

# Окружности

---

Окружность называется **вписанной в треугольник**, если она касается всех трех его сторон, а её центр находится внутри окружности

- Центр вписанной в треугольник окружности лежит на пересечении биссектрис внутренних углов треугольника.
- В любой треугольник можно вписать окружность, и только одну.
- Радиус вписанной в треугольник окружности равен отношению площади треугольника и его полупериметра:  $r = \frac{S}{p}$ , где  $S$  - площадь треугольника, а  $p = \frac{a+b+c}{2}$  - полупериметр треугольника.

**Серединным перпендикуляром** называют прямую перпендикулярную отрезку и проходящую через его середину.

---

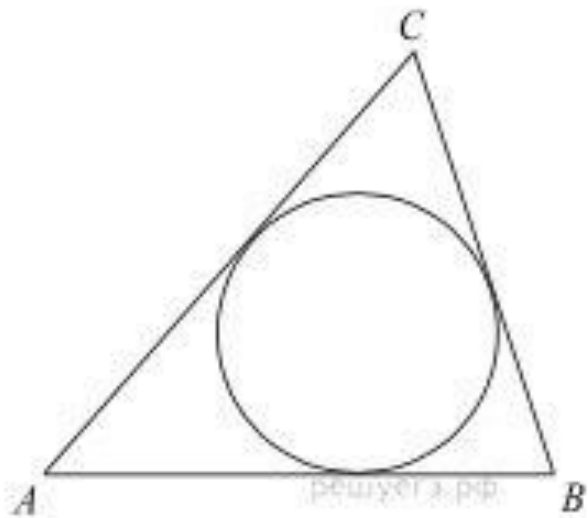
Равносторонний треугольник:

$$r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

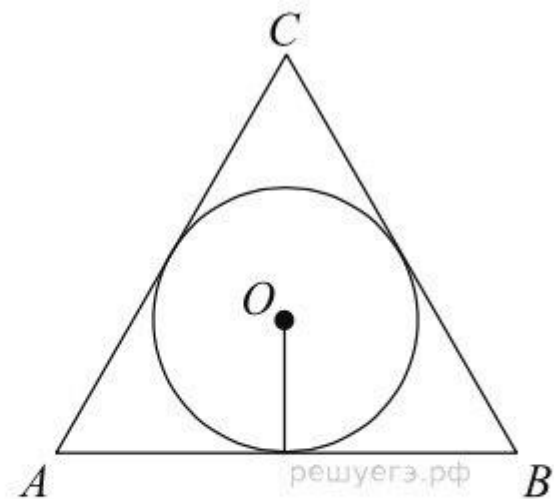
$$r = \frac{1}{3}h$$

*Прямоугольный треугольник:*

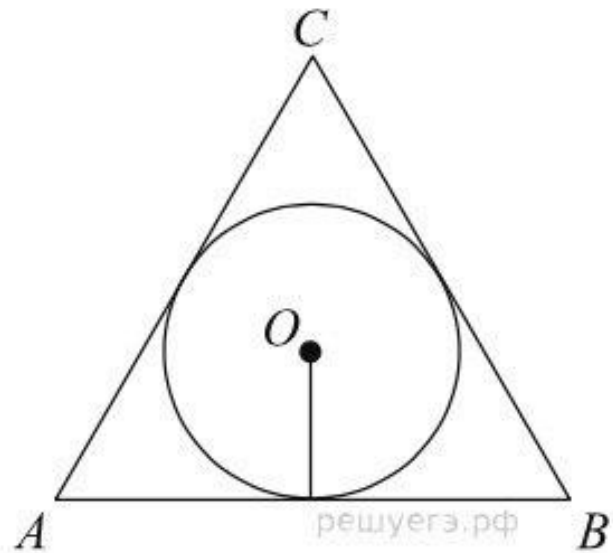
$$r = \frac{a+b-c}{2}$$



Периметр треугольника равен 12, а радиус вписанной окружности равен 1. Найдите площадь этого треугольника.



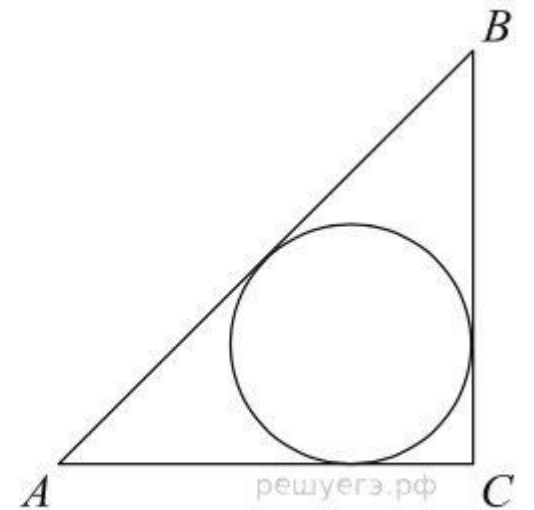
Найдите радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, высота которого равна 6.

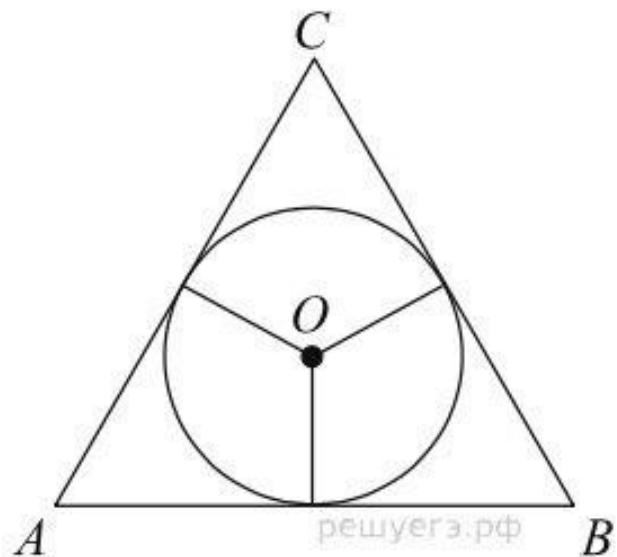


Сторона правильного треугольника равна  $\sqrt{3}$ . Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

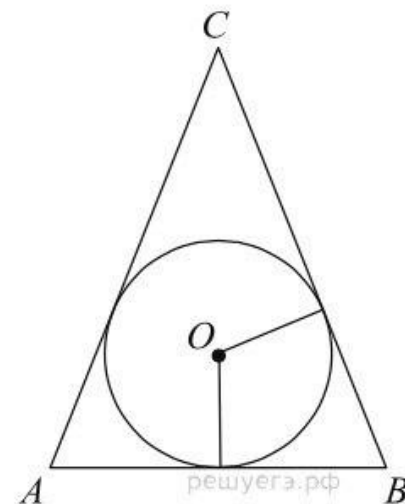
---

В  
треугольнике  
 $ABC$   
стороны  $AC$   
 $= 4$ ,  $BC = 3$ ,  
угол  $C$  равен  
 $90^\circ$ . Найдите  
радиус  
вписанной  
окружности.





Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 5, основание равно 6. Найдите радиус вписанной окружности.



Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник, делит в точке касания одну из боковых сторон на два отрезка, длины которых равны 5 и 3, считая от вершины, противоположной основанию. Найдите периметр треугольника.

## Четырехугольник, описанный около окружности

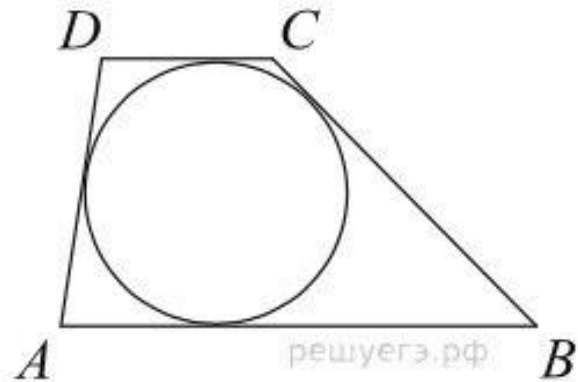
- Четырехугольник  $ABCD$  можно описать около окружности, если суммы противоположных сторон равны  $AB + CD = BC + AD$ .
- Если четырехугольник описан около окружности, то суммы противоположных сторон равны.
- Площадь:  $S = p \cdot r$ , где  $r$  - радиус вписанной окружности, а  $p = \frac{a+b+c+d}{2}$  - полупериметр.

---

## Окружность, вписанная в ромб

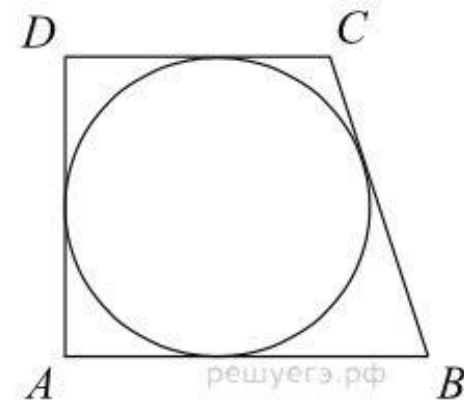
- В любой ромб можно вписать окружность.
- Радиус  $r$  вписанной окружности:  
 $r = \frac{h}{2}$ , где  $h$  - высота ромба или  
 $r = \frac{d_1 \cdot d_2}{4a}$ , где  $a$  - сторона ромба,  $d_1$  и  $d_2$  - диагонали ромба.

Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 3 и 5.

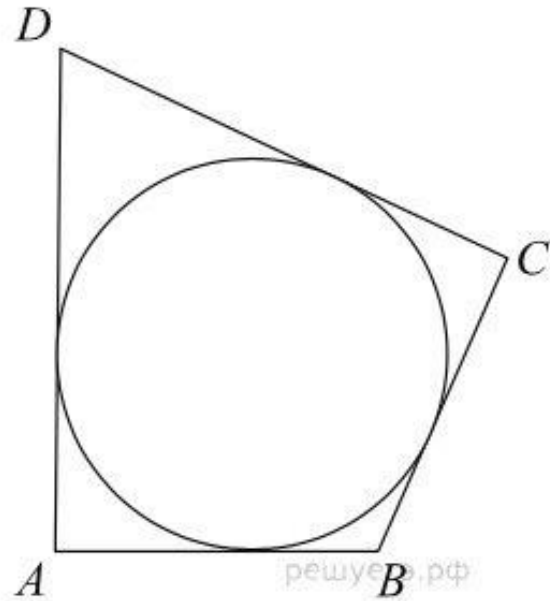


Найдите среднюю линию трапеции.

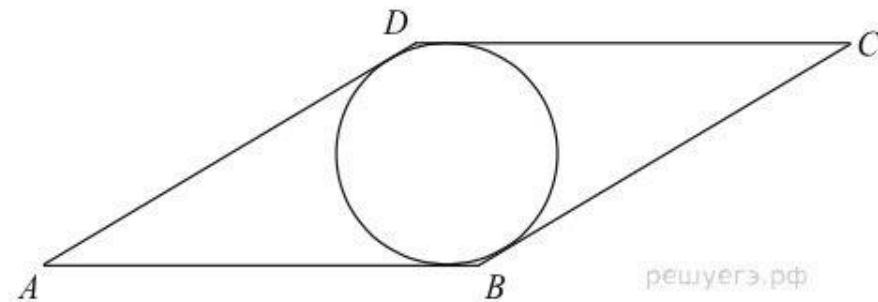
Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 22, ее большая боковая сторона равна 7. Найдите радиус окружности.



Найдите радиус окружности.

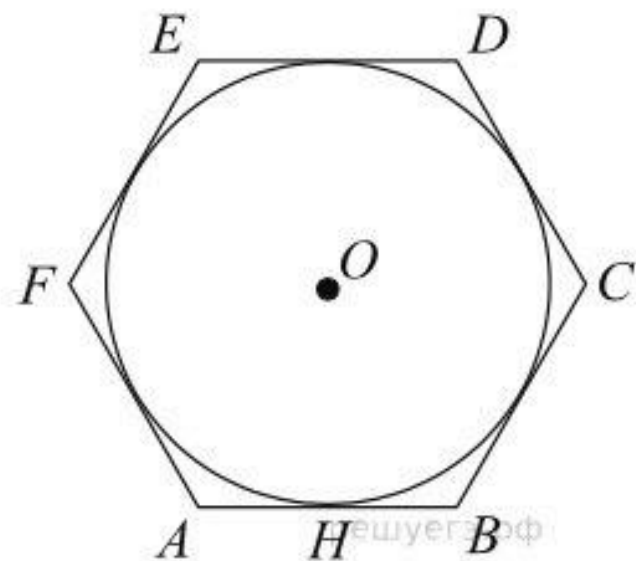


Периметр четырехугольника, описанного около окружности, равен 24, две его стороны равны 5 и 6. Найдите большую из оставшихся сторон.



Острый угол ромба равен  $30^\circ$ . Радиус вписанной в этот ромб окружности равен 2. Найдите сторону ромба.





Найдите сторону правильного шестиугольника, описанного около окружности, радиус которой равен  $\sqrt{3}$ .



Окружность называется **описанной около треугольника**, если она проходит через три его вершины.

- Вокруг любого треугольника можно описать окружность, и только одну.
- В любом треугольнике сторона равна произведению диаметра описанной окружности и синуса противолежащего угла.
- Площадь треугольника равна отношению произведения длин всех его сторон к учетверенному радиусу окружности, описанной около этого треугольника:  $R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}$ , где  $S$  - площадь треугольника.

---

Правильный треугольник:

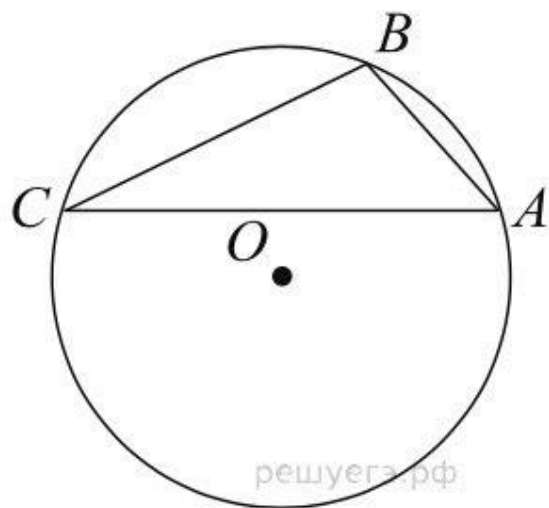
$$R = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Прямоугольный треугольник:

$$R = \frac{c}{2}$$

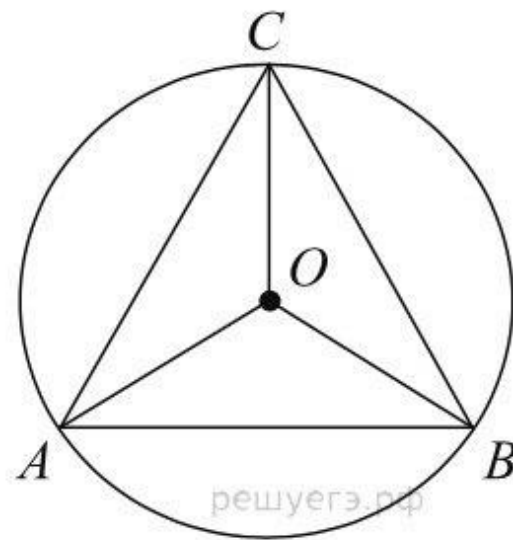
$$R = \frac{2}{3}h$$

Точки  $A,$   
 $B,$   $C,$

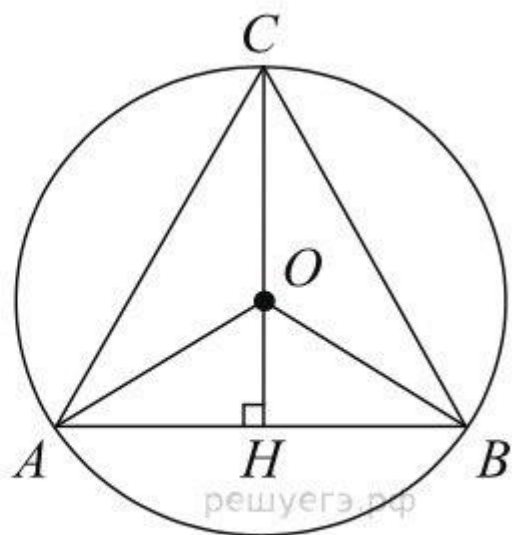


расположенные на окружности, делят ее на три дуги, градусные величины которых относятся как  $1 : 3 : 5$ . Найдите больший угол треугольника  $ABC$ . Ответ дайте в градусах.

Радиус  
окружности,  
описанной  
около  
правильного  
треугольника,  
равен  $\sqrt{3}$ .  
Найдите  
сторону этого  
треугольника.

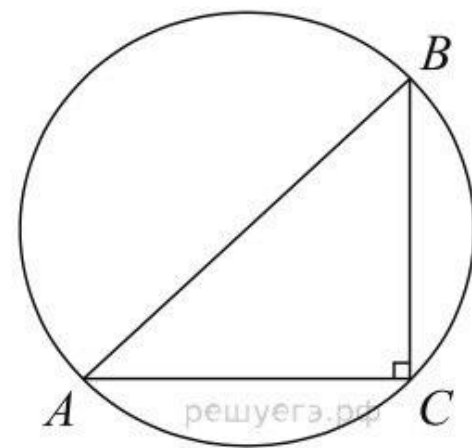


Высота  
правильного  
треугольника  
равна 3.  
Найдите радиус  
окружности,  
описанной  
около этого  
треугольника.



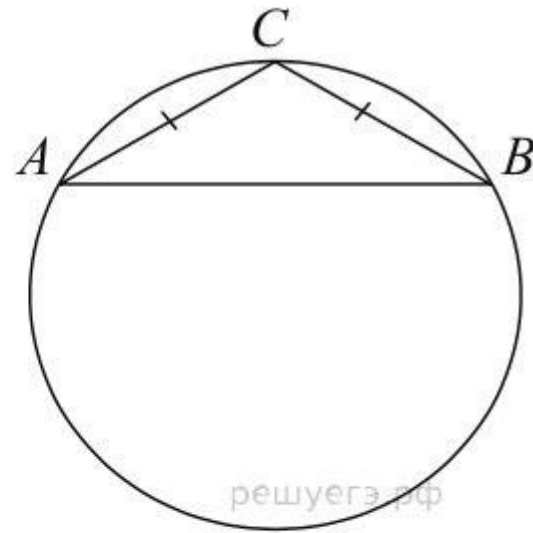
---

Радиус  
окружности,  
описанной около  
прямоугольного  
треугольника,  
равен 4. Найдите  
гипотенузу этого  
треугольника.



---

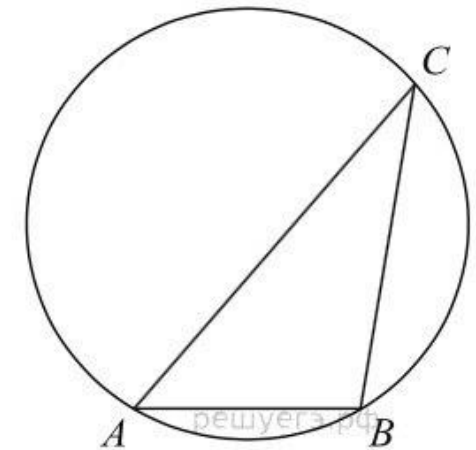
Боковая  
сторона



равнобедренного треугольника равна 1, угол при вершине, противолежащей основанию, равен  $120^\circ$ . Найдите диаметр описанной окружности этого треугольника.

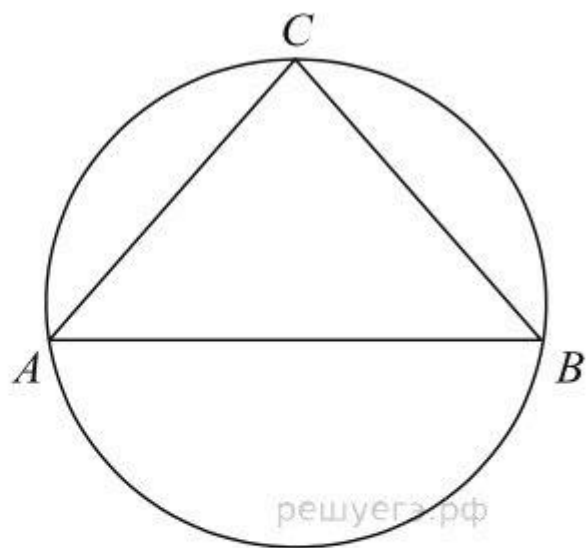
---

Одна  
сторона  
треугольника  
равна радиусу  
описанной  
окружности.  
Найдите угол  
треугольника,  
противолежащий этой стороне. Ответ  
дайте в градусах



---

Боковые  
стороны



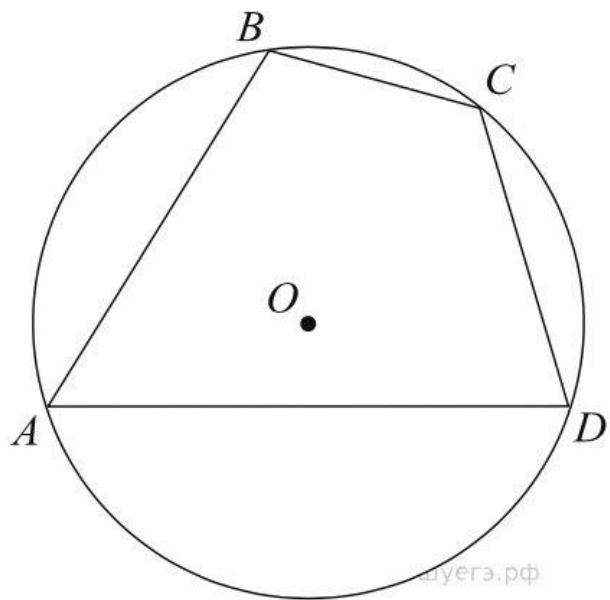
---

равнобедренного треугольника равны 40, основание равно 48. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.

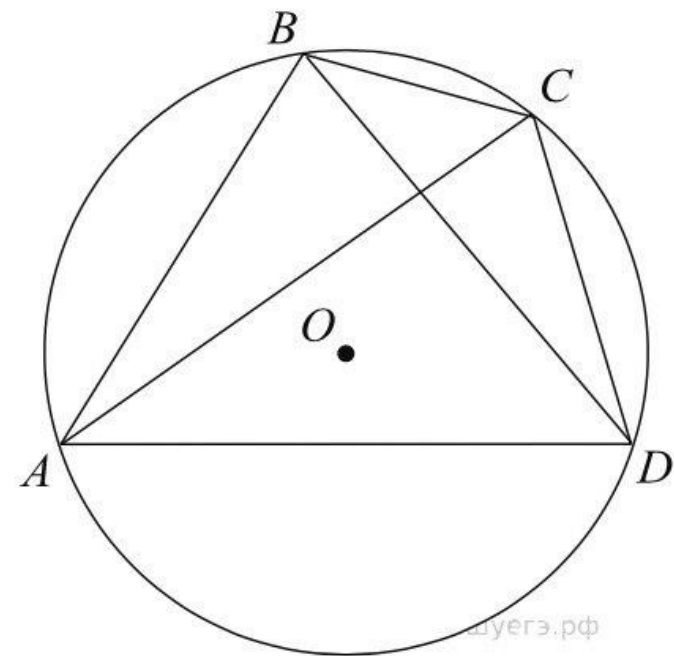
---

## Четырехугольник, вписанный в окружность

- Четырехугольник можно вписать в окружность, если сумма противоположных углов равна  $180^\circ$ :  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$ .
- Если четырехугольник вписан в окружность, то суммы противоположных углов равны  $180^\circ$ .
- Сумма произведений противоположных сторон четырехугольника  $ABCD$  равна произведению диагоналей:  
 $AB \cdot DC + AD \cdot BC = BD \cdot AC$ .
- Площадь:  
 $S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}$ ,  
где  $p = \frac{a+b+c+d}{2}$  - полупериметр четырехугольника.



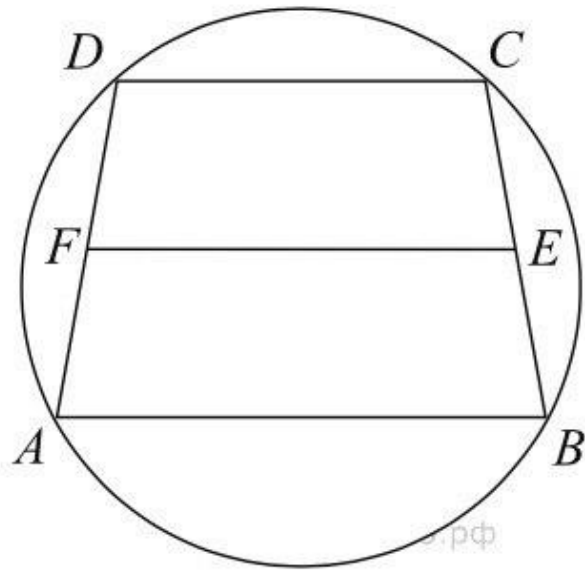
Стороны четырехугольника  $ABCD$   $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $AD$  стягивают дуги описанной окружности, градусные величины которых равны соответственно  $95^\circ$ ,  $49^\circ$ ,  $71^\circ$ ,  $145^\circ$ . Найдите угол  $B$  этого четырехугольника. Ответ дайте в градусах.



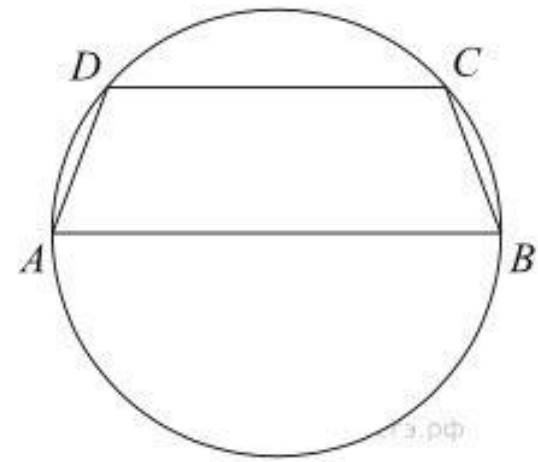
Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность. Угол  $ABD$  равен  $75^\circ$ , угол  $CAD$  равен  $35^\circ$ . Найдите угол  $ABC$ . Ответ дайте в градусах.



Около трапеции описана окружность. Периметр трапеции равен 22, средняя линия равна 5. Найдите боковую сторону трапеции.



—



Боковая сторона равнобедренной трапеции равна ее меньшему основанию, угол при основании равен  $60^\circ$ , большее основание равно 12. Найдите радиус описанной окружности этой трапеции.

Угол между стороной правильного  $n$ -угольника, вписанного в окружность, и радиусом этой окружности, проведенным в одну из вершин стороны, равен  $54^\circ$ . Найдите  $n$ .