Действительный анализ

Основной источник : *Смагин В.В. Действительный анализ. Учебное пособие. 2014 год.*

(см. https://vk.com/fd_an)

Дополнительная литература

1. *Шилов Г.Е., Гуревич Б.Л. Интеграл, мера и производная, 1967 г.*
2. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу, 1979 г.*
3. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа, 1976 г.*

(см. https://vk.com/fd_an и https://vk.com/func_an)

Глава 2.
Измеримые множества

20. Пространства суммируемых функций

Пусть p – фиксированное положительное число, то есть $0 < p < \infty$.

Определим множество $L_p[a,b]$ (или просто L_p), состоящее из всех измеримых на $[a,b]$ функций $x(t)$, таких, что функция $|x|^p \in L[a,b]$.

Такие функции $x(t)$ будем называть ***суммируемыми на*** $[a,b]$ ***со степенью*** p (или ***суммируемыми с*** p***–ой степенью***).

Заметим, что $L_1 = L_1[a,b] = L[a,b] = L$.

Покажем, что $L_p[a,b]$ можно считать вещественным линейным пространством. Действительно, если $x \in L_p$ и $\alpha \in \mathbb{R}^1$, то функция $(\alpha x)(t) = \alpha x(t)$ измерима на $[a,b]$ и $|\alpha x(t)|^p = |\alpha|^p\,|x|^p \in L$. Для двух функций x, $y \in L_p$ функция $(x+y)(t) = x(t)+y(t)$ измерима на $[a,b]$. В силу леммы 4 функция $|x(t)+y(t)|^p$ также измерима на $[a,b]$.

Справедлива оценка

$$|x(t)+y(t)|^p \le (|x(t)|+|y(t)|)^p \le (\,2\,\max\{\,|x(t)|,\,|y(t)|\,\})^p =$$
$$= 2^p\,\max\{\,|x(t)|^p,\,|y(t)|^p\,\} \le 2^p\,(|x(t)|^p + |y(t)|^p).$$

Из последнего неравенства, в силу следствия 1 теоремы 8 (Лебега) получим, что функция $|x+y|^p \in L$. Таким образом, функция $(x+y) \in L_p$.

Для однозначного определения нуля в пространстве $L_p[a,b]$ проведем в этом множестве ***факторизацию***.

Назовем функции $x, y \in L_p$ ***эквивалентными***, если $x(t) \overset{\text{п.в.}}{=} y(t)$. Получим на множестве L_p отношение эквивалентности, которое порождает разбиение L_p на классы эквивалентных элементов (фактор-классы). За множеством классов эквивалентных элементов сохраним прежнее обозначение $L_p[a,b]$ (или просто L_p). Таким образом, $x \in L_p[a,b]$ — это класс функций, измеримых на $[a,b]$, суммируемых на $[a,b]$ с $p-$ой степенью и равных между собой почти всюду на $[a,b]$. В таком случае, нулевым элементом в $L_p[a,b]$ будет класс функций, равных нулю почти всюду на $[a,b]$. Заметим, что все аксиомы линейного пространства выполняются очевидным образом.

Предположим теперь, что $1 \le p < \infty$. Превратим линейное пространство $L_p[a,b]$ в нормированное пространство. Определим для $x \in L_p$ норму

$$\|x\|_p = [I(|x|^p)]^{1/p} = \left(\int_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p}.$$

Проверим аксиомы нормы.

1. Для $x \in L_p$ $\|x\|_p \ge 0$ – очевидно.

Проверим вторую часть аксиомы 1:
$(\,\|x\|_p = 0\,) \longleftrightarrow (\,x(t) \overset{\text{п.в.}}{=} 0\,)$.

Пусть $\|x\|_p = [I(|x|^p)]^{1/p} = 0$, то есть $I(|x|^p) = 0$. Тогда, по следствию 2 из теоремы Беппо Леви, $x(t) = 0$ почти всюду на $[a,b]$.

Достаточность очевидна.

2. Если $\alpha \in \mathbb{R}^1$ и $x \in L_p$, то справедливо равенство
$$\|\alpha\, x\|_p = (\int_a^b |\alpha\, x(t)|^p\, dt)^{1/p} = |\alpha|\, \|x\|_p.$$

3. Покажем, что для любых x, $y \in L_p$ имеет место неравенство треугольника

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Неравенство треугольника при $p = 1$ очевидно (доказать самостоятельно!).

Для обоснования этого неравенства в случае $p > 1$ воспользуемся **неравенством Гельдера.**

НЕРАВЕНСТВО ГЕЛЬДЕРА. *Пусть заданы две функции* $x \in L_p[a,b]$ *с* $p > 1$ *и* $y \in L_q[a,b]$, где $1/p + 1/q = 1$. *Тогда функция* $x \cdot y \in L_1[a,b]$ *и*

$$\int_a^b |x(t)\, y(t)|\, dt \leq \Big(\int_a^b |x(t)|^p\, dt\Big)^{1/p} \Big(\int_a^b |y(t)|^q\, dt\Big)^{1/q},$$

или $\|x \cdot y\|_1 \leq \|x\|_p \, \|y\|_q$.

(*Без доказательства.*)

Третья аксиома нормы для случая $p > 1$.

Рассмотрим число q, такое, что $1/p + 1/q = 1$. Тогда $p = (p-1)q$ (доказать самостоятельно!).

Для функций x, $y \in L_p[a,b]$ получим оценку

$$|x+y|^p = |x+y|\,|x+y|^{p-1} \le |x|\,|x+y|^{p-1} + |y|\,|x+y|^{p-1},$$

где $|x|$, $|y| \in L_p$.

Так как $|x+y|^p \in L_1$, то $|x+y|^{p-1} = |x+y|^{p/q} \in L_q$.

Последнее неравенство интегрируем и затем воспользуемся неравенством Гельдера:

$$I|x+y|^p \le I(|x| \cdot |x+y|^{p-1}) + I(|y| \cdot |x+y|^{p-1}) \le$$

Последнее неравенство интегрируем и затем воспользуемся неравенством Гельдера:

$$I|x+y|^p \le I(|x| \cdot |x+y|^{p-1}) + I(|y| \cdot |x+y|^{p-1}) \le$$

$$\le \|x\|_p \| \, |x+y|^{p-1}\|_q + \|y\|_p \| \, |x+y|^{p-1}\|_q =$$

$$= (\|x\|_p + \|y\|_p) \| \, |x+y|^{p-1}\|_q =$$

$$= (\|x\|_p + \|y\|_p)(I|x+y|^{(p-1)q})^{1/q} = (\|x\|_p + \|y\|_p)(I|x+y|^p)^{1/q}.$$

Мы получили неравенство

$$I|x+y|^p \le (\|x\|_p + \|y\|_p)(I|x+y|^p)^{1/q}.$$

Мы получили неравенство

$$I|x+y|^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p)(I|x+y|^p)^{1/q}.$$

Это неравенство разделим на число $(I|x+y|^p)^{1/q}$ (считая, что $I|x+y|^p \neq 0$, так как в противном случае неравенство треугольника очевидно) и, с учетом равенства $1/p = 1 - 1/q$, получим:

$$\|x+y\|_p = (I|x+y|^p)^{1/p} = (I|x+y|^p)^{1-1/q} \leq \|x\|_p + \|y\|_p .$$

Итак, $L_p[a,b]$ в случае $1 \leq p < \infty$ является ***линейным нормированным пространством.***

Теорема 24. *Пространство* $L_p[a, b]$ *в случае* $1 \leq p < \infty$ *является банаховым, то есть полным линейным нормированным пространством.*

(*Без доказательства.*)

Замечание о пространстве $L_2[a, b]$.
Возьмем две функции $x,\, y \in L_2$. Из неравенства Гельдера следует, что их произведение $x \cdot y \in L$.

Следовательно, определено выражение

$$(x,\, y) = \int_a^b x(t)y(t)\,dt,$$

которое, в силу выполнения соответствующих аксиом, является скалярным произведением в $L_2[a, b]$.

Заметим, что норма, порождаемая этим скалярным произведением,

$$\|x\| = (x,\, x)^{1/2} = \left(\int_a^b |x(t)|^2\,dt\right)^{1/2} = \|x\|_2.$$

Получили, что $L_2[a, b]$ является ***вещественным гильбертовым пространством***.