Комплексные числа

Мнимые числа

***i* = -1, *i* – мнимая единица**

i, 2i, -0,3i — чисто мнимые числа

Арифметические операции над чисто мнимыми числами выполняются в соответствии с условием С3.

$$3i + 13i = (3 + 13)i = 16i$$
$$3i \cdot 13i = (3 \cdot 13)(i \cdot i) = 39i^2 = -39$$
$$i^7 = (i^2)^3 \cdot i = -i$$

В общем виде правила арифметических операций с чисто мнимыми числами таковы:

$$ai + bi = (a+b)i; \qquad ai - bi = (a-b)i;$$
$$a(bi) = (ab)i; \qquad (ai)(bi) = abi^2 = -a$$

где *a* и *b* — действительные числа.

Степени мнимой единицы

По определению первой степенью числа *i* является само число *i*, а второй степенью – число -1:

.

$$\boldsymbol{i^1 = i,\ i^2 = -1}$$

Более высокие степени числа *i* находятся следующим образом:

$$i^4 = i^2 \cdot i\text{^}2 = -1*-1= 1;$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = i;$$

$$i^6 = i^5 \cdot i = i^2 = -\ 1 \text{ и т. д.}$$

Стр 126

Очевидно, что при любом натуральном *n*

$$\boldsymbol{i^{4n} = 1; \qquad i^{4n+1} = i;}$$

$$\boldsymbol{i^{4n+2} = -\ 1 \qquad i^{4n+3} = -\ i.}$$

Комплексные числа

Определение 1. **Комплексным числом называют сумму действительного числа и число мнимого числа.**

$$z = a + bi \in C \Leftrightarrow a \in R, b \in R,$$

$$i - \text{мнимая} \quad \text{единица}.$$

$$a = \operatorname{Re} z, b = \operatorname{Im} z$$

Определение 2. **Два комплексных числа называют равными, если равны их действительные части и равны их мнимые части:**

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c,\ b = d.$$

Классификация комплексных чисел

- **Комплексные числа**
  a + bi
  - **Действительные числа**
    b = o
    - **Рациональные числа**
    - **Иррациональные числа**
  - **Мнимые числа**
    b ≠ o
    - **Мнимые числа с ненулевой действительной частью**
      a ≠ 0, b ≠ 0.
    - **Чисто мнимые числа**
      a = 0, b ≠ 0.

Арифметические операции над комплексными числами

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$(a + bi)\cdot(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Сопряженные комплексные числа

Определение: Если у комплексного числа сохранить действительную часть и поменять знак у мнимой части, то получится комплексное число, **сопряженное данному.**

Если данное комплексное число обозначается буквой z, то сопряженное число обозначается $\overline{z}$:

$$z = x + yi \Rightarrow \overline{z} = x - yi$$

Из всех комплексных чисел действительные числа (и только они) равны своим сопряженным числам.

Числа *a + bi* и *a - bi* *называются взаимно сопряженными комплексными числами.*

Свойства сопряженных чисел

1. **Сумма и произведение двух сопряженных чисел есть число действительное.**

$$z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a \qquad z\cdot\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2$$

2. **Число, сопряженное сумме двух комплексных чисел, равно сумме сопряженных данным числам.**

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$$

3. **Число, сопряженное разности двух комплексных чисел, равно разности сопряженных данным числам.**

$$\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$$

4. **Число, сопряженное произведению двух комплексных чисел, равно произведению сопряженных данным числам.**

$$\overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$$

Стр 128, №357(б,д,е)

а) (2 - 3i) + (5 + i) = 2 – 3i + 5 + i = 7 – 2i
в) (3 – 5i)(4 – 6i) = 12 – 18i – 20i + 30i^2 = 12 – 38i + 30(-1) = -18 – 38i
г) (40 + i)/(3 – i) = (40 + i)(3 + i)/(3 – i)(3 + i) = (120 + 40i + 3i + i^2)/(9-i^2)=(120 + 43i + (-1))/(9 - (-1))=(119 – 43i)/10

Д/з

Стр 128, разобраться с примером
№358(а,б,г)