Суммирование рядов

Опр. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Если есть способ (T): нек-ым рядам ставится в соответствие число (обобщ. сумма), то это значит, что задан метод суммирования. $T\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\right)$.

Суммирование рядов

Опр. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если есть способ (T): нек-ым рядам ставится в соответствие число (обобщ. сумма), то это значит, что задан метод суммирования. $T(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)$.

Примеры

1. $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, т.е. $T(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) = S$

Суммирование рядов

<u>Опр.</u> $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если есть способ (T): нек-ым рядам ставится в соответствие число (обобщ. сумма), то это значит, что задан метод суммирования. $T\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)$.

Примеры

1. $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, т.е. $T\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) = S$

2. $\forall \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad T\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) = 0$

3. $\forall \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad T\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) = 1$

Суммировоние рядов

Опр. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Если есть способ (T): нек-ым рядам ставится в соответствие число (обобщ. сумма), то это значит, что задан метод суммирования. $T(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n)$.

Примеры

1. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, т.е. $T(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n) = S$

2. $\forall \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \quad T(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n) = 0$ 3. $\forall \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \quad T(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n) = 1$

4. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $\sigma_n = \dfrac{S_1 + \dots + S_n}{n}$, $\sigma = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$, т.е. $T(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n) = \sigma$

(метод средних арифметических)

Суммирование рядов

Опр. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Если есть способ (T): нек-ым рядам ставится в соответствие число (обобщ. сумма), то это значит, что задан метод суммирования. $T(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n)$.

Примеры

1. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, т.е. $T(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n) = S$
2. $\forall \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $T(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n) = 0$
3. $\forall \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $T(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n) = 1$
4. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $\sigma_n = \dfrac{S_1 + \ldots + S_n}{n}$, $\sigma = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$, т.е. $T(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n) = \sigma$

(метод средних арифметических)

Опр. $T(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n) = A$, $T(\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n) = B$. Если $\forall \alpha, \beta$ $\exists T(\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)) = \alpha A + \beta B$, то T назыв. линейный метод.

Суммирование рядов

Опр. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если есть способ (T): нек-ым рядам ставится в соответствие число (обобщ. сумма), то это значит, что задан метод суммирования. $T(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)$.

Примеры

1. $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, т.е. $T(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) = S$
2. $\forall \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad T(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) = 0$
3. $\forall \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad T(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) = 1$
4. $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $\sigma_n = \frac{S_1 + \ldots + S_n}{n}$, $\sigma = \lim_{n\to\infty} \sigma_n$, т.е. $T(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) = \sigma$

(метод средних арифметических)

Опр. $T(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) = A$, $T(\sum_{n=1}^{\infty} b_n) = B$. Если $\forall \alpha, \beta \ \exists T(\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)) = \alpha A + \beta B$, то T называ. линейный метод.

Опр. T назыв. регулярный метод, если $\forall \sum_{n=1}^{\infty} a_n : \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \Rightarrow \exists T(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) = S$

Суммирование рядов

<u>Опр.</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Если есть способ (T): нек-ым рядам ставится в соответствие число (обобщ. сумма), то это значит, что задан метод суммирования. $T(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n)$.

Примеры

1. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, т.е. $T(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n) = S$
2. $\forall \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \quad T(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n) = 0$ 3. $\forall \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \quad T(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n) = 1$
4. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $\sigma_n = \dfrac{S_1 + \ldots + S_n}{n}$, $\sigma = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$, т.е. $T(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n) = \sigma$
(метод средних арифметических)

<u>Опр.</u> $T(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n) = A$, $T(\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n) = B$. Если $\forall \alpha, \beta \ \exists T(\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)) = \alpha A + \beta B$, то T назыв. линейный метод.

<u>Опр.</u> T назыв. регулярный метод, если $\forall \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n : \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S \Rightarrow \exists T(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n) = S$

<u>Опр.</u> Регул. T назыв. вполне регул., если $\forall \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n : \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \ (-\infty)$
$\Rightarrow \exists T(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n) = +\infty \ (-\infty)$

Суммирование рядов

<u>Опр.</u> $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если есть способ (T): нек-ым рядам ставится в соответствие число (обобщ. сумма), то это значит, что задан метод суммирования. $T(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)$.

Примеры

1. $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, т.е. $T(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) = S$
2. $\forall \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad T(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) = 0$
3. $\forall \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad T(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) = 1$
4. $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $\sigma_n = \frac{S_1 + \ldots + S_n}{n}$, $\sigma = \lim_{n\to\infty} \sigma_n$, т.е. $T(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) = \sigma$

(метод средних арифметических)

<u>Опр.</u> $T(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) = A$, $T(\sum_{n=1}^{\infty} b_n) = B$. Если $\forall \alpha, \beta \ \exists T(\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)) = \alpha A + \beta B$, то T назыв. линейный метод.

<u>Опр.</u> T назыв. регулярный метод, если $\forall \sum_{n=1}^{\infty} a_n : \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \Rightarrow \exists T(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) = S$

<u>Опр.</u> Регул. T назыв. вполне регул., если $\forall \sum_{n=1}^{\infty} a_n : \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \ (-\infty)$

$$\Rightarrow \exists T(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) = +\infty \ (-\infty)$$

В примерах: 1 – линейный вполне регулярный метод

Суммировоние рядов

Опр. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если есть способ (T): нек-ым рядам ставится в соответствие число (обобщ. сумма), то это значит, что задан метод суммирования. $T(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)$.

Примеры

1. $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, т.е. $T(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) = S$
2. $\forall \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\quad T(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) = 0$ $\qquad$ 3. $\forall \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\quad T(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) = 1$
4. $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $\sigma_n = \frac{S_1 + \ldots + S_n}{n}$, $\sigma = \lim_{n\to\infty} \sigma_n$, т.е. $T(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) = \sigma$

(метод средних арифметических)

Опр. $T(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) = A$, $T(\sum_{n=1}^{\infty} b_n) = B$. Если $\forall \alpha, \beta$ $\exists T(\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)) = \alpha A + \beta B$, то T назыв. линейный метод.

Опр. T назыв. регулярный метод, если $\forall \sum_{n=1}^{\infty} a_n : \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \Rightarrow \exists T(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) = S$

Опр. Регул. T назыв. вполне регул., если $\forall \sum_{n=1}^{\infty} a_n : \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \ (-\infty)$
$\Rightarrow \exists T(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) = +\infty \ (-\infty)$

В примерах: 1 – линейный вполне регулярный метод.

2 – линейный нерегул. метод. $\quad$ 3 – нелинейный нерегул. метод

4. Метод ср. арифм. Линейность – самостоятельно.

Регулярность. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$, т.е. $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, т.е. $\underline{\forall \varepsilon > 0}\ \exists N_1:$

$\forall n > N_1\ |S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$. $M = \max_{1\le k\le N_1} |S_k - S|$, $N_2: \frac{MN_1}{N_2} < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{\exists N} = \max(N_1, N_2)\ \underline{: \forall n > N\ |\sigma_n - S|} = \left|\frac{S_1 + \ldots + S_{N_1} + S_{N_1+1} + \ldots + S_n}{n} - S\right| =$$

$$= \left|\frac{S_1 - S + \ldots + S_{N_1} - S + S_{N_1+1} - S + \ldots + S_n - S}{n}\right| \le \frac{|S_1 - S| + \ldots + |S_{N_1} - S|}{n} +$$

$$+ \frac{|S_{N_1+1} - S| + \ldots + |S_n - S|}{n} < \frac{MN_1}{n} + \frac{\frac{\varepsilon}{2}(n - N_1)}{n} \underline{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \underline{\varepsilon},$$

т.е. регулярность доказана.

4. Метод ср. арифм. Линейность – самостоятельно.

Регулярность. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1:$

$\forall n > N_1 \ |S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$. $M = \max\limits_{1\le k\le N_1} |S_k - S|$. $N_2: \frac{M N_1}{N_2} < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists N = \max(N_1, N_2): \forall n > N \ |\sigma_n - S| = \left|\frac{S_1 + \ldots + S_{N_1} + S_{N_1+1} + \ldots + S_n}{n} - S\right| =$$

$$= \left|\frac{S_1 - S + \ldots + S_{N_1} - S + S_{N_1+1} - S + \ldots + S_n - S}{n}\right| \le \frac{|S_1 - S| + \ldots + |S_{N_1} - S|}{n} +$$

$$+ \frac{|S_{N_1+1} - S| + \ldots + |S_n - S|}{n} < \frac{MN_1}{n} + \frac{\frac{\varepsilon}{2}(n - N_1)}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$ т.е. регулярность доказана.

Полная регулярность. Линейность $\Rightarrow$ достаточно: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = +\infty$ (?)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$, т.е. $\forall M > 0 \ \exists N_1: \forall n > N_1 \ S_n > 2M$.

$m = \max\limits_{1\le k\le N_1} |S_k|$. $N_2: \frac{N_1(m + 2M)}{N_2} < M \Rightarrow \exists N = \max(N_1, N_2): \forall n > N$

$$\sigma_n = \frac{S_1 + \ldots + S_{N_1} + S_{N_1+1} + \ldots + S_n}{n} \ge \frac{S_{N_1+1} + \ldots + S_n}{n} - \frac{mN_1}{n} > \frac{2M(n - N_1)}{n} - \frac{mN_1}{n} =$$

$$= 2M - \frac{(m + 2M)N_1}{n} > 2M - \frac{(m+2M)N_1}{N_2} \ge 2M - M = M,$$ т.е. полная регулярность д-зана.

Метод ср. арифм. можно применять и к расх. рядам

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1-1+1-1+1-1+\ldots \qquad S_k = \begin{cases} 1, & k\text{ - нек} \\ 0, & k\text{ - чёт} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sigma_n = \frac{S_1+\ldots+S_n}{n} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n=2m \\ \frac{m+1}{2m+1}, & n=2m+1 \end{cases} \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty}\sigma_n = \frac{1}{2}$$

Метод ср. арифм. можно применять и к расх. рядам

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1-1+1-1+1-1+\ldots \qquad S_k = \begin{cases} 1, & k\text{ - неч} \\ 0, & k\text{ - чёт} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sigma_n = \frac{S_1+\ldots+S_n}{n} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n=2m \\ \frac{m+1}{2m+1}, & n=2m+1 \end{cases} \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty}\sigma_n = \frac{1}{2}$$

Но не ко всем. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot n = 1-2+3-4+5-6+\ldots$

$S_1 = 1,\ S_2 = -1,\ S_3 = 2,\ S_4 = -2,\ S_5 = 3,\ S_6 = -3,\ \ldots \to \infty$

$$\left.\begin{array}{l} n=2m \Rightarrow \sigma_n = \sigma_{2m} = 0 \\ n=2m+1 \Rightarrow \sigma_n = \sigma_{2m+1} = \frac{m+1}{2m+1} \to \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{\exists} \lim_{n\to\infty}\sigma_n$$

Метод ср. арифм. можно применять и к расх. рядам

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1-1+1-1+1-1+\ldots \qquad S_k = \begin{cases} 1, & k\text{ - нeч} \\ 0, & k\text{ - чёт} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sigma_n = \frac{S_1+\ldots+S_n}{n} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n=2m \\ \frac{m+1}{2m+1}, & n=2m+1 \end{cases} \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty}\sigma_n = \frac{1}{2}$$

Но не ко всем. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot n = 1-2+3-4+5-6+\ldots$

$S_1 = 1,\ S_2 = -1,\ S_3 = 2,\ S_4 = -2,\ S_5 = 3,\ S_6 = -3,\ \ldots \to \infty$

$$\left.\begin{aligned} &n = 2m \Rightarrow \sigma_n = \sigma_{2m} = 0 \\ &n = 2m+1 \Rightarrow \sigma_n = \sigma_{2m+1} = \frac{m+1}{2m+1} \to \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \not\exists \lim_{n\to\infty}\sigma_n$$

Не все св-ва сх-сти переносятся на лин. вполне регул. методы суммирования

„Разбавление" нулями. $1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+\ldots$ – исх. ряд
$1-1+0+1-1+0+1-1+0+\ldots$ – „разбавл." ряд

$$\sigma_{3m} = \frac{1}{3},\ \sigma_{3m+1} = \frac{m+1}{3m+1} \to \frac{1}{3},\ \sigma_{3m+2} = \frac{m+1}{3m+2} \to \frac{1}{3} \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty}\sigma_n = \frac{1}{3}$$

А можно так разбавить нулями, что не будет суммироваться.

Аналогично можно ввести обобщённую сх-сть несобств. интегралов

Аналог метода ср. арифм. для $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$: $F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x-a}\int\limits_a^x F(t)\,dt$

Аналогично можно ввести обобщённую сх-сть несобств. интегралов

Аналог метода ср. арифм. для $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$: $F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x-a}\int\limits_a^x F(t)\,dt$

Примеры.

1. $\int\limits_0^{+\infty} \sin x\,dx$ $\quad F(x)=\int\limits_0^x \sin t\,dt = 1-\cos x$ $\quad$ ($\nexists \lim\limits_{x\to+\infty}(1-\cos x)$, т.е. расх.)

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int\limits_0^x (1-\cos t)\,dt = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-\sin x}{x} = 1$ (обобщ. значение)

Аналогично можно ввести обобщённую сх-сть несобств. интегралов

Аналог метода ср. арифм. для $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$: $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x-a}\int\limits_a^x F(t)dt$

Примеры.

1. $\int\limits_0^{+\infty}\sin x\,dx \quad F(x)=\int\limits_0^x \sin t\,dt = 1-\cos x \quad \left(\nexists \lim\limits_{x\to+\infty}(1-\cos x)\right.$, т.е. расх.$\left.\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int\limits_0^x(1-\cos t)dt = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-\sin x}{x} = 1$ (обобщ. значение)

2. $\int\limits_0^{+\infty}\cos x\,dx \quad F(x)=\int\limits_0^x \cos t\,dt = \sin x \quad \left(\nexists \lim\limits_{x\to+\infty}\sin x\right.$, т.е. инт-л расх.$\left.\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int\limits_0^x \sin t\,dt = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\cos x}{x} = 0$ (обобщ. значение инт-ла)