

Интегралы, зависящие от параметра

Собственные интегралы

Оп. $\forall (x, y) \in \Pi \equiv \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} \exists f(x, y)$, при этом $\forall y \in [c, d]$ $f(x, y)$ интегр. по x на $[a, b]$. Тогда $\forall y \in [c, d]$ существует

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

- интеграл, зависящий от параметра $y \in [c, d]$.

Интегралы, зависящие от параметра

Собственные интегралы

Оп. $\forall (x, y) \in \Pi \equiv \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} \exists f(x, y)$, приём $\forall y \in [c, d] f(x, y)$ интегр. по x на $[a, b]$. Тогда $\forall y \in [c, d]$ существует

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

- интеграл, зависящий от параметра $y \in [c, d]$.

Т1. $f(x, y)$ непр. в $\Pi \Rightarrow F(y) \in C[c, d]$.

Интегралы, зависящие от параметра

Собственные интегралы

Оп. $\forall (x, y) \in \Pi \equiv \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} \exists f(x, y)$, приём $\forall y \in [c, d]$
 $f(x, y)$ непр. по x на $[a, b]$. Тогда $\forall y \in [c, d]$ существует

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

- интеграл, зависящий от параметра $y \in [c, d]$.

Т1. $f(x, y)$ непр. в $\Pi \Rightarrow F(y) \in C[c, d]$.

Д-бо. $f(x, y)$ непр. непр. в $\Pi \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \Pi,$

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta \Rightarrow |f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot \forall y_1, y_2 \in [c, d], |y_1 - y_2| < \delta$$

$$|F(y_2) - F(y_1)| = \left| \int_0^b f(x, y_2) dx - \int_0^b f(x, y_1) dx \right| \leq \int_0^b |f(x, y_2) - f(x, y_1)| dx \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (b-a) = \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon, \text{ т.е. } F(y) \text{ непр. на } [c, d], \text{ т.е. } F(y) \in C[c, d].$$

Т.д-зна

Интегралы, зависящие от параметра

Собственные интегралы

Оп. $\forall (x, y) \in \Pi \equiv \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} \exists f(x, y)$, приём $\forall y \in [c, d]$

$f(x, y)$ интгр. по x на $[a, b]$. Тогда $\forall y \in [c, d]$ существует

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

- интеграл, зависящий от параметра $y \in [c, d]$.

Т1. $f(x, y)$ непр. в $\Pi \Rightarrow F(y) \in C[c, d]$.

Д-во. $f(x, y)$ пдлн. непр. в $\Pi \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \Pi,$

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta \Rightarrow |f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot \forall y_1, y_2 \in [c, d], |y_1 - y_2| < \delta$$

$$|F(y_2) - F(y_1)| = \left| \int_0^b f(x, y_2) dx - \int_0^b f(x, y_1) dx \right| \leq \int_0^b |f(x, y_2) - f(x, y_1)| dx \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (b-a) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \text{ т.е. } F(y) \text{ пдлн. непр. на } [c, d], \text{ т.е. } F(y) \in C[c, d].$$

т. 2-заня.

$$\text{[1. } \forall y_0 \in [c, d] \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y_0) dx \text{]}$$

Интегралы, зависящие от параметра

Собственные интегралы

Оп. $\forall (x, y) \in \Pi \equiv \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} \exists f(x, y)$, приём $\forall y \in [c, d]$
 $f(x, y)$ интегр. по x на $[a, b]$. Тогда $\forall y \in [c, d]$ существует

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

- интеграл, зависящий от параметра $y \in [c, d]$.

T1. $f(x, y)$ непр. в $\Pi \Rightarrow F(y) \in C[c, d]$.

T2. $f(x, y)$ непр. в $\Pi \Rightarrow F(y)$ интегр. на $[c, d]$, причём

$$\int_c^d F(y) dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

Интегралы, зависящие от параметра

Собственные интегралы

Оп. $\forall (x, y) \in \Pi \equiv \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} \exists f(x, y)$, причём $\forall y \in [c, d]$

$f(x, y)$ непр. по x на $[a, b]$. Тогда $\forall y \in [c, d]$ существует

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

- интеграл, зависящий от параметра $y \in [c, d]$.

T1. $f(x, y)$ непр. В $\Pi \Rightarrow F(y) \in C[c, d]$.

T2. $f(x, y)$ непр. в $\Pi \Rightarrow F(y)$ интегр. на $[c, d]$, причём

$$\int_c^d F(y) dy \equiv \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

Д-бо. $F(y) \in C[c, d] \Rightarrow F(y)$ интегр. на $[c, d]$; $f(x, y)$ непр. на $\Pi \Rightarrow f(x, y)$ интегр. на Π ,

$$\iint_{\Pi} f(x, y) dx dy = \int_0^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \underbrace{\int_a^b f(x, y) dx}_{F(y)}.$$

Теор. доказана.

Оп. $\forall (x, y) \in \Pi \equiv \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} \exists f(x, y)$, приём $\forall y \in [c, d]$

$f(x, y)$ непр. по x на $[a, b]$. Тогда $\forall y \in [c, d]$ существует

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

- непр., зависящий от направления $y \in [c, d]$.

T1. $f(x, y)$ непр. в $\Pi \Rightarrow F(y) \in C[c, d]$.

T2. $f(x, y)$ непр. в $\Pi \Rightarrow F(y)$ непр. по $[c, d]$, причём

$$\int_c^d F(y) dy \equiv \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

Д-во. $F(y) \in C[c, d] \Rightarrow F(y)$ непр. по $[c, d]$; $f(x, y)$ непр. по $\Pi \Rightarrow f(x, y)$ непр. по Π ,

$$\iint_{\Pi} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \underbrace{\int_a^b f(x, y) dx}_{F(y)}.$$

Теор. доказана.

$$\text{Позже } \forall y \in [c, d] \Rightarrow \int_a^y F(t) dt \equiv \int_c^y \left[\int_a^b f(x, t) dx \right] dt = \int_a^b dx \int_c^y f(x, t) dt$$

Onp. $\forall (x, y) \in \Pi \equiv \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} \exists f(x, y)$, nfirmem $\forall y \in [c, d]$

$f(x, y)$ uniers. no x na $[a, b]$. Tогда $\forall y \in [c, d]$ cymesbye

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

- uniersal, zavisiayushii o y na intervalle $y \in [c, d]$.

T1. $f(x, y)$ nemp. $\& \Pi \Rightarrow F(y) \in C[c, d]$.

T2. $f(x, y)$ nemp. $\& \Pi \Rightarrow F(y)$ uniers. na $[c, d]$, nfirmem

$$\int_c^d F(y) dy \equiv \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

Потому $\forall y \in [c, d] \Rightarrow \int_c^y F(t) dt \equiv \int_c^y \left[\int_a^b f(x, t) dx \right] dt = \int_a^b dx \int_c^y f(x, t) dt$

T3. $f(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}$ nemp. $\& \Pi \Rightarrow \forall y \in [c, d]$

$$\exists F'(y) = \frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx$$

$$\text{Позору} \forall y \in [c, d] \Rightarrow \int_c^y F(t) dt \equiv \int_c^y \left[\int_a^b f(x, t) dx \right] dt = \int_a^b dx \int_c^y f(x, t) dt$$

T3. $f(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ непр. в Π . $\Rightarrow \forall y \in [c, d]$

$$\exists F'(y) = \frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx$$

Д-бо. $\varphi(y) = \int_a^y \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx$, $\varphi(y) \in C[c, d]$, непр. на $[c, d]$, $\Rightarrow \forall y \in [c, d]$

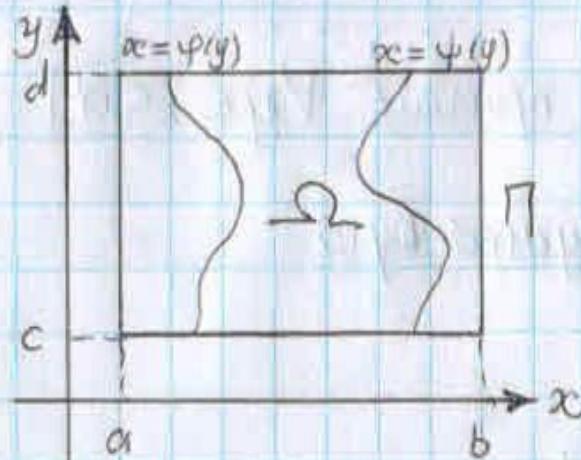
$$\int_c^y \varphi(t) dt = \int_c^y \left[\int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx \right] dt = \int_a^b dx \int_c^y \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dt = \int_a^b [f(x, y) - f(x, c)] dx = F(y) - F(c)$$

$$F(y) = F(c) + \int_c^y \varphi(t) dt \Rightarrow \forall y \in [c, d] \exists F'(y) = \varphi(y) = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx.$$

Теор. Доказана.

Пусть $\varphi(y), \psi(y)$: $a \leq \varphi(y) \leq \psi(y) \leq b$ $\forall y \in [c, d]$.

$$\Omega \equiv \{(x, y) : \varphi(y) \leq x \leq \psi(y), y \in [c, d]\}$$



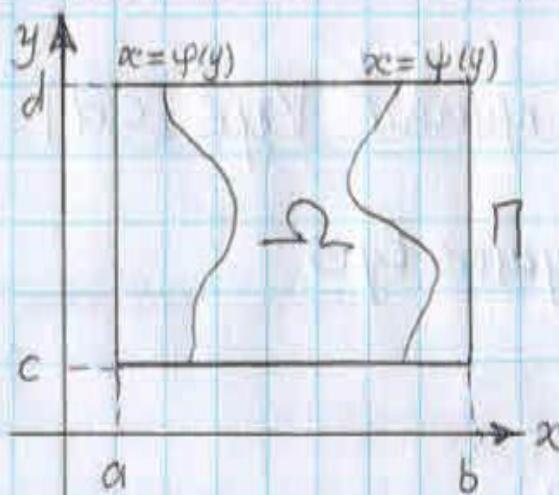
Рассмотрим интересные виды

$$F(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx, \quad y \in [c, d]$$

если $\forall y \in [c, d] f(x, y)$ интегр. на $[\varphi(y), \psi(y)]$

Пусть $\varphi(y), \psi(y) : a \leq \varphi(y) \leq \psi(y) \leq b \quad \forall y \in [c, d]$.

$$\Omega \equiv \{(x, y) : \varphi(y) \leq x \leq \psi(y), y \in [c, d]\}$$



Рассмотрим интервалы буда

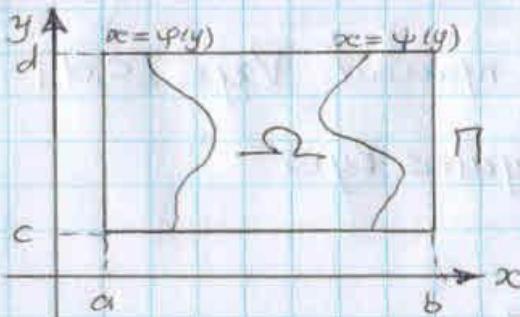
$$F(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx, \quad y \in [c, d]$$

если $\forall y \in [c, d] f(x, y)$ интегр. на $[\varphi(y), \psi(y)]$

Т4. $f(x, y)$ непр. в $\Pi \cap \Omega$, $\varphi(y), \psi(y) \in C[c, d] \Rightarrow F'(y) \in C[c, d]$

$\forall y \in [c, d] \quad \varphi(y), \psi(y) : a \leq \varphi(y) \leq \psi(y) \leq b \quad \forall y \in [c, d].$

$$\Omega = \{(x, y) : \varphi(y) \leq x \leq \psi(y), y \in [c, d]\}$$



Рассмотрим интервалы вида

$$F(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx, \quad y \in [c, d]$$

если $\forall y \in [c, d] \quad f(x, y)$ интегр. на $[\varphi(y), \psi(y)]$

Т4. $f(x, y)$ непр. в $\Pi \cap \Omega$, $\varphi(y), \psi(y) \in C[c, d] \Rightarrow F(y) \in C[c, d]$

Д-бо. $\exists M > 0 : |f(x, y)| \leq M \quad \forall (x, y) \in \Pi$. $f(x, y)$ непр. на $\Pi \Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 : \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \Pi, \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta_1 \Rightarrow |f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

$\varphi(y), \psi(y)$ непр. на $[c, d] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 : \forall y_1, y_2 \in [c, d] \Rightarrow |\varphi(y_2) - \varphi(y_1)| < \frac{\varepsilon}{4M}$,

$|\psi(y_2) - \psi(y_1)| < \frac{\varepsilon}{4M} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0 : \forall y_1, y_2 \in [c, d], |y_1 - y_2| < \delta$

$$|F(y_2) - F(y_1)| = \left| \int_{\varphi(y_2)}^{\psi(y_2)} f(x, y_2) dx - \int_{\varphi(y_1)}^{\psi(y_1)} f(x, y_1) dx \right| = \left| \int_{\varphi(y_2)}^{\varphi(y_1)} f(x, y_2) dx + \int_{\varphi(y_1)}^{\psi(y_2)} f(x, y_2) dx + \int_{\psi(y_1)}^{\psi(y_2)} f(x, y_1) dx - \int_{\varphi(y_1)}^{\psi(y_1)} f(x, y_1) dx \right|$$

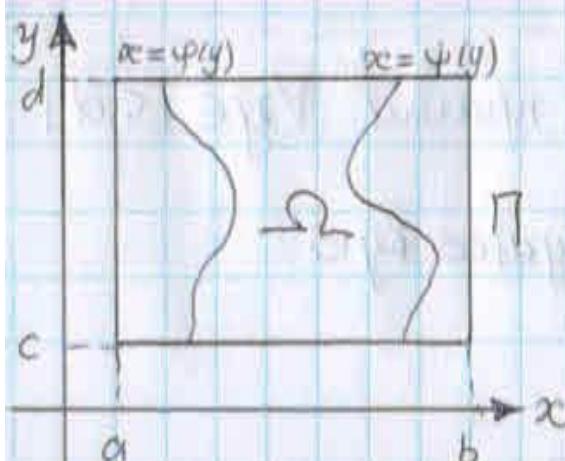
$$= \left| \int_{\varphi(y_2)}^{\varphi(y_1)} |f(x, y_2)| dx + \int_{\varphi(y_1)}^{\psi(y_2)} |f(x, y_2) - f(x, y_1)| dx + \int_{\psi(y_1)}^{\psi(y_2)} |f(x, y_1)| dx \right| \leq$$

$$\leq M |\varphi(y_2) - \varphi(y_1)| + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot \underbrace{(\psi(y_2) - \varphi(y_2))}_{\leq (b-a)} + M |\psi(y_2) - \psi(y_1)| < M \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2} + M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon.$$

Теор. доказано

$\exists \psi \cap \varphi(y), \psi(y) : a \leq \varphi(y) \leq \psi(y) \leq b \quad \forall y \in [c, d].$

$$\Omega \equiv \{ (x, y) : \varphi(y) \leq x \leq \psi(y), y \in [c, d] \}$$



Рассматриваются интервалы буда

$$F(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx, \quad y \in [c, d]$$

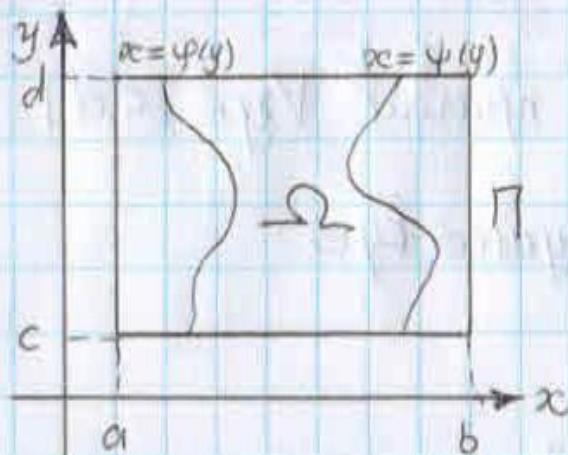
если $\forall y \in [c, d] \quad f(x, y)$ интегр. на $[\varphi(y), \psi(y)]$

T4. $f(x, y)$ непр. в $\Omega \subset \Omega$, $\varphi(y), \psi(y) \in C[c, d] \Rightarrow F'(y) \in C[c, d]$

$$\text{C}_{\Delta} \quad \forall y_0 \in [c, d] \quad \lim_{y \rightarrow y_0} \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx = \int_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} f(x, y_0) dx$$

Пусть $\varphi(y), \psi(y)$: $a \leq \varphi(y) \leq \psi(y) \leq b$ $\forall y \in [c, d]$.

$$\Omega \equiv \{(x, y) : \varphi(y) \leq x \leq \psi(y), y \in [c, d]\}$$



Рассмотрим интервалы буда

$$F(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx, \quad y \in [c, d]$$

если $\forall y \in [c, d]$ $f(x, y)$ интегр. на $[\varphi(y), \psi(y)]$

T4. $f(x, y)$ непр. в $\Pi \cap \Omega$, $\varphi(y), \psi(y) \in C[c, d] \Rightarrow F'(y) \in C[c, d]$

T5 $f(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}$ непр. в $\Pi \cap \Omega$; $\varphi'(y), \psi'(y) \in C[c, d] \Rightarrow \forall y \in [c, d]$

$$\exists F'(y) = \frac{d}{dy} \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx + f(\psi(y), y) \psi'(y) - f(\varphi(y), y) \varphi'(y).$$

T5 $f(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}$ непрер. в $\Pi \supset \Omega$; $\psi(y), \psi'(y) \in C[c,d] \Rightarrow \forall y \in [c,d]$

$$\exists F'(y) \equiv \frac{d}{dy} \int_{\psi(y)}^{\psi(y)} f(x,y) dx = \int_{\psi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx + f(\psi(y),y)\psi'(y) - f(\psi(y),y)\psi'(y).$$

$$\text{Д-бо. } \forall y_0 \in [c,d] \quad F(y) = \int_{\psi(y)}^{\psi(y)} f(x,y) dx = \underbrace{\int_{\psi(y)}^{\psi(y_0)} f(x,y) dx}_{F_1(y)} + \underbrace{\int_{\psi(y_0)}^{\psi(y_0)} f(x,y) dx}_{F_2(y)} + \underbrace{\int_{\psi(y_0)}^{\psi(y)} f(x,y) dx}_{F_3(y)} = F_1(y) + F_2(y) + F_3(y)$$

$$\frac{d}{dy} F_2(y) \stackrel{T.3}{=} \int_{\psi(y_0)}^{\psi(y_0)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx. \quad F_3'(y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{F_3(y) - \overbrace{F_3(y_0)}^{=0}}{y - y_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{1}{y - y_0} \int_{\psi(y_0)}^{\psi(y)} f(x,y) dx =$$

$$= (T.0 \text{ определение}) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(\tilde{x},y) \cdot (\psi(y) - \psi(y_0))}{y - y_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} f(\tilde{x},y) \cdot \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{\psi(y) - \psi(y_0)}{y - y_0} = f(\psi(y_0),y_0) \cdot \psi'(y_0)$$

$\tilde{x} \in [\psi(y_0), \psi(y)]$

$$F_1'(y_0) = -f(\psi(y_0),y_0)\psi'(y_0) \quad (\text{одна из симметрий.})$$

Teor. D-зона.