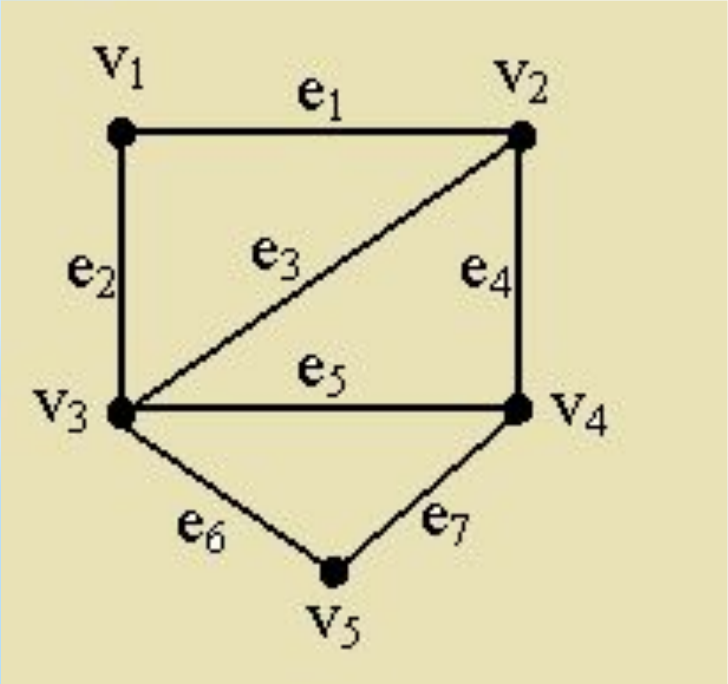
* Основные понятия теории графов

Масюкова
Ольга Николаевна

* *Основные понятия*

Граф ***G=(V,E)*** состоит из двух множеств: конечного множества элементов, называемых ***вершинами***, и конечного множества элементов, называемых ***ребрами***.



Граф ***G=(V, E)***

$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$;

$E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$

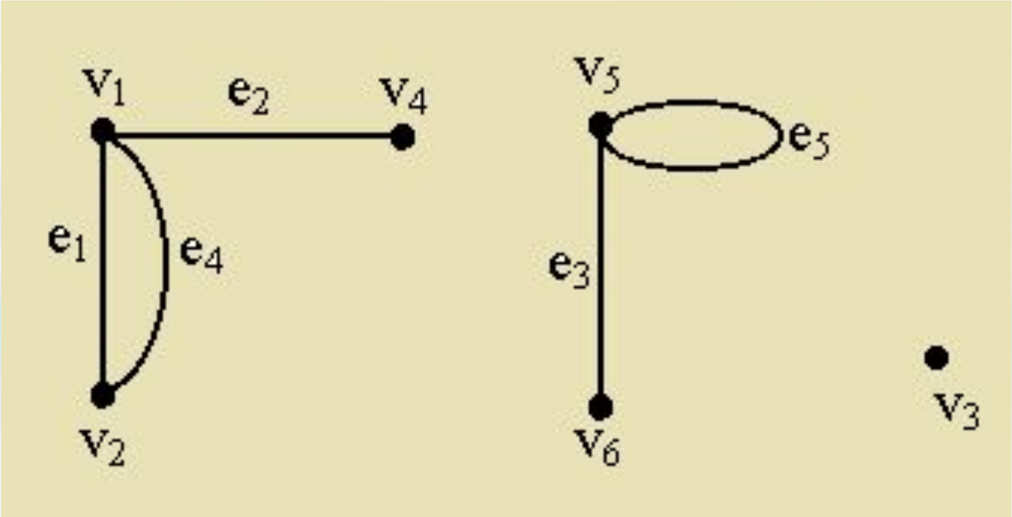
Основные понятия

Вершины v_i и v_j, определяющие ребро e_k, называются ***концевыми вершинами*** ребра e_k.

Ребра с одинаковыми концевыми вершинами называются ***параллельными*** (e_1,e_4).

Петля– замкнутое ребро(e_5).

Ребро, принадлежащее вершине, называется ***инцидентным*** (ребро e_1 инцидентно вершинам v_1 и v_2).

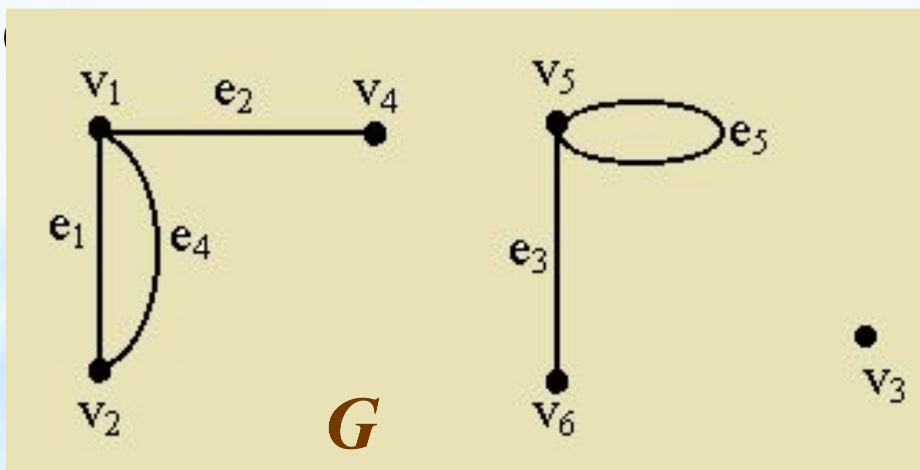


*Основные понятия

Изолированная вершина не инцидентна ни одному ребру (***v_3***).

Две вершины ***смежны***, если они являются концевыми вершинами некоторого ребра (***v_1***, ***v_4***).

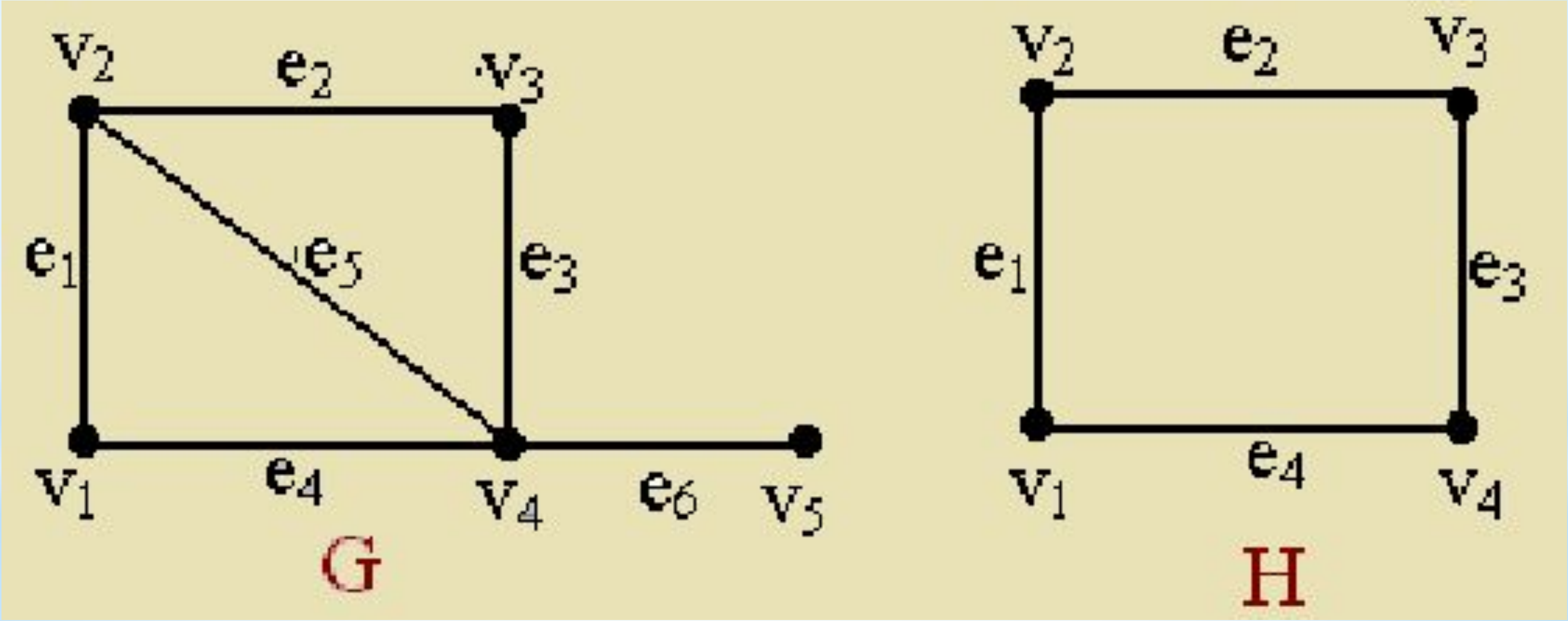
Если два ребра имеют общую концевую вершину, ***и*** (***e_1***, ***e_2***).



✔[Демонстрация]

* Основные понятия

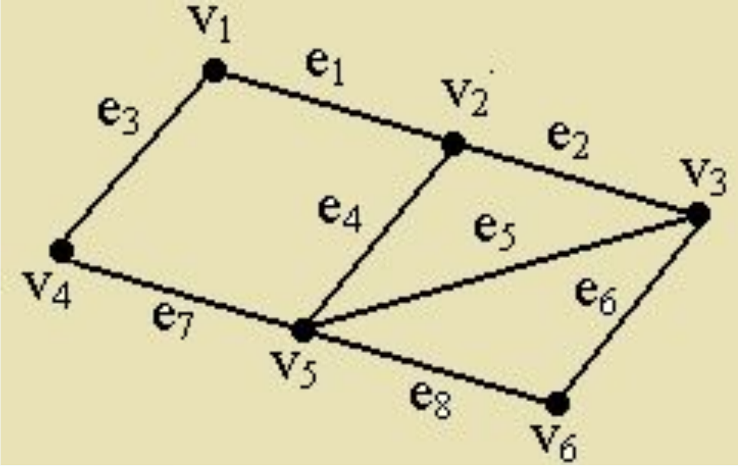
Подграф – любая часть графа, сама являющаяся графом.



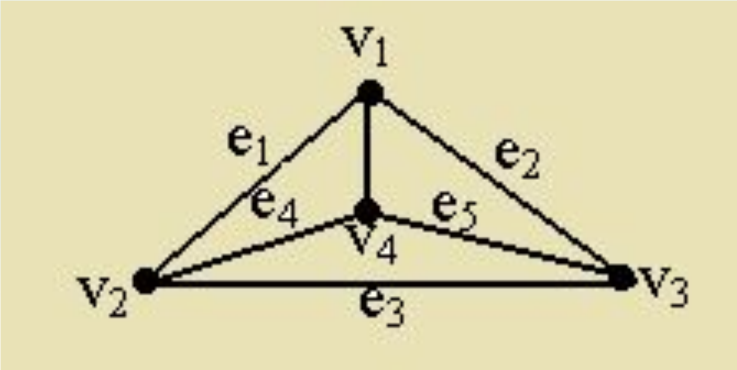
Подграф ***H*** графа ***G***

* Виды графов

Граф ***G=(V,E)*** называется ***простым***, если он не содержит петель и параллельных ребер.

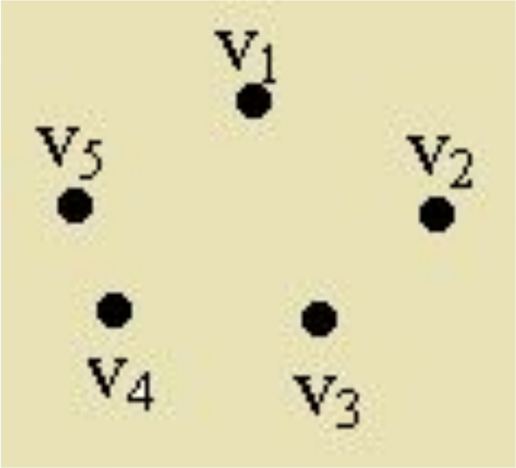


Граф ***G=(V,E)*** называется ***полным***, если он простой и каждая пара вершин смежна.

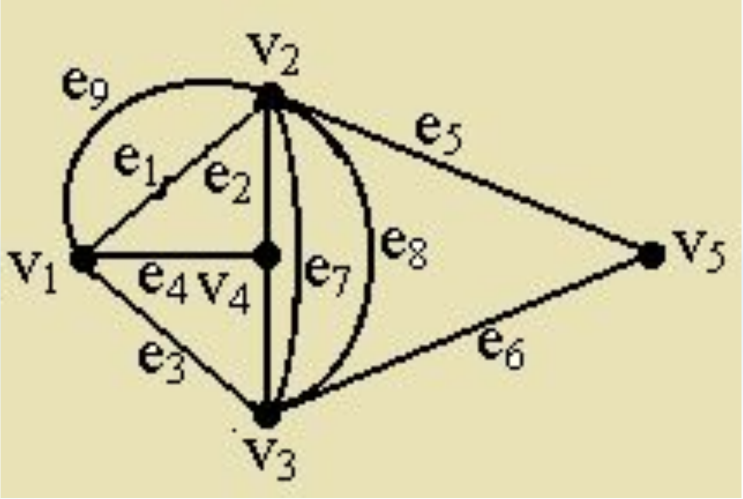


*Виды графов

Ноль-граф - граф, множество ребер которого пусто.

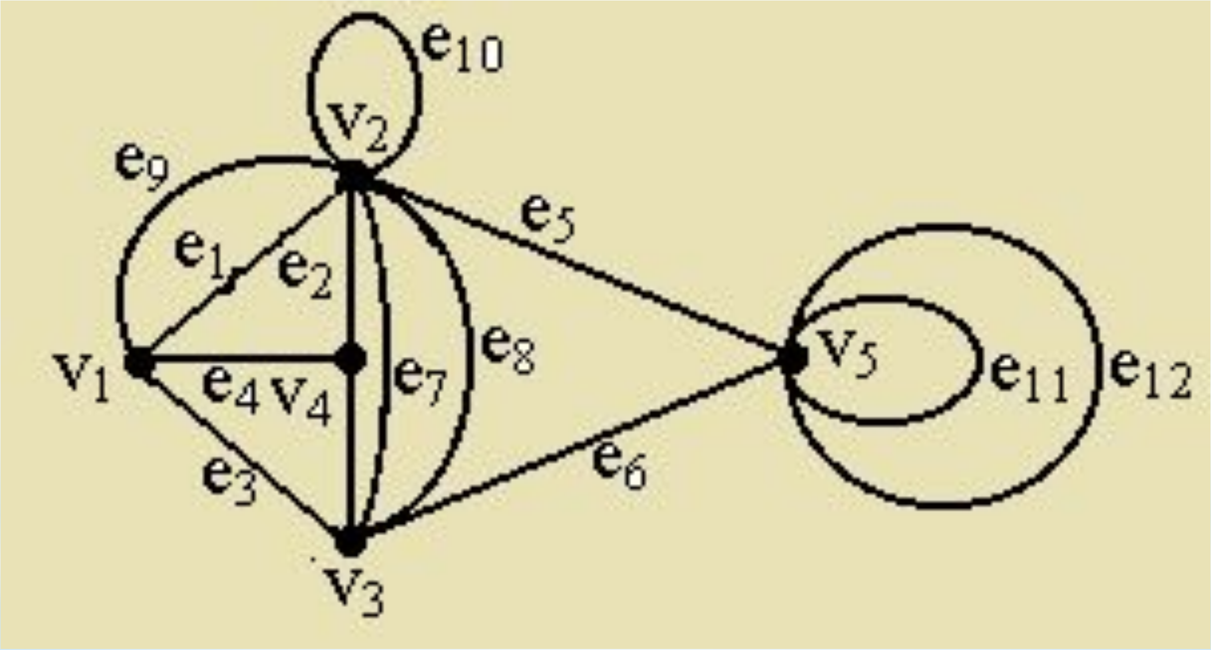


Граф ***G*** с кратными ребрами называется ***мультиграф.***



Виды графов

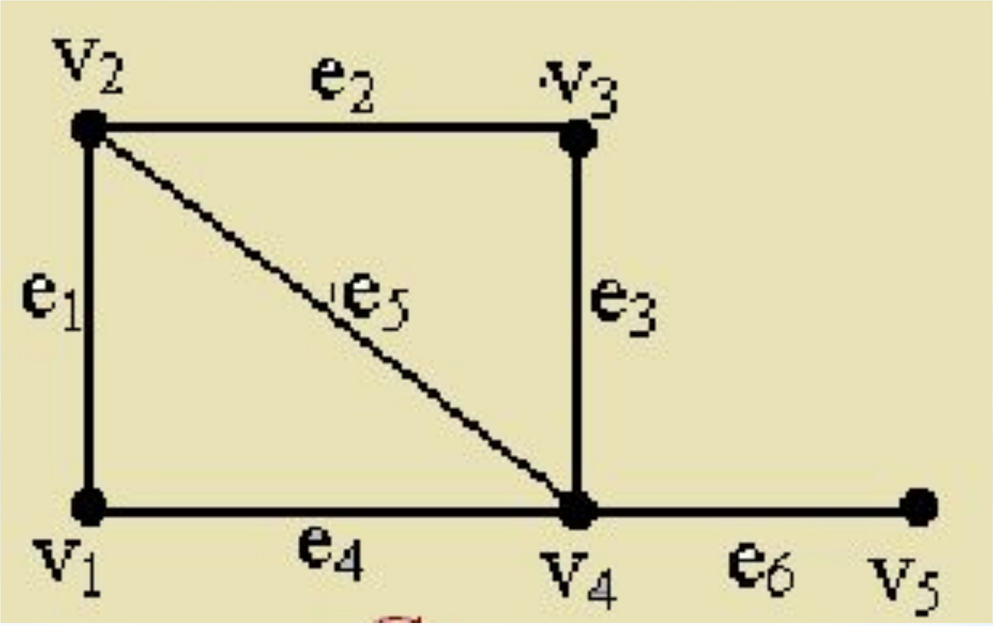
Граф ***G*** с петлями и кратными ребрами называется ***псевдограф***.



Демонстрация

Неориентированный граф

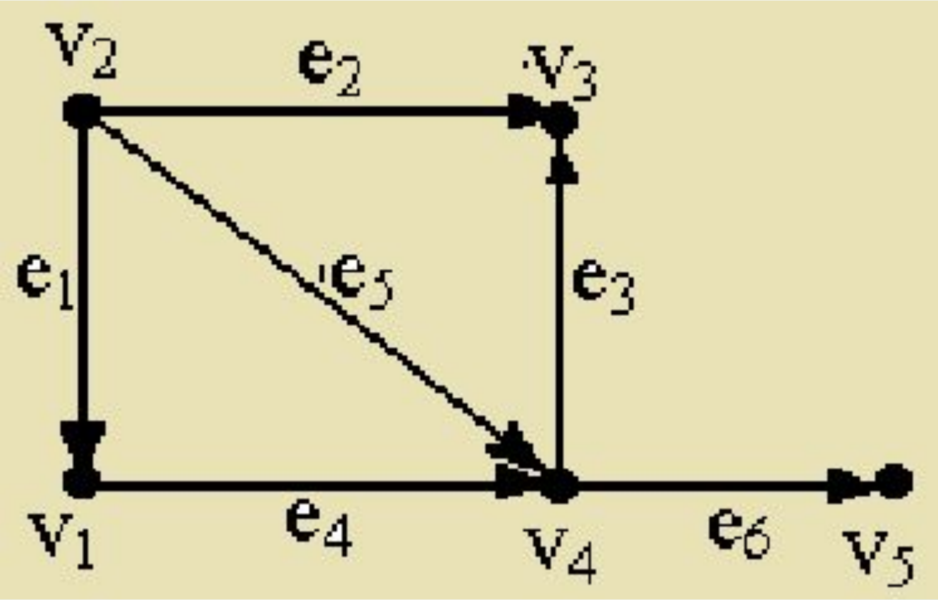
Граф **G**, рёбра которого не имеют определённого направления, называется ***неориентированным***.



Ориентированный граф

Граф **G**, имеющий определённое направление, называется ***ориентированным графом или орграфом***.

Ребра, имеющие направление, называются ***дугами***.



✔Демонстрация

*Способы задания графов

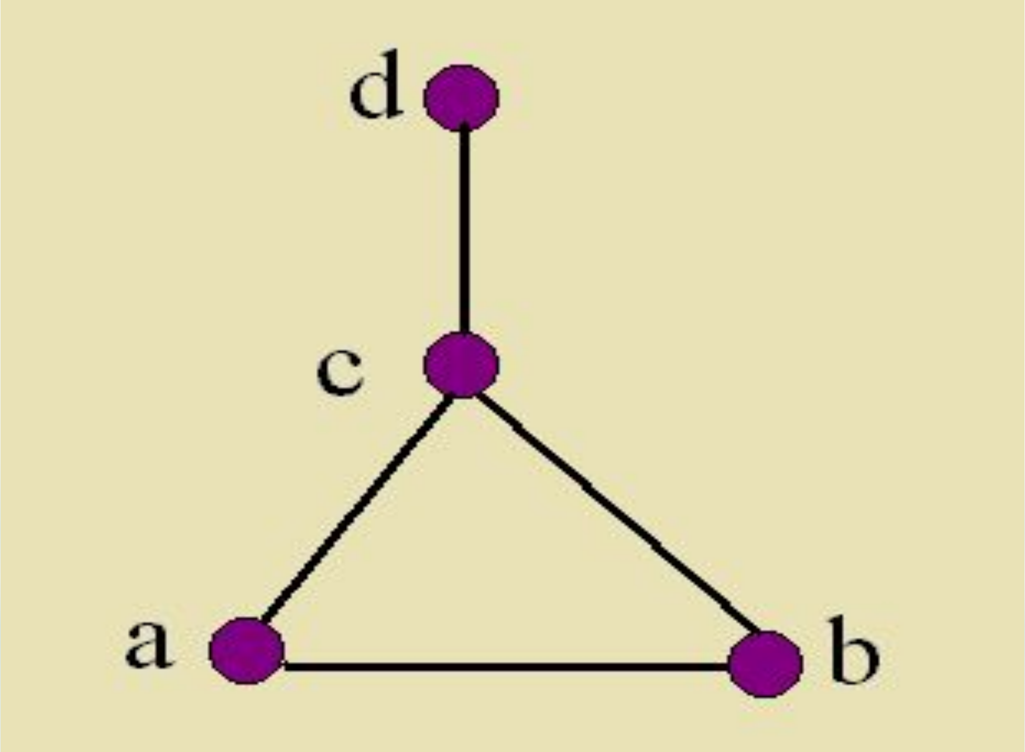
1) Явное задание графа как алгебраической системы.

Чтобы задать граф, достаточно для каждого ребра указать двухэлементное множество вершин – его мы и будем отождествлять с ребром.

$$\{\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\},\{c,d\}\}$$

* Способы задания графов

2) Геометрический.



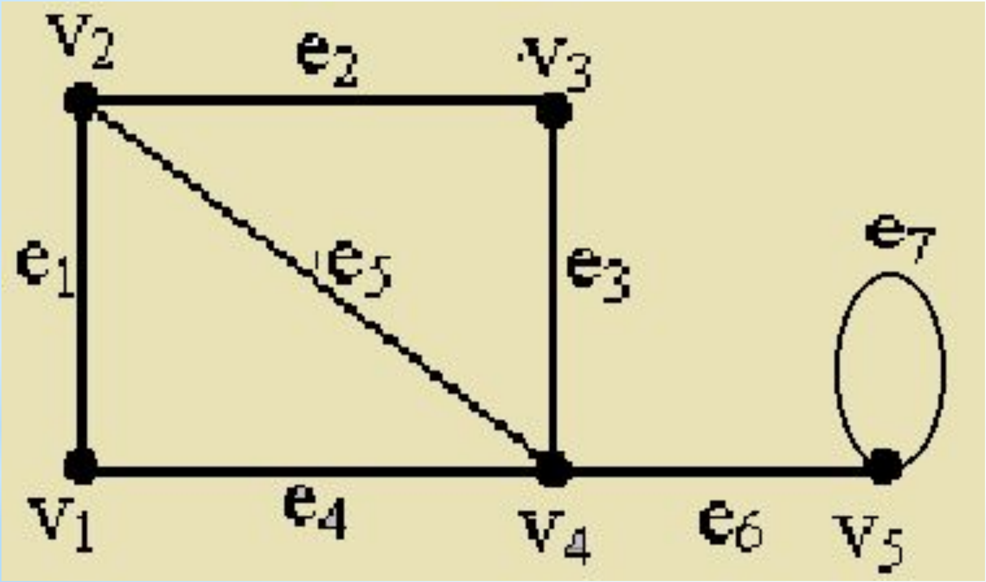
* Способы задания графов

3) Матрица смежности.

Элементы A_{ij} матрицы смежности A равны количеству ребер между рассматриваемыми вершинами.

* Матрица смежности неорграфа

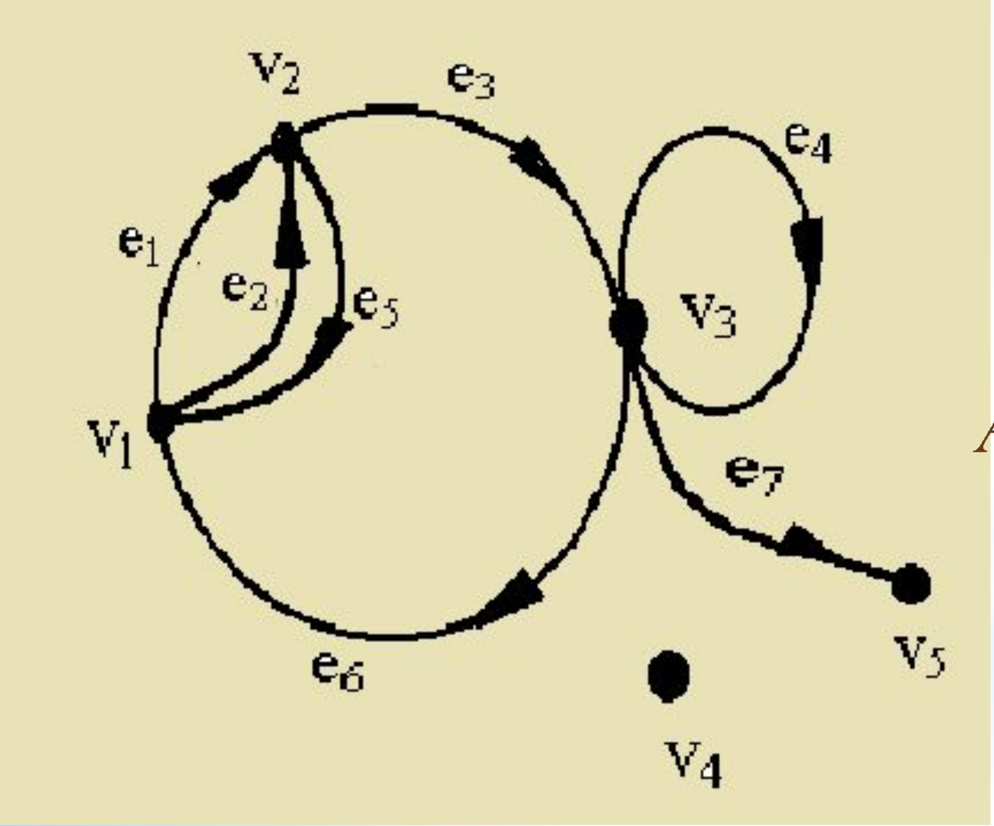
Для неорграфа **G**, представленного на рисунке, матрица смежности имеет вид:



$$A = \begin{array}{c|ccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ v_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ v_5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Матрица смежности орграфа

Для орграфа ***G***, представленного на рисунке, матрица смежности имеет вид:



$$A_0 = \begin{array}{c|ccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \hline v_1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ v_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

*Способы задания графов

4) Матрица инцидентности.

Матрица инцидентности B –это таблица, строки которой соответствуют вершинам графа, а столбцы - ребрам.

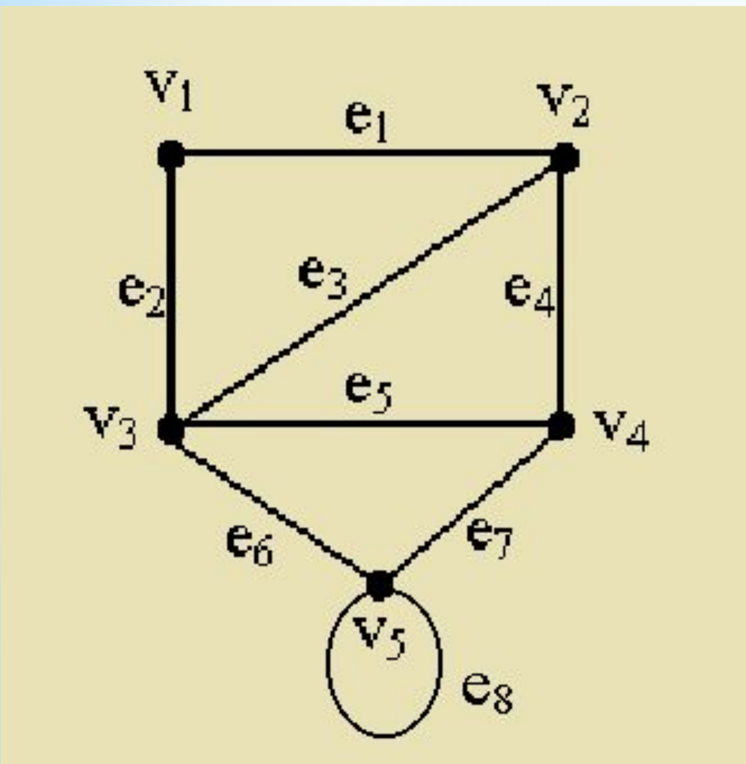
Элементы матрицы определяются следующим образом:

✔Демонстрация

*Способы задания графов

1) для неорграфа

$$b_{ij} = \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{если вершина } v_i \text{ инцидентна ребру } e_j; \\ \mathbf{0}, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

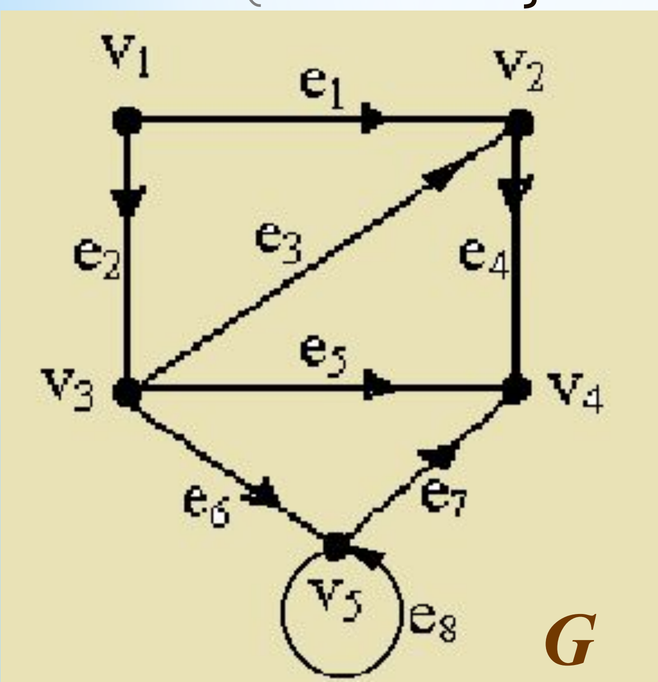


$$B = \begin{array}{c|cccccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \\ \hline v_1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

* Матрица инцидентности орграфа

2) для орграфа

$$b_{ij}= \begin{cases} -1, & \text{если ребро } e_j \text{ входит в вершину } v_i\ ; \\ 1, & \text{если ребро } e_j \text{ выходит из вершины } v_i\ ; \\ 2, & \text{если ребро } e_j \text{ –петля из вершины } v_i\ ; \\ 0, & \text{если } e_j \text{ и } v_i \text{ не инцидентны.} \end{cases}$$



$$B = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}$$

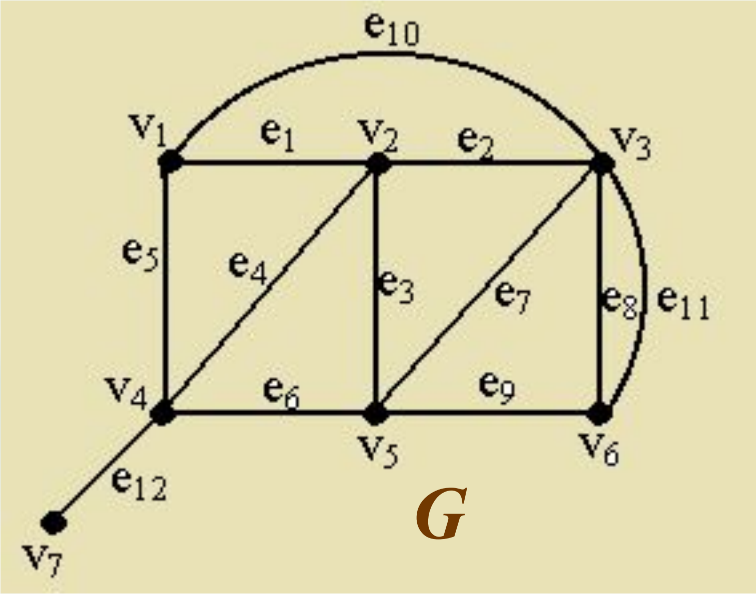
* Маршрут

Маршрут в графе ***G=(V,E)*** — конечная чередующееся последовательность вершин и ребер v_0, e_1, v_1, e_2,…,v_{k-1}, e_k, v_k, которая начинается и заканчивается на вершинах, причем v_{i-1} и v_i являются концевыми вершинами ребра e_i, $1 \le i \le k$.

Маршрут

Маршрут называется ***открытым***, если его концевые вершины различны ($v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_6, e_9, v_5, e_7, v_3, e_{11}, v_6$).

Маршрут называется ***замкнутым***, если его концевые вершины совпадают ($v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_7, v_5, e_3, v_2, e_4, v_4, e_5, v_1$).

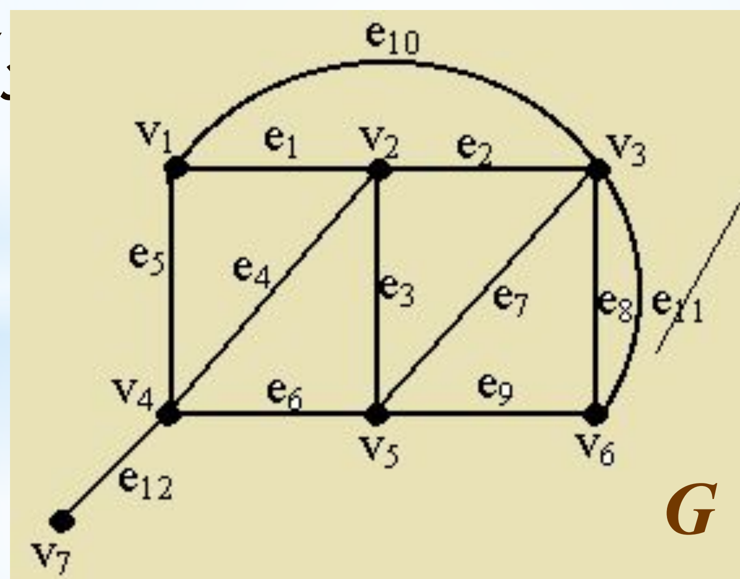


Цепь

Маршрут называется ***цепью***, если все его ребра различны.

Цепь называется ***простой***, если ее концевые вершины различны(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_8, v_6, e_{11}, v_3).

Цепь называется ***замкнутой***, если ее концевые вершины совпадают (v_1,e_1,v_2,e_2,v_3 … v_1).

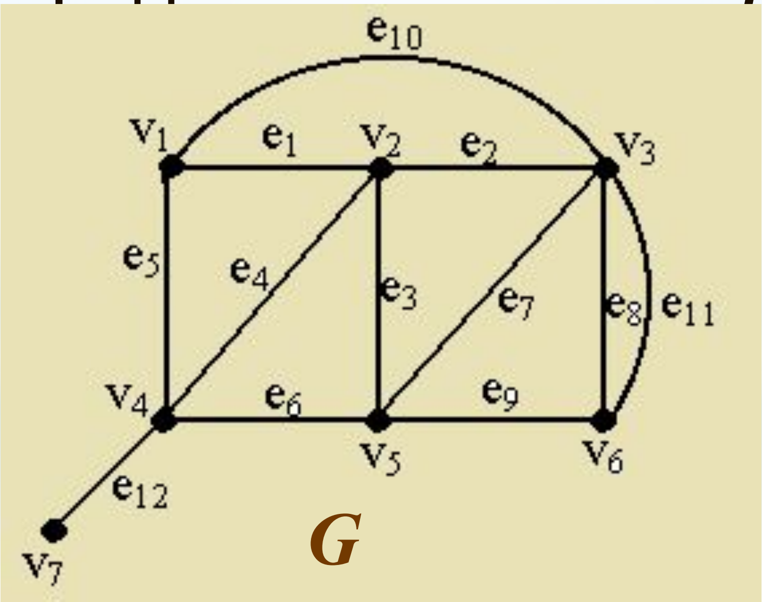


Путь, цикл

Открытая цепь называется ***путем***, если все ее вершины различны (v_1, e_1, v_2, e_2, v_3).

Цикл – это замкнутая цепь (***простой цикл***, если цепь простая) ($v_1,e_1,v_2,e_3,v_5,e_6,v_4,e_5,v_1$).

Число ребер в пути называется ***длиной пути***. Аналогично определяется ***длина цикла***.



*Свойства путей и циклов

1. Степень каждой неконцевой вершины пути равна 2, концевые вершины имеют степень, равную 1.

2. Каждая вершина цикла имеет степень 2 или другую четную степень. Обращение этого утверждения, а именно то, что ребра подграфа, в котором каждая вершина имеет четную степень, образуют цикл, — неверно.

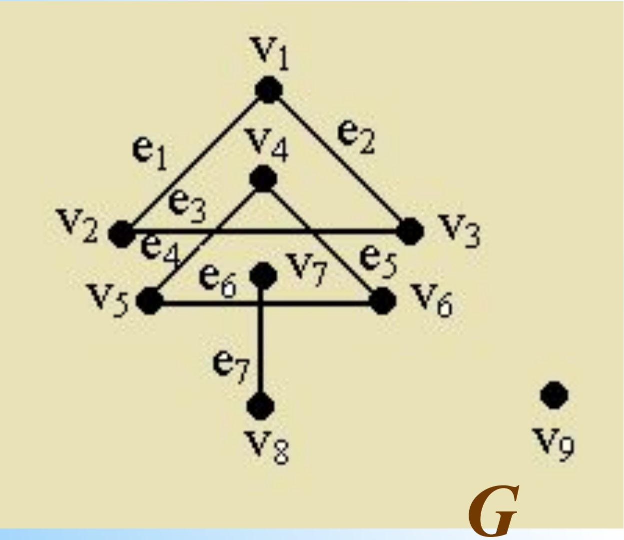
3. Число вершин в пути на единицу больше числа ребер, тогда как в цикле число ребер равно числу вершин.

Связность графов, компонента связности

Две вершины v_i и v_j называются ***связанными*** в графе G, если в нем существует путь v_i—v_j. Вершина связана сама с собой.

Граф называется ***связным***, если в нем существует путь между каждой парой вершин.

Компонента связности – максимальный связный подграф в графе.



1 компонента связности: $\{v_1, v_2, v_3, e_1, e_2, e_3\}$

2 компонента связности: $\{v_4, v_5, v_6, e_4, e_5, e_6\}$

3 компонента связности: $\{v_7, v_8, e_7\}$

4 компонента связности: $\{v_9\}$

✔Демонстрация

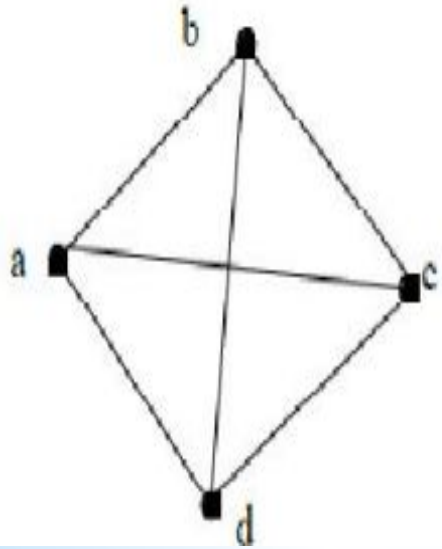
* Определение маршрутов с заданным количеством ребер.

С помощью матрицы смежности вершин можно найти маршруты, содержащие заданное количество ребер (дуг).

Теорема. Для определения количества маршрутов, состоящих из k ребер (дуг) необходимо возвести в k-ю степень матрицу **A** смежности вершин. Тогда элемент $a_{ij}^{(k)}$ даст количество маршрутов длины k из вершины vi в вершину vj.

Пример.

Рассмотрим граф и составим его матрицу смежности .



	a	b	c	d
a		1	1	1
b	1		1	1
c	1	1		1
d	1	1	1	

* Определение маршрутов с заданным количеством ребер.

d

Возведем матрицу смежности в квадрат.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим первую строку. Элемент $a_{11}^{(2)} = 3$. Это значит, что существует три маршрута из ***a*** в ***a*** длиной два ребра. Действительно, существуют следующие маршруты:***aba***, ***aca***, ***ada***. Из ***a*** в ***b*** существует два маршрута: ***acb***, ***adb***. Если использовать модифицированную матрицу смежности, в которой вместо чисел в ячейки записаны названия ребер, то можно получить не только количество маршрутов, но и сами маршруты.

Аналогично определяются маршруты и в орграфе.

Из рассмотренной теоремы существуют два следствия, которые позволяют определять наличие маршрутов и циклов в графе.

* Определение маршрутов с заданным количеством ребер.

маршрутов и циклов в графе.

Следствие 1. В графе G мощности n тогда и только тогда существует маршрут из вершины vi в вершину vj ($v_i \neq v_j$), когда (i,j)-й элемент матрицы $A+A^2+...+A^{n-1}$ не равен нулю.

Следствие 2. В графе G мощности n тогда и только тогда существует цикл, содержащий вершину vi, когда (i,i)-й элемент матрицы (которую называют матрицей $\hat{A}$ **транзитивного замыкания** A)

$\hat{A}=A+A^2+...+A^{n-1}+A^n$ не равен нулю. В рассмотренном выше примере

$$A^4 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad A+A^2+A^3= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{A}=A+A^2+A^3+A^4= \begin{pmatrix} 4 & 7 & 7 & 4 \\ 4 & 7 & 7 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

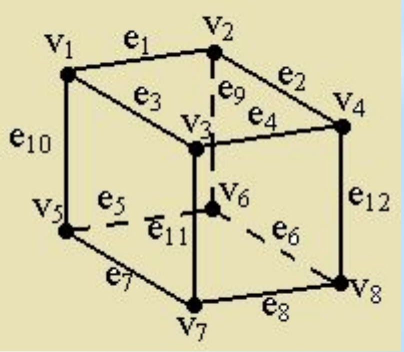
* Степень вершины

Степенью ***deg(v$_j$)*** вершины ***v$_j$*** называется число инцидентных ей ребер, т. е. вершин в ее окружении.

Максимальная и минимальная степени вершин графа ***G*** обозначаются символами ***Δ(G)*** и ***δ(G)*** соответственно:

$$\Delta(G)=\max_{v\in VG} \deg v \qquad \delta(G)=\min_{v\in VG} \deg v$$

Граф ***G=(V,E)*** называется ***регулярным*** или ***однородным*** (степени ***r***), если степени всех его вершин одинаковы. Степенью регулярного графа называется степень его вершин.



* Сумма степеней вершин графа

Утверждение («лемма о рукопожатиях»)

Сумма всех вершин графа – четное число, равное удвоенному числу ребер:

$$\sum_{v \in VG} \deg v = 2|EG|$$

Интерпретация леммы: поскольку в каждом рукопожатии участвуют две руки,то при любом числе рукопожатий общее число пожатых рук четно (при этом каждая рука учитывается столько раз, во скольких рукопожатиях она участвовала).

Следствие

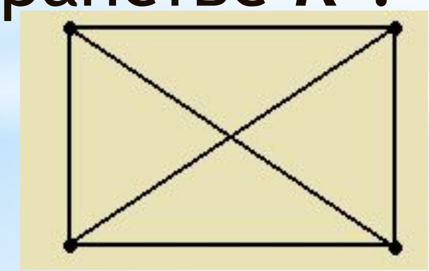
В любом графе число вершин нечетной степени четно

* *Изоморфизм графов*

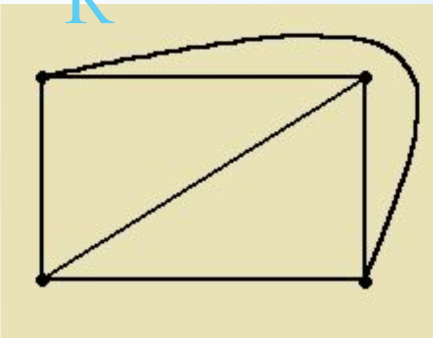
Два графа ***G_1*** и ***G_2*** ***изоморфны***, если существует такое взаимно-однозначное отображение между множествами их вершин и ребер, что соответствующие ребра графов ***G_1*** и ***G_2*** инцидентны соответствующим вершинам этих графов.

Если граф ***G*** изоморфен геометрическому графу ***G'*** в ***R^n***, то ***G'*** называется ***геометрической реализацией*** графа ***G*** в пространстве ***R^n***.

R^3



R^2



Граф ***R^2*** является геометрической реализацией графа ***R^3***

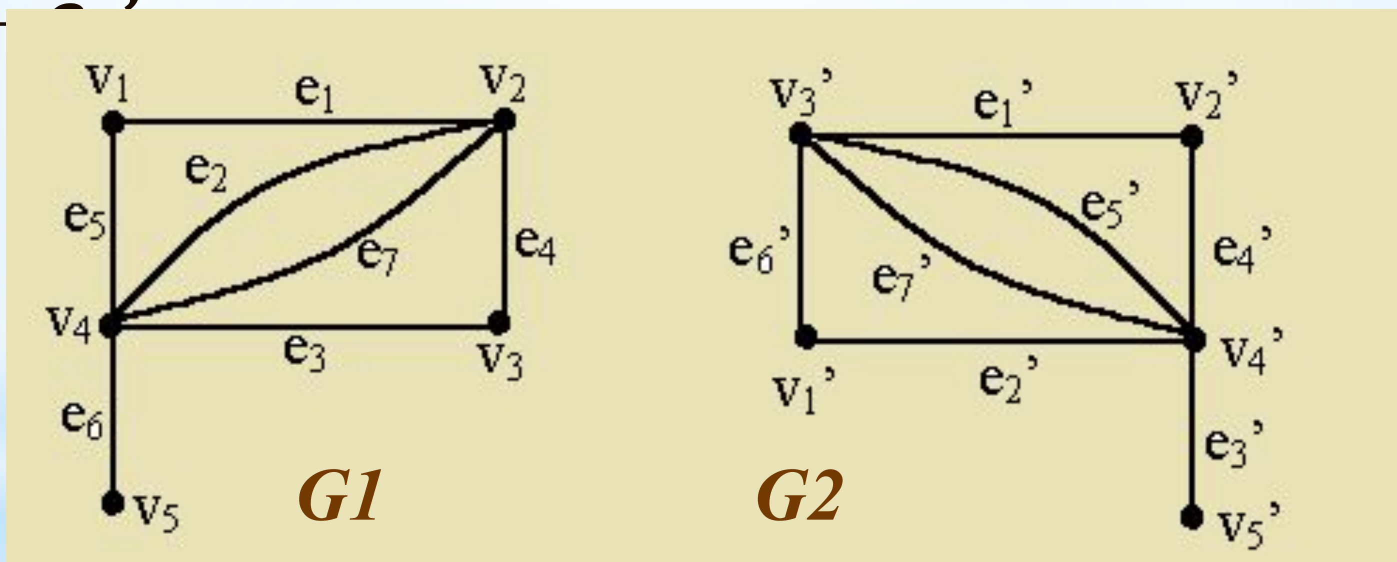
* Пример изоморфных графов

Соответствие вершин:

$v_1 \leftrightarrow v_2', v_2 \leftrightarrow v_3', v_3 \leftrightarrow v_1', v_4 \leftrightarrow v_4', v_5 \leftrightarrow v_5';$

Соответствие ребер:

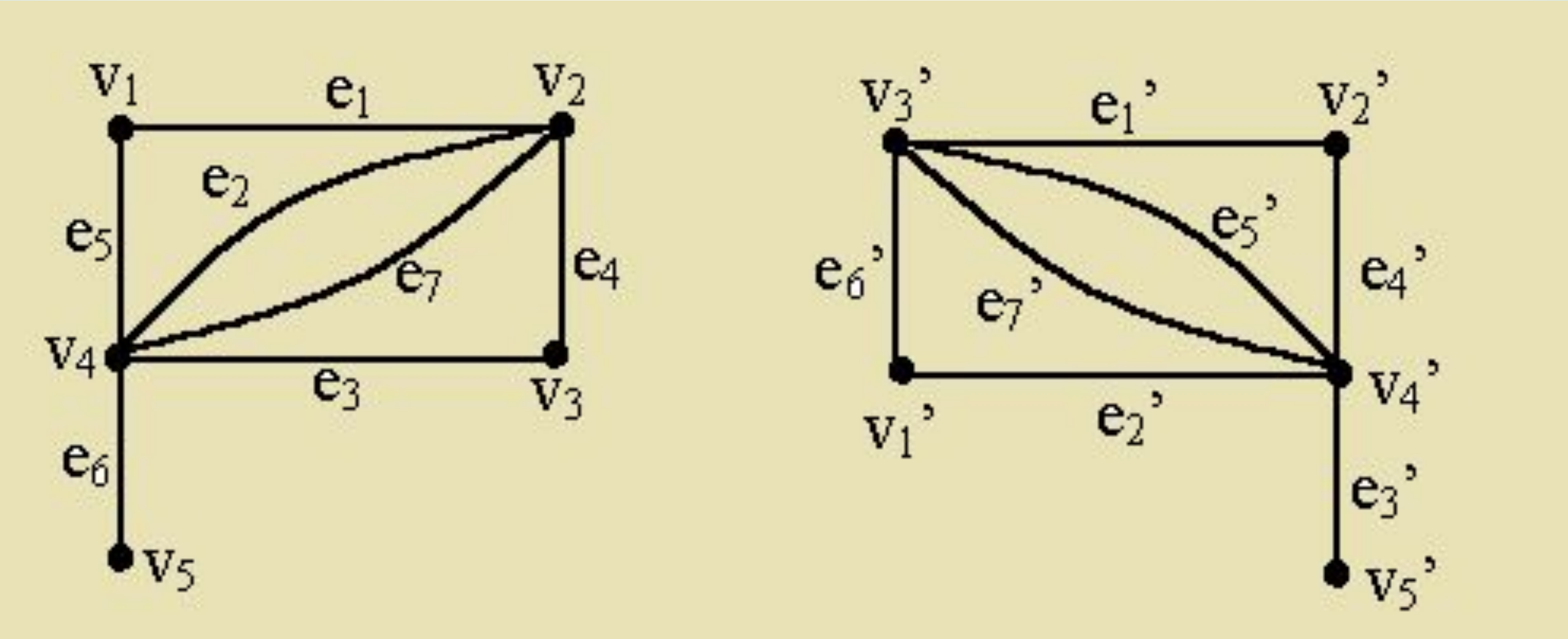
$e_1 \leftrightarrow e_1'$, $e_3 \leftrightarrow e_2'$, $e_5 \leftrightarrow e_4'$, $e_2 \leftrightarrow e_5'$, $e_4 \leftrightarrow e_6'$,
$e_6 \leftrightarrow$



G1 и ***G2*** – изоморфные графы

Изоморфизм как отношение эквивалентности на множестве графов

Отношение изоморфизма является эквивалентностью, т.е. оно симметрично, транзитивно и рефлексивно.



* Помеченный и абстрактный графы

Граф порядка ***n*** называется ***помеченным***, если его вершинам присвоены некоторые метки (например номера ***1***, ***2***, ..., ***n***).

Абстрактный (или ***непомеченный***) граф – это класс изоморфных графов.

Помеченные графы: