А. Б. ШУР

Не роскошь, а хлеб насущный - МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЧАЙНИКОВ

3

Алчевск, 2008

Список сокращений

КП – коэффициент передачи, он же производная

КПЧС – коэффициенты передачи частных связей, они же частные производные

МСС – метод структурных схем

ОС – обратная связь

РКП – результирующий коэффициент передачи, он же полная производная

ТАУ – теория автоматического управления

ЧСС – число степеней свободы

Глава 3.

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ВВЕДЕНИЕ В МЕТОД СТРУКТУРНЫХ СХЕМ

3.1. Краткие сведения.

Метод структурных схем (**МСС**) – **способ рационального описания и количественного исследования взаимосвязей в сложном объекте, заимствованный из теории автоматического управления (ТАУ).**

Сложные функции – модели сложных систем, и как таковые сами суть сложные системы. Вполне естественно манипулировать ими с помощью аппарата, созданного специально для этой цели.

Его необычность для математики объясняется лишь тем, что он появился много позже становления сложившихся традиций.

В этом пособии главное его назначение – облегчить вывод правил дифференцирования и их применение к сложным функциям.

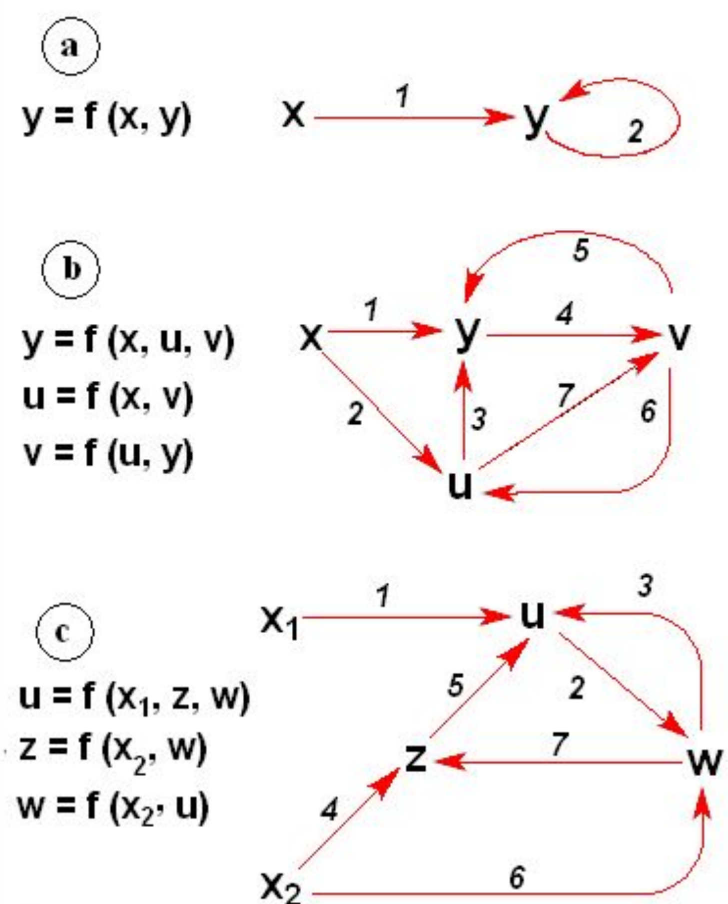
Метод, рожденный для прикладных целей на основе математических идей, оказывается полезен для самой науки-родоначальницы.

Более широкий взгляд на МСС представлен в презентации «Метод структурных схем – средство усиления способности воспринимать и перерабатывать информацию», см. файл «л3_матвуз.pps». Там же представлен другой, менее теоретичный, способ вывода правил эквивалентных преобразований.

В МСС запись уравнений, описывающих взаимосвязи в сложном объекте, заменяется изображением структурной схемы, состоящей из узлов и стрелок. Узлами обозначаются переменные, а стрелками – связи между ними; функциональная зависимость $y = f(x)$ принимает вид $x \to y$. Такое изображение называется ориентированным графом, но мы его будем называть «структурная схема», потому что в разных приложениях в понятие «граф» вкладывают разный смысл. Здесь под ним понимается то, что в ТАУ называют сигнальным графом.

Каждая стрелка изображает некоторую частную связь, а их совокупность – систему взаимосвязей в целом. Узел, где начинается стрелка, называют ее *входом*, а куда она приходит – *выходом*.

Рис.3.1. Примеры составления схем



Примечание: ***нумерация стрелок произвольная***

Правило составления схемы: к каждому узлу-переменной проводят стрелку из каждого узла, изображающего ее аргументы – см. рис.3.1 (a, b, c). Например, на схеме b к узлу **y** идут стрелки из узлов **x**, **u**, **v**, функцией которых является **y**, и т.д.

Понятия “узел” и “переменная” условно используем как синонимы (хотя это и не совсем точно), не оговаривая это каждый раз, чтобы не усложнять словесные конструкции.

Входом схемы называется узел, в который не приходит ни одна стрелка. Правильно составленная схема должна содержать хотя бы один вход. Входы на схеме соответствуют аргументам в функциональной зависимости. Значения входных параметров (и только их) можно менять произвольно, остальные будут ими предопределены.

Количеством входов непосредственно определяется *число степеней свободы* (ЧСС) системы – число переменных, которые можно задать независимо одно от другого. Оно также равно разности между числом переменных и числом уравнений. Узлы, из которых не выходит ни одной стрелки, являются чистыми выходами схемы. Схема может не содержать ни одного чистого выхода.

Все остальные узлы, кроме чистых входов и чистых выходов, являются одновременно и аргументами и функциями множества частных связей. Любой из них, если он нас интересует, можно считать выходом схемы.

В дальнейшем (если не оговорено обратное) будем рассматривать схемы с одним входом и одним выходом. Схема с несколькими входами – это совмещенное изображение нескольких таких схем.

Схему с несколькими чистыми выходами также можно считать совмещенным изображением нескольких схем, но в отличие от случая нескольких входов, это не влияет на ЧСС. Несколько чистых выходов нет необходимости рассматривать одновременно, ибо они друг на друга не влияют. Но их значения взаимосвязаны, поскольку они зависят от одного и того же входа.

Пользование общими для таких схем фрагментами экономит время при сложных расчетах. Умение видеть их приходит с опытом.

Узлы, соединенные стрелкой, называются соседними. Совокупность последовательных стрелок, по которым (с учетом их направления) можно пройти из одного узла в другой, образуют *путь*, или *канал*.

Стрелка, приходящая в тот же узел, из которого выходит, составляет *петлю обратной связи* (ОС) при этом узле (переменная влияет сама на себя). К обратной связи сводится и любой *замкнутый контур* (замкнутый путь). Наличие петель (контуров) – признак того, что в задаче *присутствуют уравнения*. Если на схеме нет ни одной обратной связи, значит в задаче нет и уравнений, и ее можно решить последовательными подстановками.

Рассмотрим особенности схем рис. 1. На схеме а имеется один вход x и одна петля обратной связи при узле y . На схеме b один вход x, от него к выходу y идут три прямых пути 1, 2-3, 2-7-5 ; имеются три замкнутых контура: 4-5, 6-7, 3-4-6. На схеме с два входа: x_1 и x_2. К выходу w от входа x_1 идет один прямой путь 1-2, а от входа x_2 - два прямых пути (4-5-2 и 6). Имеются два контура обратных связей (7-5-2 и 3-2).

Упражнения для самоконтроля. Для каждой из заданных в общем виде систем уравнений: построить *структурную схему*; произвольно *пронумеровать* стрелки; определить: *число входов*; число *прямых путей* от каждого входа к выходу y; *число петель* обратной связи с указанием, *какие* звенья (стрелки) входят в каждую из них.

1. $y= f(v)$; $v= f(x, u, y)$; $u=f(x, y)$.

2. $y= f(u, v)$; $u = f(x, w)$; $w = f(u)$; $v = f(x, z)$.

3. $x_1= f(x_0, y)$; $x_2= f(x1)$; $x_3= f(x1, x_2, y)$; $y=f(x_2, x_3)$.

4. $x_1=f(x_0, x_3)$; $x_2= f(x_0)$; $x_3= f(x1)$; $x_4= f(x_2, x_5)$; $x_5=f(x_1, x_3)$; $y=f(x_4, x_5)$

5. $y= f(x_0, z, w)$; $z= f(x_0, y, w)$; $w= f(x_0, y, z)$.

3.2. Коэффициенты передачи и количественная оценка влияний

3.2.1. Для *линейной функции* одного аргумента *изменение выхода пропорционально изменению входа*, а искомое количественное влияние выражается коэффициентом пропорциональности, именуемым *коэффициентом передачи* (КП). Это другое название для *углового коэффициента*, который при отсутствии графика лишается осязаемой наглядности; в ее поисках и возник синоним, смысл которого в том, что влияние *передается от входа стрелки к ее выходу*. Еще синоним, используемый в ТАУ: *коэффициент усиления*.

3.2.2. Как будет показано в п. 3.4, правила эквивалентных преобразований, выводимые ниже для линейных функций, полностью применимы и для функций произвольного вида при условии их *дифференцируемости*.

Коэффициент передачи для них есть синоним понятия *производной*. Для каждой *отдельной* связи КП есть *частная производная*, взятая в направлении стрелки при постоянных значениях всех параметров, откуда приходят остальные стрелки в тот же узел.

Для схемы в целом *результирующий коэффициент передачи* (РКП) *есть полная производная выхода по входу.*

3.3. Эквивалентные преобразования

Цель преобразований – свернуть схему до единственной стрелки, получив при этом выражение для РКП через КП частных связей и их структуру. Эквивалентность состоит в том, что РКП по заданному каналу должен оставаться неизменным до и после преобразования, для чего служат выводимые ниже правила.

***Любые комбинации* размещения стрелок на схемах сводятся в конечном счете *к трем основным*:**

1) ***последовательное*, когда в некоторый узел приходит одна стрелка и выходит из него также одна стрелка (конец первой совпадает с началом второй);**

2) ***параллельное*, когда две стрелки соединяют одни и те же два узла в одинаковом направлении;**

3) ***замкнутая петля*, входящая в тот же узел, откуда она выходит (как уже упоминалось, она называется петлей обратной связи).**

3.3.1. Правила преобразований

Владея понятием производной, можно, выводя правила преобразований, исходить из него, как и поступают в учебниках ТАУ. Но тогда МСС нельзя использовать для вывода формул дифференцирования. Чтобы получить эту весьма полезную возможность, правила нужно выводить независимым путем. Аналогично главам 1 и 2, сделаем это вначале для линейных зависимостей. Коэффициент передачи для них постоянен, и приращение функции в точности пропорционально приращению аргумента при любом его значении и любой величине приращения. Рассматриваем отклонения от базовой точки, в которой значения аргумента и функции нам известны. Выразим отклонение функции через отклонение аргумента:

$$\Delta y = y - y_0 = (b + k \cdot x) - (b + k \cdot x_0) = k \cdot x - k \cdot x_0 = k \cdot (x - x_0) = k \cdot \Delta x \,,$$

или, короче, $$\Delta y = k \cdot \Delta x \;.$$

Для *последовательного соединения* схема имеет вид, изображенный на рис.3.2:

$$x \xrightarrow{k_1} u \xrightarrow{k_2} y$$

$$x \xrightarrow{K} y$$

Рис.3.2. Последовательное соединение стрелок, внизу после свертывания

Это – функция от функции: $u=u(x), \quad y=y(u)$.

Выражение для промежуточной функции: $u = b_1 + k_1 \cdot x$;

после подстановки его в выражение для конечной функции:

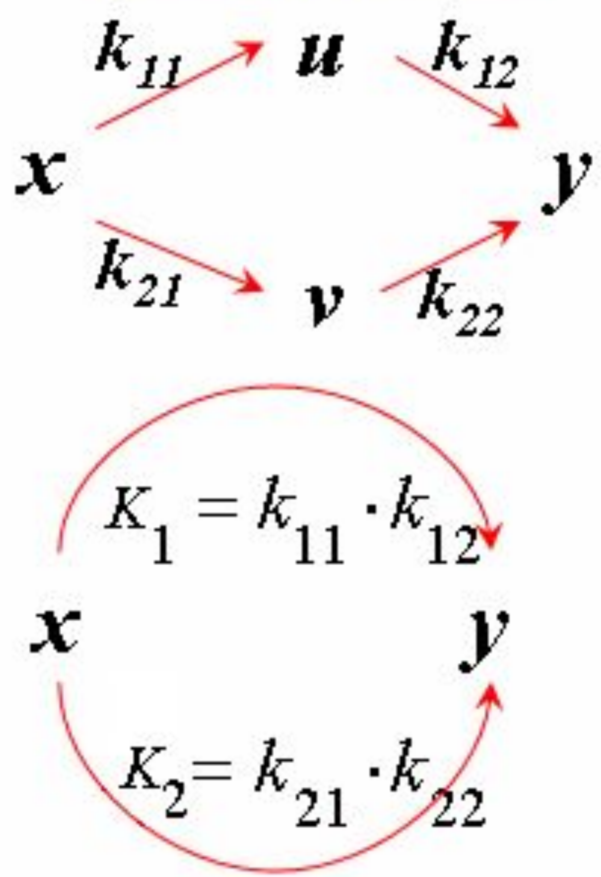
$$y = b_2 + k_2 \cdot u = b_2 + k_2 \cdot (b_1 + k_1 \cdot x) = b_2 + k_2 \cdot b_1 + k_1 \cdot k_2 \cdot x,$$

откуда $\Delta y = k_1 \cdot k_2 \cdot \Delta x = K \cdot \Delta x,$ **или** $K = k_1 \cdot k_2$;

мы получили

Правило 1. **При объединении последовательных стрелок их коэффициенты передачи перемножаются.**

Рис. 3.3. Происхождение параллельного соединения (функция от двух функций одного аргумента)



Схемы второго и третьего типа, в отличие от первого, в реальных задачах не бывают первичными:

это частично свернутые схемы, как показано на рис.3.3 и 3.4.

Для действий с ними это не имеет значения, но знать их происхождение желательно для понимания характера связей в системе.

Замечание. Параллельность стрелок на схеме находится в родстве не с параллельными прямыми, а с параллельным соединением проводников в электрических сетях. Так, стрелки на нижней схеме рис. 3.3 параллельны.

Для *функции от двух функций одного аргумента* (рис. 3.3) имеем:

промежуточные функции: $u = b_{11} + k_{11} \cdot x, \quad v = b_{21} + k_{21} \cdot x;$

***п*осле подстановки их выражений получаем:**

$$y = b_3 + k_{12} \cdot u + k_{22} \cdot v = b_3 + k_{12} \cdot (b_{11} + k_{11} \cdot x) + k_{22} \cdot (b_{21} + k_{21} \cdot x);$$

приводим подобные, вводим обозначения для свободного члена и коэффициентов при аргументе и подставляем в выражение:

$B = k_{12} \cdot b_{11} + k_{22} \cdot b_{21};$ $K_1 = k_{11} \cdot k_{12};$ $K_2 = k_{21} \cdot k_{22};$ $y = B + K_1 \cdot x + K_2 \cdot x;$

отсюда $\Delta y = K \cdot \Delta x = (K_1 + K_2) \cdot \Delta x$, ***или***

$$K = K_1 + K_2;$$

получаем

Правило 2. **При объединении параллельных стрелок их коэффициенты передачи складываются.**

Система из двух *уравнений* с двумя неизвестными

$$y = b_1 + k_1 \cdot x + k_3 \cdot w\,,$$

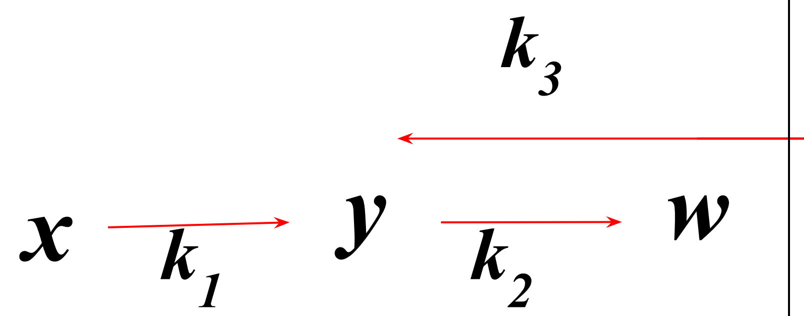
$$w = b_2 + k_2 \cdot y$$

образует обратную связь (рис. 3.4). В отличие от двух предыдущих случаев, здесь функция задана неявно.

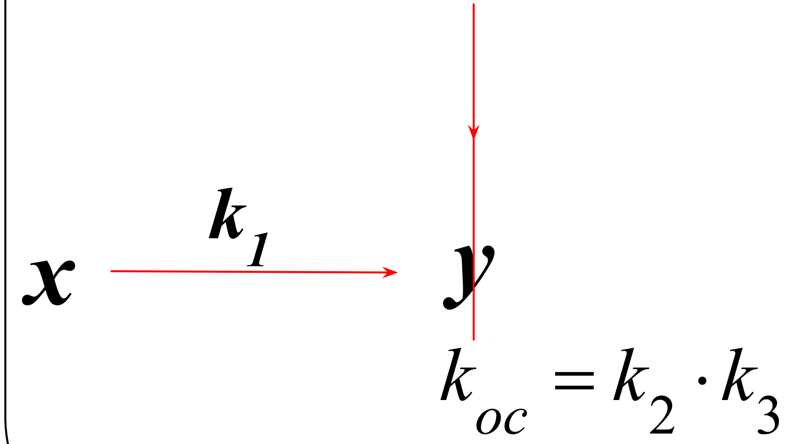
Подстановкой второго выражения в первое, число неизвестных сокращается до одного:

$$y = b_1 + k_1 \cdot x + k_3 \cdot (b_2 + k_2 \cdot y).$$

Рис. 3.4. Происхождение петли (антипараллельное соединение)



Получение петли при узле y при исключении неизвестной *w*:



Отсюда для приращения функции получаем уравнение с одним неизвестным:

$\Delta y = k_1 \cdot \Delta x + k_3 \cdot k_2 \cdot \Delta y \;=\; k_1 \cdot \Delta x + k_{oc} \cdot \Delta y$, **из которого его предстоит определить. Для этого переносим все члены с неизвестным в левую часть:** $\Delta y - k_{oc} \cdot \Delta y = k_1 \cdot \Delta x$,

или, вынося его за скобки: $\Delta y \cdot (1 - k_{oc}) = k_1 \cdot \Delta x$;

окончательно имеем:

$\Delta y = k_1 \cdot \Delta x / (1 - k_{oc}) = K \cdot \Delta x$, **откуда**

$$K = \frac{k_1}{1 - k_{oc}}$$

Иными словами, мы получили

Правило 3. **Если при некотором узле имеется петля обратной связи, то при ее удалении коэффициент передачи каждой стрелки, приходящей в этот узел, делится на знаменатель вида: единица минус КП удаляемой петли.**

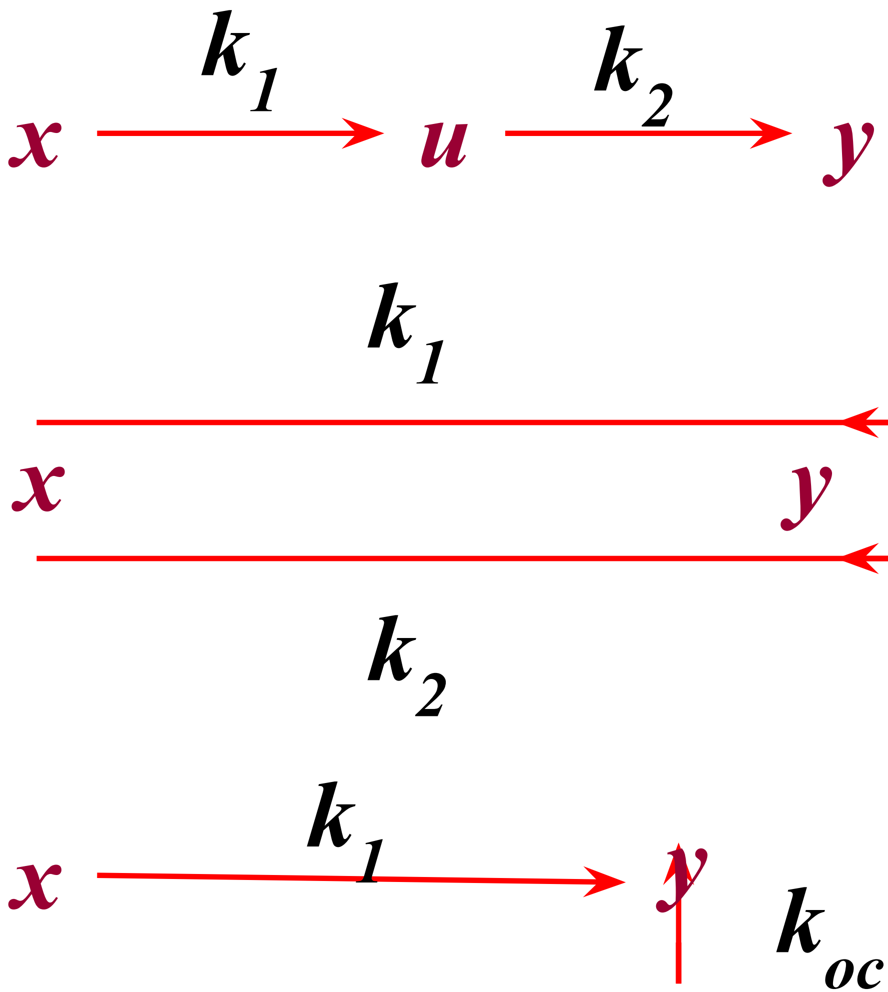
Напомним: наличие петель на схеме – признак присутствия уравнений в системе. Если петель нет, система решается простыми подстановками.

Замкнутое кольцо могут образовывать и несколько последовательных стрелок (см. напр. рис. 3.1, схема с, стрелки 2, 7, 5). В этом случае КП петли, согласно правилу 1, равен произведению КП *всех* образующих ее стрелок.

Заметим также, что петля или замкнутый контур *не могут быть единственными элементами* схемы. Такая схема не имела бы ни одного независимого входа, и ее получение – *признак ошибки* при составлении схемы или в самой математической формулировке задачи.

Также заметим, что *для вывода формул дифференцирования элементарных функций нам потребуются только два первых правила*. Третье правило понадобится в последующем – при дифференцировании неявных функций.

Рис.3.5. Сводка основных правил эквивалентных преобразований.



1 $$K = k_1 \cdot k_2$$

2 $$K = k_1 + k_2$$

3 $$K = \frac{k_1}{1 - k_{oc}}$$

3.3.2. О технике преобразований

Преобразования могут состоять как в укрупнении, так и в разукрупнении схемы. При укрупнении (свертывании) схемы вся необходимая для этого информация содержится в ней самой. Напротив, разукрупнение (развертывание) схемы может потребовать дополнительной информации. Здесь нас прежде всего интересует укрупнение, или свертывание схемы. Оно может быть частичным или полным. При частичном укрупнении из схемы удаляются некоторые узлы и объединяется часть стрелок. Коэффициенты передачи укрупненных связей выражаются через КП исходных частных связей. При полном укрупнении удаляются все промежуточные узлы, и схема сводится к единственной стрелке, соединяющей вход с выходом, а ее коэффициент передачи оказывается результирующим для всей схемы (РКП). Его определение и есть цель полного свертывания.

Частичное укрупнение имеет целью сделать схему более обозримой, либо служит промежуточным этапом полного свертывания. На такие этапы разбивают процедуру свертывания сложных схем. Каждый этап преобразований должен сохранять эквивалентность схемы исходной относительно интересующего нас канала вход - выход.

Все, сказанное о схемах и их свертывании, полностью сохраняет свою силу при переходе к функциям любой степени сложности. Более подробные сведения о МСС, включая его использование для дифференцирования сложных и неявных функций и для решения практических задач, приведены в пособии [3].

Упражнение: Составить выражения для РКП схем, изображенных на рис. 3. 1.

Пример практического пользования правилами для свертывания схем приведен на рис. 3.6. При этом показан дополнительный прием, по сути аналогичный *раскрытию скобок* в алгебраическом выражении. К нему пришлось прибегнуть из-за наличия на схеме 1 так называемых перекрестных связей, мешающих воспользоваться основными правилами.

Так, стрелки k_1 и k_2 можно было бы объединить, как последовательные, но этому мешает стрелка k_5, выходящая из узла x_1. Аналогично, объединить последовательные стрелки k_2 и k_3 мешает приход стрелки k_4 в узел x_2. Чтобы обеспечить развязку, на схеме 2 продублированы узел x_1 и стрелка k_1. Теперь ничто не мешает объединить стрелки k_1 и k_2, что и сделано на схеме 3. Затем (схема 4) объединяются параллельные стрелки, соединяющие узлы x_0 и x_2, после чего (схема 5) в два этапа объединяются две последовательные, а затем две параллельные стрелки.

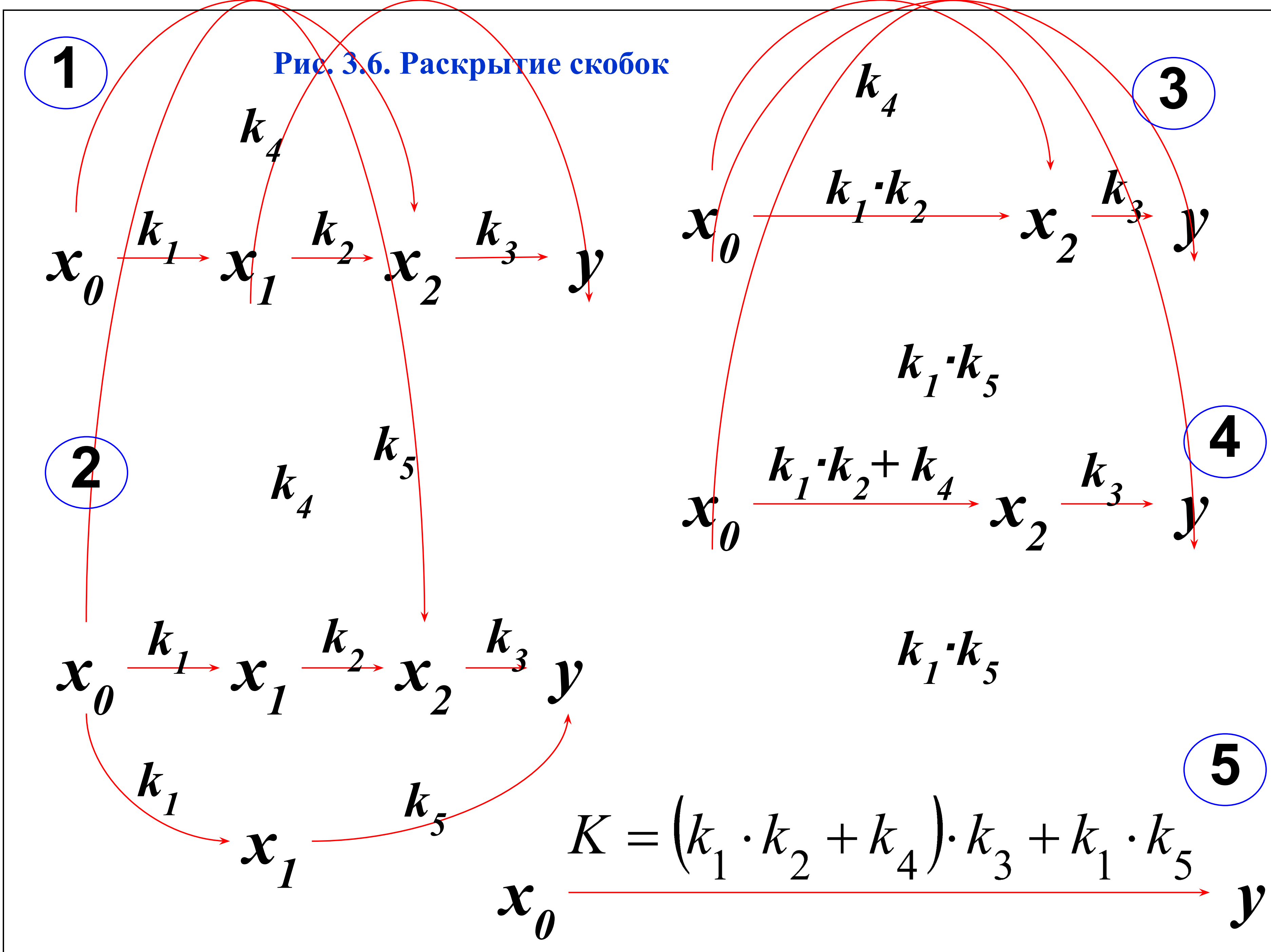


Рис. 3.6. Раскрытие скобок

$$K = \left(k_1 \cdot k_2 + k_4\right) \cdot k_3 + k_1 \cdot k_5$$

3.4. Обобщение МСС для нелинейных зависимостей

Поскольку поведение дифференцируемой функции в точке описывается поведением касательной, а для функции двух переменных – касательной плоскостью, правила преобразований, выведенные в п. 3.3 для линейных функций, автоматически распространяются на дифференцируемые функции произвольного вида, если под коэффициентами передачи понимать производные: для частных связей – частные производные, а для схемы в целом – полные производные. Различие в пользовании правилами для линейного и нелинейного случаев состоит в том же самом, чем различаются угловой коэффициент линейной функции и производная нелинейной: *глобальность* первого и *локальность* второй. Ввиду важности вопроса, рассмотрим его несколько подробнее.

Для правила 1 (рис.3.5, схема 1) дополним вывод рассуждениями, приводящими к понятию дифференциала. Имеем функцию от функции: $u=u(x)$, $y=y(u)$. Если обе функции заменить их секущими, то КП результирующей функции $y(x)$ запишется по правилу 1 для линейного случая: $K=k_1 \bullet k_2$. Выделим в коэффициентах, как прежде, постоянные и переменные части: $K=(k_1+\Delta k_1)\bullet(k_2+\Delta k_2)$. Напомним, что переменные части коэффициентов стремятся к нулю с приближением к точке касания. Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, имеем $k=Lim\ K = k_1 \bullet k_2$, и тем самым *правило 1 распространено на общий случай.*

При выводе правила 2 (рис.3.3; рис.3.5, схема 2) промежуточные аргументы u и v рассматривались как функции одного и того же фактического аргумента х, и следовательно, между собой они связаны параметрически. Поэтому приращения Δu и Δv на рис. 2.2 и 2.3 (см. главу 2) для нашего случая не должны считаться независимыми одно от другого. Связь между ними на этих рисунках изображена пунктирной диагональю в координатной плоскости u, v.

Равенство полного приращения сумме частных приращений (рис. 2.2) равнозначно правилу 2 для линейного случая, а равенство полного дифференциала сумме частных дифференциалов (рис. 2.3) – его обобщению на (дифференцируемые !) функции произвольного вида. Итак, *правило 2 эквивалентных преобразований сохраняет свою силу для функций общего вида.*

Правило 3 есть обобщение правила 2 на неявные функции. Если задана неявная и вообще говоря – нелинейная функция $y=f(x, y)$, то ее дифференциал можно выразить как $dy=f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy$, причем производная f'_y есть не что иное, как КП обратной связи. Отсюда $dy=f'_x \cdot dx/(1-f'_y)$, или $dy/dx=f'_x/(1-f'_y)$, чем и доказывается справедливость правила 3 для общего случая.

Итак, мы выяснили, что *правила эквивалентных преобразований, выведенные для линейных зависимостей, сохраняют свою силу и для дифференцируемых функций произвольного вида, если под коэффициентами передачи понимать производные.*

Теперь правила преобразований можно использовать для дифференцирования любых функций, в том числе и для вывода правил дифференцирования.