

ЛЕКЦИЯ № 1

ТЕМА ЛЕКЦИИ:

«ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА»

1 часть

ПЛАН ЛЕКЦИИ

- 1. ПОНЯТИЕ И ВИДЫ МАТРИЦ**
- 2. СТРОКИ, СТОЛБЦЫ, ЭЛЕМЕНТЫ
И РАЗМЕР МАТРИЦ**
- 3. ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ**

ПОНЯТИЕ И ВИДЫ МАТРИЦ

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

МАТРИЦЕЙ НАЗЫВАЕТСЯ ПРЯМО-УГОЛЬНАЯ ИЛИ КВАДРАТНАЯ ТАБЛИЦА, ЗАПОЛНЕННАЯ ЧИСЛАМИ.

ЧИСЛА, ЗАПОЛНЯЮЩИЕ МАТРИЦУ, НАЗЫВАЮТСЯ **ЭЛЕМЕНТАМИ** МАТРИЦЫ.

ВИДЫ МАТРИЦ

$$\begin{pmatrix} 12 & 4 \\ -17 & 29 \\ -30 & -36 \end{pmatrix} \text{ Прямоугольная} \\ \text{матрица}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 22 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ Матрица-столбец}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ -5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \text{ Квадратная} \\ \text{матрица}$$

$$(1 \quad -3 \quad 2 \quad 0) \\ \text{Матрица-строка}$$

СТРОКИ, СТОЛБЦЫ, ЭЛЕМЕНТЫ И РАЗМЕР МАТРИЦЫ

ПРИНЦИП НУМЕРАЦИИ СТРОК И СТОЛБЦОВ

СТРОКИ НУМЕРУЮТСЯ СВЕРХУ
ВНИЗ, НАЧИНАЯ С № 1.

СТОЛБЦЫ НУМЕРУЮТСЯ СЛЕВА
НАПРАВО, НАЧИНАЯ С № 1.

СТРОКА И СТОЛБЕЦ

$$\begin{pmatrix} 12 & 4 \\ -17 & 29 \\ -30 & -36 \end{pmatrix} \quad \text{я-строка}$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 4 \\ -17 & 29 \\ -30 & -36 \end{pmatrix} \quad \text{й-столбец}$$

РАЗМЕР МАТРИЦЫ

МАТРИЦА, ИМЕЮЩАЯ m СТРОК И n СТОЛБЦОВ, НАЗЫВАЕТСЯ МАТРИЦЕЙ РАЗМЕРА m НА n .

$$\begin{pmatrix} 12 & 4 \\ -17 & 29 \\ -30 & -36 \end{pmatrix}$$

Матрица размера 3 на 2
(3 строки, 2 столбца)

ОБЩИЙ ВИД МАТРИЦЫ РАЗМЕРА m НА n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ЭЛЕМЕНТ МАТРИЦЫ

$$\begin{pmatrix} \text{Элемент} \\ -17 & 29 \\ -30 & -36 \end{pmatrix}$$

$$a_{31} \text{ (aтр и-один)} = -30$$

(3-строка, 1-й столбец)

ДИАГОНАЛИ КВАДРАТНЫХ МАТРИЦ

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \\ -5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Главная диагональ

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \\ -5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Побочная диагональ

ТРЕУГОЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Верхняя треугольная матрица} \\ \text{(подглавной диагональю стоят нули)} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Нижняя треугольная матрица} \\ \text{(надглавной диагональю стоят нули)} \end{array}$$

ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

ЛЮБУЮ МАТРИЦУ МОЖНО УМНОЖИТЬ НА ЧИСЛО

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ -5 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -5 & 10 \\ 20 & 10 & 0 \\ -25 & 30 & 5 \end{pmatrix}$$

МАТРИЦЫ ОДИНАКОВОГО РАЗМЕРА МОЖНО СКЛАДЫВАТЬ И ВЫЧИТАТЬ

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 8 & -5 & 5 \\ 7 & 3 & 14 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 3 \pm 8 & -1 \pm (-5) & 2 \pm 5 \\ 4 \pm 7 & 2 \pm 3 & 0 \pm 14 \end{pmatrix}$$

ТРАНСПОНИРОВАНИЕ МАТРИЦЫ

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ -17 & 29 \\ -30 & -36 \end{pmatrix}$$

Исходная
матрица (размер 3 на 2)

$$A^T = \begin{pmatrix} 12 & -17 & -30 \\ 4 & 29 & -36 \end{pmatrix}$$

Транспонированная
матрица (размер 2 на 3)

УМНОЖЕНИЕ СТРОКИ НА СТОЛБЕЦ (СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ)

$$(2 \quad -5 \quad 3) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = 2 \cdot 7 + (-5) \cdot 0 + 3 \cdot (-4) = 2$$

УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦЫ НА СТОЛБЕЦ

КАЖДАЯ СТРОКА МАТРИЦЫ
СКАЛЯРНО УМНОЖАЕТСЯ НА
СТОЛБЕЦ

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ -5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 8 + (-1) \cdot 7 + 2 \cdot 2 \\ 4 \cdot 8 + 2 \cdot 7 + 0 \cdot 2 \\ (-5) \cdot 8 + 6 \cdot 7 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 46 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ВОЗМОЖНОСТЬ УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦЫ НА МАТРИЦУ

МАТРИЦУ A , ЗАПИСАННУЮ СЛЕВА,
МОЖНО УМНОЖИТЬ НА
МАТРИЦУ B , ЗАПИСАННУЮ СПРАВА,
ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА
ЧИСЛО СТОЛБЦОВ МАТРИЦЫ A
РАВНО ЧИСЛУ СТРОК МАТРИЦЫ B

ПРАВИЛО УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦЫ НА МАТРИЦУ

КАЖДАЯ СТРОКА ЛЕВОЙ
МАТРИЦЫ СКАЛЯРНО
УМНОЖАЕТСЯ НА КАЖДЫЙ
СТОЛБЕЦ ПРАВОЙ МАТРИЦЫ

$$C = A \cdot B$$

A – левая матрица, B – правая матрица

ПРИМЕР УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ -5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 8 + (-1) \cdot 7 + 2 \cdot 2 & 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-3) \\ 4 \cdot 8 + 2 \cdot 7 + 0 \cdot 2 & 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-3) \\ (-5) \cdot 8 + 6 \cdot 7 + 1 \cdot 2 & (-5) \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & -5 \\ 46 & 8 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

УМНОЖЕНИЕ СТОЛБЦА НА СТРОКУ

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot (2 \quad -5 \quad 3) = \begin{pmatrix} 7 \cdot 2 & 7 \cdot (-5) & 7 \cdot 3 \\ 0 \cdot 2 & 0 \cdot (-5) & 0 \cdot 3 \\ (-4) \cdot 2 & (-4) \cdot (-5) & (-4) \cdot 3 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 14 & -35 & 21 \\ 0 & 0 & 0 \\ -8 & 20 & -12 \end{pmatrix}$$

ВАЖНЫЕ ТИПЫ КВАДРАТНЫХ МАТРИЦ

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Единичная матрица
(размер 3 на 3)

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Нулевая матрица
(размер 3 на 3)

СВОЙСТВО ЕДИНИЧНОЙ МАТРИЦЫ: $A \cdot E = E \cdot A = A$

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 3 & -6 & 8 \\ 11 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 3 & -6 & 8 \\ 11 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 3 & -6 & 8 \\ 11 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 3 & -6 & 8 \\ 11 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$