение вероятностных закономерностей массовых однородных случайных событий.

Цель ТВ – осуществление прогноза в области случайных явлений, контроль их, ограничение сферы действия случайности.

Случайный эксперимент

Случайным экспериментом называется некоторый опыт, который может быть неоднократно проведен при одних и тех же условиях, в результате которого могут произойти или не произойти некоторые случайные события.

Случайное событие

Событием в ТВ называется любой факт, который в результате испытания, эксперимента, опыта может произойти или не произойти.

Иногда подчеркивают, что случайное событие – это такое событие, наступление которого мы не можем в точности предвидеть из-за незнания причин, вызывающих его, или событие, которое не обязательно происходит.

Событие – это не происшествие, а теоретический возможный исход эксперимента.

СЛУЧАЙНОЕ СОБЫТИЕ

Случайным событием будем называть высказывание о результатах случайного эксперимента.

A={ высказывание}

Примеры

1) Бросание монеты – эксперимент

A={выпал герб}

B={выпала решка}

2) Бросание игральной кости

A={выпало 2 очка}

B={выпало более чем 4 очка}

C={выпало четное число очков}

3) Стрельба по мишени
4) Вынимание шаров из урны
5) Различные игры (карты, домино и т.д.)
6) Экономические случайные эксперименты
7) Медицинские эксперименты

Виды случайных событий

Событие называется *невозможным*, если оно никогда не может произойти.

Пример

Событие “сейчас в аудитории пойдет град” - невозможное

Событие называется *достоверным*, если оно происходит при любом исходе эксперимента (происходит всегда).

События называются ***несовместными***, если они не могут произойти одновременно.

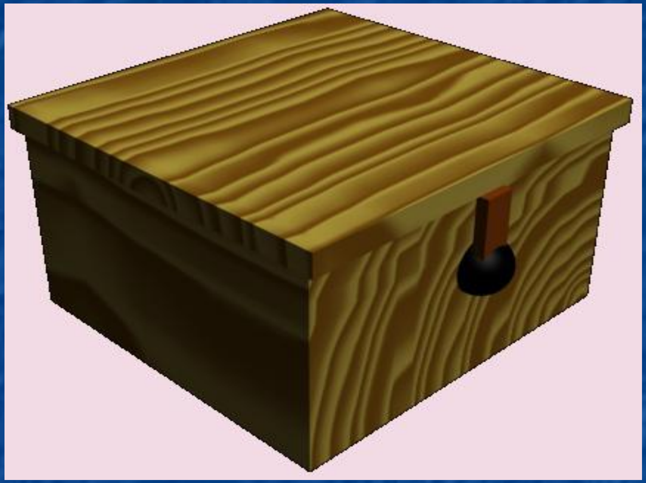
События, которые могут происходить одновременно, называются ***совместными***.

Несколько событий называются ***единственно возможными***, если хотя бы одно из них обязательно произойдет.

Несколько событий образуют ***полную группу***, если они являются единственно возможными и все попарно несовместны.

Другими словами, события образуют ***полную группу***, если в результате испытания заведомо происходит одно и только одно из них.

Пример 1



Из ящика с деталями наудачу извлечена деталь. Появление стандартной детали исключает появление нестандартной детали.

События «появилась стандартная деталь» и «появилась нестандартная деталь» – **несовместные**.

Пример 2

Брошена монета. Появление “ герба “ исключает появление надписи.

События «появился герб» и «появилась надпись» – **несовместные**.

Пример 3

Приобретены два билета денежно – вещевой лотереи. Обязательно произойдет **одно и только одно** из следующих событий: «выигрыш выпал на первый билет и не выпал на второй», «выигрыш не выпал на первый билет и выпал на второй», «выигрыш выпал на оба билета» , «на оба билета выигрыш не выпал».Эти события образуют **полную группу попарно несовместных событий**.

Пример 4

Стрелок произвел выстрел по цели. Обязательно произойдет одно из следующих событий: попадание, промах.

Эти два *несовместных* события образуют **полную группу**.

Равновозможные события

События называют ***равновозможными***, если нет оснований считать, что одно из них происходит чаще, чем другое.

Пример 5

Появление " герба " и появление надписи при бросании монеты – **равновозможные события**.

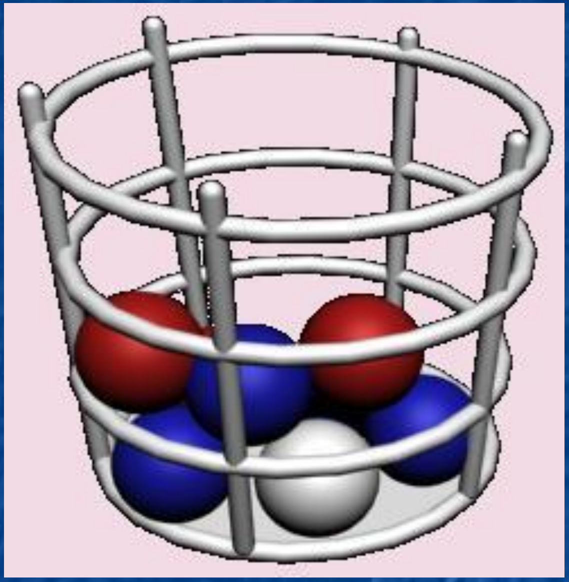
Пример 6

Появление того или иного числа очков на брошенной игральной кости - равновозможные события.

Задание

Приведите примеры на все данные определения.

Классическое определение вероятности



Пример. Пусть в урне содержится ***6*** одинаковых, тщательно перемешанных шаров, причем ***2*** красных, ***3*** синих и белый. Вынут один шар. Чему равна вероятность, что вынут цветной шар?

Вероятность есть число,

характеризующее

частоту появления

события.

Событие ***A*** ={появление цветного шара}.

Каждый из простейших результатов испытания назовём *элементарным исходом* (*элементарным событием*).

Обозначение: $\omega_{i,} i = 1, 2, .., 6$

6 элементарных исходов:

ω_1 - белый шар;

ω_2, ω_3 - красный шар;

$\omega_4, \omega_5, \omega_6$ - синий шар.

Эти исходы образуют *полную группу попарно несовместных событий* и они *равновозможные*.

Те элементарные исходы, в которых интересующее нас событие наступает, назовём *благоприятствующими*.

Благоприятствуют событию ***А*** (появлению цветного шара) *5* исходов:

$$\omega_{2,}\omega_{3,}\omega_{4,}\omega_{5,}\omega_{6.}$$

Отношение числа благоприятствующих событию А элементарных исходов к их общему числу назовем **вероятностью события А** и обозначим

Р(А)

Вероятность того, что взятый шар окажется цветным, равна

$$\mathbf{P\ (A)} = \frac{5}{6}.$$

Классическое определение вероятности

Классической вероятностью события *А* называют **отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу.**

Формула классической вероятности

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n}}$$

m – число элементарных исходов, благоприятствующих ***A***;

n – число всех возможных элементарных исходов испытания.

Свойства вероятности

Свойство 1. **Вероятность достоверного события равна единице.**

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

<u>Свойство 2</u>. **Вероятность невозможного события равна нулю.**

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0$$

Свойство 3. **Вероятность случайного события А есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.**

$$0 \leq P(A) = \frac{m}{n} \leq 1$$

Важно!

Если количество всех исходов бесконечно, то классическое определение не годится, но перечисленные свойства сохраняются.

Пример.

Допустим, что 6 человек приобрели билеты на 10 местный самолет. Других пассажиров не оказалось, и эти шестеро заняли места в салоне случайным образом, не глядя на обозначенные в билетах места. Какова вероятность того, что каждый окажется на своем месте?

Решение.

Это задача о размещениях. Вероятность совпадения – один шанс из числа всех возможных размещений шести элементов на десяти местах.

- *Размещениями* называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком. Число всех возможных размещений

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

В нашем случае

$$A_{10}^{6}=\frac{10!}{6!}=\frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot \ldots \cdot 10}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 5\cdot 6}=$$

$$=7\cdot 8\cdot 9\cdot 10=5040$$

$$P=\frac{1}{5040}$$

Примеры непосредственного вычисления вероятностей

Пример 1

Набирая номер телефона, абонент забыл одну цифру и набрал ее наудачу.

Найти вероятность того, что набрана нужная цифра.

Решение

Обозначим через ***А*** событие – *набрана нужная цифра*. Абонент мог выбрать любую из *10* цифр, поэтому *общее число возможных элементарных исходов* равно *10*.

Эти исходы ***несовместны***, ***равновозможны*** и образуют ***полную группу***.

Благоприятствует событию ***A*** лишь один исход (нужная цифра лишь одна).

Искомая вероятность равна ***отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов***:

$$P(A) = \frac{1}{10}$$

Пример 2

Набирая номер телефона, абонент забыл **две последние** цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу.

Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение

- Обозначим через ***B*** событие – *набраны две нужные цифры*.
- Всего можно набрать столько различных цифр, сколько может быть составлено размещений из десяти цифр по две, т. е.

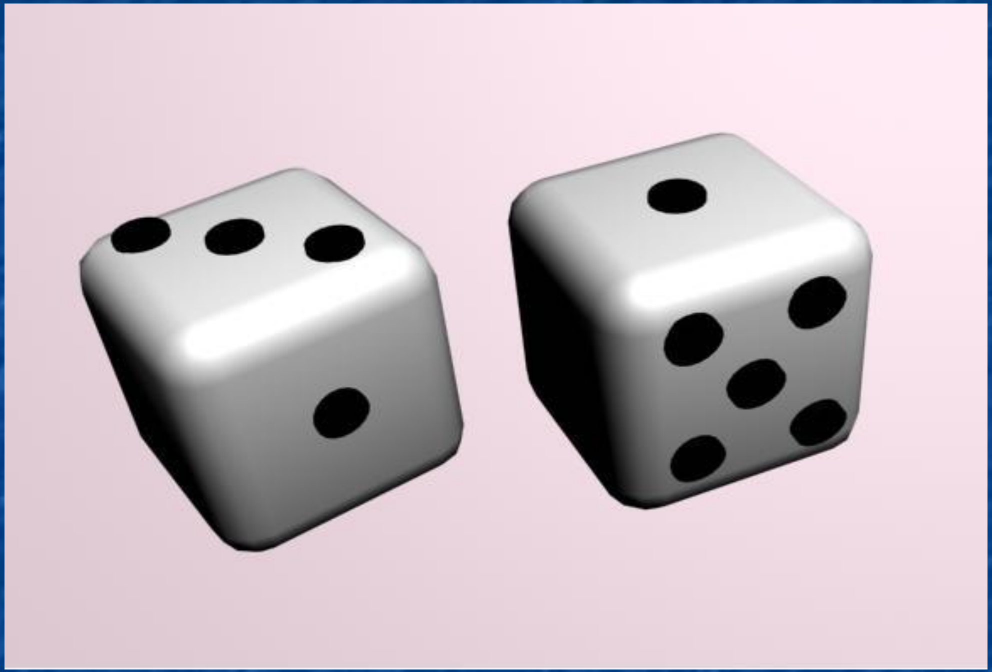
$$A_{10}^{2} = 10 \cdot 9 = 90$$

- Благоприятствует событию ***А*** лишь один исход .
- Искомая вероятность равна ***отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов***:

$$P(A) = \frac{1}{90}$$

Пример 3

Указать ошибку “решения” задачи:



«Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна *4* (событие ***А***)».

Решение (не правильное)

Возможны два исхода испытания:
-сумма выпавших очков равна 4; -сумма выпавших очков не равна 4. Событию **А** благоприятствует один исход; общее число исходов равно 2.

$$\Rightarrow \quad P(A) = \frac{1}{2}$$ - искомая вероятность

Правильное решение

Общее число равновозможных исходов: $6 \cdot 6 = 36$.

Среди этих исходов благоприятствуют событию **А** только *3* исхода: *(1;3), (3;1), (2;2) (в скобках указаны числа выпавших очков).*

$$\Rightarrow \qquad P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

искомая вероятность.

Задачи

Задача 1

Задумано двузначное число. Найти вероятность того, что задуманным числом окажется случайно названное двузначное число, цифры которого одинаковы.

Решение

- Всего двузначных чисел 90. То есть общее число исходов n=90.
- Среди двузначных чисел выпишем те, у которых обе цифры одинаковы {11,22,33,44,55,66,77,88,99}
- Таким образом, благоприятных исходов m=9 и искомая вероятность

$$P(A)=9/90=1/10$$

Задача 2

Пятитомное собрание сочинений стоит на полке в случайном порядке. Какова вероятность, что книги стоят в порядке нумерации томов?

Решение

- Благоприятный исход у нас один (когда книги стоят по порядку), m=1.
- Общее число всех возможных исходов – это все варианты перестановки книг на полке. То есть n=5!=120.
- Тогда искомая вероятность

$$P(A)=1/120$$

Задача 3

Буквы Т,Е,Я,И,Р,О написаны на отдельных карточках. Ребенок берет карточки в случайном порядке и прикладывает одна к другой. Какова вероятность, что получится слово ТЕОРИЯ?

Решение

- Благоприятный исход у нас один, когда получилось слово ТЕОРИЯ, то есть m=1.
- Общее число исходов совпадает с количеством всех перестановок на шести буквах, то есть n=6!=720
- Тогда вероятность P(A)=1/720

Задача 4

В ящике 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Наудачу вынимают 3 детали. Найти вероятность того, что все извлеченные детали окажутся окрашенными.

Решение

- Так как все детали одинаковы, то мы имеем дело с неупорядоченной выборкой.
- Общее число всех исходов n – сколькими способами из 15 деталей можно вытащить 3 детали. Это число сочетаний

$$C_{15}^{3} = \frac{15!}{3!12!} = 455$$

- Благоприятные исходы m – сколькими способами из 10 окрашенных деталей можно вытащить 3 окрашенных детали.
- Вновь имеем дело с формулой сочетаний

$$C_{10}^{3} = \frac{10!}{3!7!} = 120$$

- Искомая вероятность P(A)=120/455

Задача 5

Имеется 5 билетов стоимостью по 1 рублю, 3 билета по 3 рубля, 2 билета по 5 рублей. Наугад берут 3 билета. Какова вероятность того, что все 3 билета стоят вместе 7 рублей?

Решение

- Благоприятные исходы – это те, когда в сумме можно получить из трех билетов 7 рублей. Это возможно, если стоимость билетов 5+1+1 (один билет за 5 руб. и два по 1 руб.) или 3+3+1 (два билета по 3 руб. и один за 1 руб.)

- Учитывая, что все билеты внешне одинаковы (неупорядоченная выборка), благоприятных исходов будет

$$m = C_5^2 C_2^1 + C_3^2 C_5^1 = 35$$

- Всего имеется 5+3+2=10 билетов. Общее число исходов n – сколькими способами из 10 билетов можно взять 3 билета. То есть общее число исходов.

$$C_{10}^{3} = 120$$

- Искомая вероятность равна отношению благоприятных исходов к общему числу исходов, то есть

$$P(A)=35/120$$

Задача 6

В партии из *10* деталей *7* стандартных. Найти вероятность того, что среди шести взятых наудачу деталей *4* стандартных.

Решение

Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь шесть деталей из *10*, т. е. числу сочетаний из *10* элементов по 6 элементов

$$C_{10}^{6}$$

Число благоприятствующих исходов равно

$$C_7^4 \cdot C_3^2$$

$$P(A) = \frac{C_7^4 \cdot C_3^2}{C_{10}^6} = \frac{1}{2}$$

Задача 7

Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность, что номер первого, наудачу извлеченного жетона не содержит цифры 5.

Решение

- Так как всего жетонов 100, то общее число исходов n=100.
- Благоприятными исходами будут те, когда число не содержит цифры 5.
- Выпишем все числа от 1до 100 с цифрой 5 – это {5,15,25,35,45,50,51,52, 53,54,55,56,57,58,59,65,75,85,95}

- Таких чисел 19. Тогда чисел без цифры 5 будет 100-19=81. То есть благоприятных исходов m=81.
- Искомая вероятность

$$P(A)=81/100$$

Задача 8

Товаровед получил 50 одинаковых изделий, среди них 5 бракованных. Наудачу для контроля взяты путем слу-

чайного выбора три изделия. Найти вероятность того, что среди

них окажется ровно одно бракованное.

Решение

- Общее количество исходов n – сколькими способами из 50 деталей можно выбрать 3. Выборка неупорядоченная, следовательно мы имеем дело с сочетаниями.

$$C_{50}^{3} = \frac{50 \cdot 49 \cdot 48}{3 \cdot 2} = 19600$$

- Число благоприятных исходов будет равно количеству бракованных изделий, $m=5$.
- Искомая вероятность будет равна отношению числа благоприятных исходов к общему числу исходов

$$P(A)=5/19600$$

Задача 9

Библиотека состоит из 10 различных книг, причем 5 книг стоят по 40 рублей каждая, 3 книги по 10 рублей, а 2 книги по 30 рублей. Найти вероятность того, что взятые наудачу две книги стоят 50 рублей.

Решение

- Найдем общее число исходов n – сколькими способами можно из 10 книг взять 2. Найти n можно, используя формулу сочетаний

$$C_{10}^{2} = 45$$

- Благоприятные исходы – это те, когда обе книги в сумме будут стоить 50 рублей. Такое возможно лишь в случае, когда одна книга стоит 40 рублей, а другая – 10 рублей.

- Всего книг по 40 рублей пять, а книг по 10 рублей три. Получаем

- Искомая вероятность P(A)=15/45

$$C_5^1 C_3^1 = 15$$

Задача 10

Бросают игральный кубик. Найти вероятность того, что на верхней грани выпадет не менее 4-х очков.

Решение

- Общее число всех возможных исходов равно 6 (у кубика 6 граней, выпасть может любая), n=6

- Благоприятными будут те исходы, когда число очков выпадет не меньше 4-х. То есть нам подойдут только 4,5,6.

  Значит, m=3

Искомая вероятность есть отношение числа благоприятных исходов m=3 к общему числу исходов n=6

$$P(A)=3/6=1/2$$

Контрольные вопросы к части 2

- Что называется случайным событием?
- Классическое определение вероятности события (элементарные исходы, благоприятные исходы)
- Достоверное и невозможное события
- Три основных свойства вероятности
- Совместные и несовместные события, единственно возможные события, полная группа

Конец лекции 2