Интегралы, зависящие от параметра

Собственные интегралы

Опр. $\forall (x,y) \in \Pi \equiv \{a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ $\exists f(x,y)$, причём $\forall y \in [c,d]$ $f(x,y)$ интегр. по x на $[a,b]$. Тогда $\forall y \in [c,d]$ существует

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

– интеграл, зависящий от параметра $y \in [c,d]$.

Интегралы, зависящие от параметра

Собственные интегралы

Опр. $\forall (x,y) \in \Pi \equiv \{a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}\ \exists f(x,y)$, причём $\forall y \in [c,d]$ $f(x,y)$ интегр. по x на $[a,b]$. Тогда $\forall y \in [c,d]$ существует

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

– интеграл, зависящий от параметра $y \in [c,d]$.

Т1. $f(x,y)$ непр. в $\Pi \Rightarrow F(y) \in C[c,d]$.

Интегралы, зависящие от параметра

Собственные интегралы

Опр. $\forall (x,y) \in \Pi \equiv \{a \le x \le b,\ c \le y \le d\}\ \exists f(x,y)$, причём $\forall y \in [c,d]$ $f(x,y)$ интегр. по x на $[a,b]$. Тогда $\forall y \in [c,d]$ существует

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

– интеграл, зависящий от параметра $y \in [c,d]$.

T1. $f(x,y)$ непр. в $\Pi \Rightarrow F(y) \in C[c,d]$.

Д-во. $f(x,y)$ равн. непр. в $\Pi \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \Pi$, $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} < \delta \Rightarrow |f(x_2,y_2)-f(x_1,y_1)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. $\forall y_1, y_2 \in [c,d],\ |y_1-y_2|<\delta$

$$|F(y_2)-F(y_1)| = \left|\int_a^b f(x,y_2)\,dx - \int_a^b f(x,y_1)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x,y_2)-f(x,y_1)|\,dx \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$ т.е. $F(y)$ равн. непр. на $[c,d]$, т.е. $F(y) \in C[c,d]$.

Т. д-зана.

Интегралы, зависящие от параметра

Собственные интегралы

Опр. $\forall (x,y) \in \Pi \equiv \{a \le x \le b,\ c \le y \le d\}\ \exists f(x,y)$, причём $\forall y \in [c,d]$ $f(x,y)$ интегр. по x на $[a,b]$. Тогда $\forall y \in [c,d]$ существует

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

– интеграл, зависящий от параметра $y \in [c,d]$.

T1. $f(x,y)$ непр. в $\Pi \Rightarrow F(y) \in C[c,d]$.

Д-во. $f(x,y)$ равн. непр. в $\Pi \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \Pi$, $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} < \delta \Rightarrow |f(x_2,y_2) - f(x_1,y_1)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. $\forall y_1, y_2 \in [c,d]$, $|y_1 - y_2| < \delta$

$$|F(y_2) - F(y_1)| = \left|\int_a^b f(x,y_2)\,dx - \int_a^b f(x,y_1)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x,y_2) - f(x,y_1)|\,dx \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$ т.е. $F(y)$ равн. непр. на $[c,d]$, т.е. $F(y) \in C[c,d]$. т. д-зана.

Сл. $\forall y_0 \in [c,d]$ $\lim\limits_{y \to y_0} \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b f(x,y_0)\,dx$

Интегралы, зависящие от параметра

Собственные интегралы

Опр. $\forall (x,y) \in \Pi \equiv \{a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ $\exists f(x,y)$, причём $\forall y \in [c,d]$ $f(x,y)$ интегр. по x на $[a,b]$. Тогда $\forall y \in [c,d]$ существует

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

– интеграл, зависящий от параметра $y \in [c,d]$.

Т1. $f(x,y)$ непр. в $\Pi \Rightarrow F(y) \in C[c,d]$.

Т2. $f(x,y)$ непр. в $\Pi \Rightarrow F(y)$ интегр. на $[c,d]$, причём

$$\int_c^d F(y)\,dy \equiv \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy$$

Интегралы, зависящие от параметра

Собственные интегралы

Опр. $\forall (x,y) \in \Pi \equiv \{a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ $\exists f(x,y)$, причём $\forall y \in [c,d]$ $f(x,y)$ интегр. по x на $[a,b]$. Тогда $\forall y \in [c,d]$ существует

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

— интеграл, зависящий от параметра $y \in [c,d]$.

T1. $f(x,y)$ непр. в $\Pi \Rightarrow F(y) \in C[c,d]$.

T2. $f(x,y)$ непр. в $\Pi \Rightarrow F(y)$ интегр. на $[c,d]$, причём

$$\int_c^d F(y)\,dy \equiv \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy$$

Д-во. $F(y) \in C[c,d] \Rightarrow F(y)$ интегр. на $[c,d]$; $f(x,y)$ непр. на $\Pi \Rightarrow f(x,y)$ интегр. на Π,

$$\iint_\Pi f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d dy \underbrace{\int_a^b f(x,y)\,dx}_{F(y)}.$$

Теор. Фубини.

Опр. $\forall (x,y)\in \Pi \equiv \{a\leq x\leq b,\ c\leq y\leq d\}\ \exists f(x,y)$, причём $\forall y\in[c,d]$ $f(x,y)$ интегр. по x на $[a,b]$. Тогда $\forall y\in[c,d]$ существует

$$F(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$$

– интеграл, зависящий от параметра $y\in[c,d]$.

Т1. $f(x,y)$ непр. в $\Pi \Rightarrow F(y)\in C[c,d]$.

Т2. $f(x,y)$ непр. в $\Pi \Rightarrow F(y)$ интегр. на $[c,d]$, причём

$$\int_c^d F(y)\,dy \equiv \int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right]dy=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy$$

Д-во. $F(y)\in C[c,d] \Rightarrow F(y)$ интегр. на $[c,d]$; $f(x,y)$ непр. на $\Pi \Rightarrow f(x,y)$ интегр. на Π,

$$\iint_\Pi f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy=\int_c^d dy\underbrace{\int_a^b f(x,y)\,dx}_{F(y)}.$$

Теор. Д-зана.

Поэтому $\forall y\in[c,d] \Rightarrow \int_c^y F(t)\,dt \equiv \int_c^y\left[\int_a^b f(x,t)\,dx\right]dt=\int_a^b dx\int_c^y f(x,t)\,dt$

Опр. $\forall (x,y)\in \Pi \equiv \{a\leq x\leq b,\ c\leq y\leq d\}\ \exists f(x,y)$, причём $\forall y\in[c,d]$ $f(x,y)$ интегр. по x на $[a,b]$. Тогда $\forall y\in[c,d]$ существует

$$F(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$$

– интеграл, зависящий от параметра $y\in[c,d]$.

T1. $f(x,y)$ непр. в $\Pi \Rightarrow F(y)\in C[c,d]$.

T2. $f(x,y)$ непр. в $\Pi \Rightarrow F(y)$ интегр. на $[c,d]$, причём

$$\int_c^d F(y)\,dy \equiv \int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right]dy = \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy$$

Поэтому $\forall y\in[c,d] \Rightarrow \int_c^y F(t)\,dt \equiv \int_c^y\left[\int_a^b f(x,t)\,dx\right]dt = \int_a^b dx\int_c^y f(x,t)\,dt$

T3. $f(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ непр. в Π. $\Rightarrow \forall y\in[c,d]$

$$\exists F'(y)\equiv \frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx$$

Поэтому $\forall y \in [c,d] \Rightarrow \int\limits_c^y F'(t)dt \equiv \int\limits_c^y [\int\limits_a^b f(x,t)dx]dt = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^y f(x,t)dt$

<u>Т3</u> $f(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ непр. в П. $\Rightarrow \forall y \in [c,d]$

$$\exists F'(y) \equiv \frac{d}{dy}\int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx$$

Д-во. $\varphi(y) = \int\limits_a^b \frac{\partial f(xy)}{\partial y}dx$, $\varphi(y) \in C[c,d]$, интегр. на $[c,d]$, $\Rightarrow \forall y \in [c,d]$

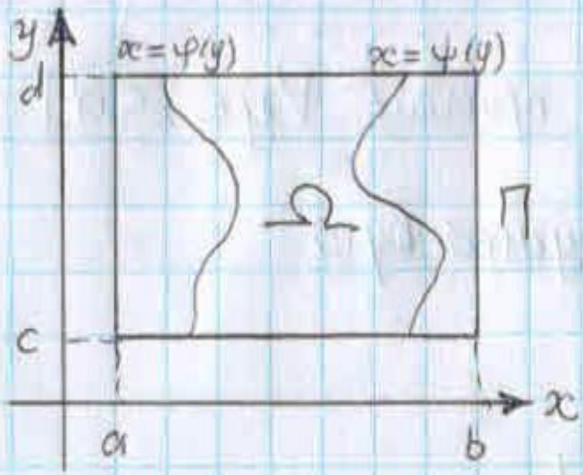
$$\int\limits_c^y \varphi(t)dt = \int\limits_c^y [\int\limits_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx]dt = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^y \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dt = \int\limits_a^b [f(x,y) - f(x,c)]dx = F(y) - F(c)$$

$$F(y) = F(c) + \int\limits_c^y \varphi(t)dt \Rightarrow \forall y \in [c,d] \; \exists F'(y) = \varphi(y) = \int\limits_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx.$$

Теор. доказана.

Пусть $\varphi(y), \psi(y)$: $a \leq \varphi(y) \leq \psi(y) \leq b \quad \forall y \in [c, d]$.

$$\Omega \equiv \{(x, y) : \varphi(y) \leq x \leq \psi(y),\ y \in [c, d]\}$$



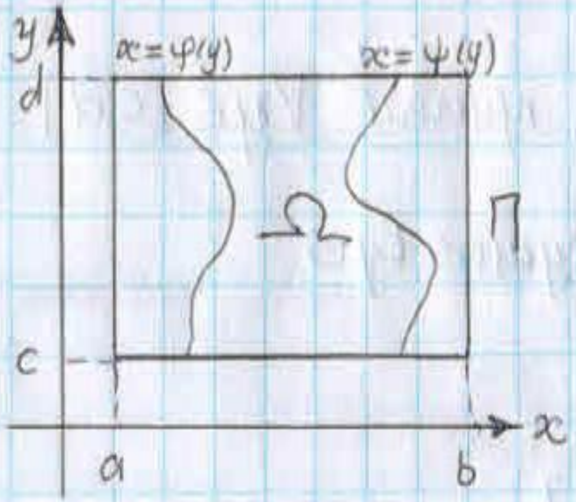
Рассмотрим интегралы вида

$$F(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx, \quad y \in [c,d]$$

если $\forall y \in [c,d]$ $f(x,y)$ интегр. на $[\varphi(y), \psi(y)]$

Пусть $\varphi(y), \psi(y)$: $a \leq \varphi(y) \leq \psi(y) \leq b \quad \forall y \in [c, d]$.

$$\underline{\Omega} \equiv \{(x, y) : \varphi(y) \leq x \leq \psi(y),\ y \in [c, d]\}$$



Рассмотрим интегралы вида

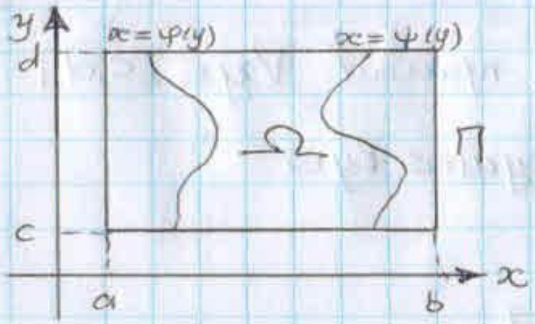
$$F(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\,dx, \quad y \in [c, d]$$

если $\forall y \in [c, d]$ $f(x, y)$ интегр. на $[\varphi(y), \psi(y)]$

$\underline{\text{Т4}}$. $f(x, y)$ непр. в $\Pi \supset \Omega$, $\varphi(y), \psi(y) \in C[c, d] \Rightarrow F(y) \in C[c, d]$

Пусть $\varphi(y), \psi(y)$: $a \le \varphi(y) \le \psi(y) \le b \quad \forall y \in [c,d]$.

$$\Omega \equiv \{(x,y) : \varphi(y) \le x \le \psi(y),\ y \in [c,d]\}$$



Рассмотрим интегралы вида

$$F(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx, \quad y \in [c,d]$$

если $\forall y \in [c,d]$ $f(x,y)$ интегр. на $[\varphi(y), \psi(y)]$

<u>Т4</u>. $f(x,y)$ непр. в $\Pi \supset \Omega$, $\varphi(y), \psi(y) \in C[c,d] \Rightarrow F(y) \in C[c,d]$

Д-во. $\exists M > 0 : |f(x,y)| \le M \ \forall (x,y) \in \Pi$. $f(x,y)$ равн. непр. на $\Pi \Rightarrow$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 > 0 : \forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \Pi$, $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} < \delta_1 \Rightarrow |f(x_2,y_2) - f(x_1,y_1)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$
$\varphi(y), \psi(y)$ равн. непр. на $[c,d] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_2 > 0 : \forall y_1, y_2 \in [c,d] \Rightarrow |\varphi(y_2) - \varphi(y_1)| < \frac{\varepsilon}{4M}$,
$|\psi(y_2) - \psi(y_1)| < \frac{\varepsilon}{4M}$. $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0 : \forall y_1, y_2 \in [c,d]$, $|y_1 - y_2| < \delta$

$$|F(y_2) - F(y_1)| = \left| \int_{\varphi(y_2)}^{\psi(y_2)} f(x,y_2)\,dx - \int_{\varphi(y_1)}^{\psi(y_1)} f(x,y_1)\,dx \right| = \left| \int_{\varphi(y_2)}^{\varphi(y_1)} f(x,y_2)\,dx + \int_{\varphi(y_1)}^{\psi(y_1)} f(x,y_2)\,dx + \int_{\psi(y_1)}^{\psi(y_2)} f(x,y_2)\,dx - \right.$$

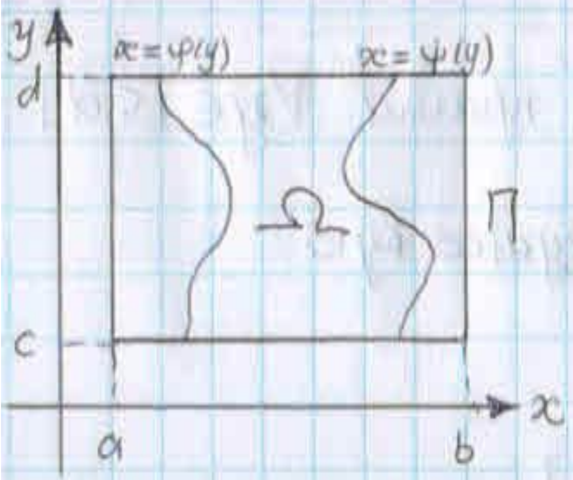
$$\left. - \int_{\varphi(y_1)}^{\psi(y_1)} f(x,y_1)\,dx \right| \le \left| \int_{\varphi(y_2)}^{\varphi(y_1)} |f(x,y_2)|\,dx \right| + \int_{\varphi(y_1)}^{\psi(y_1)} |f(x,y_2) - f(x,y_1)|\,dx + \left| \int_{\psi(y_1)}^{\psi(y_2)} |f(x,y_2)|\,dx \right| \le$$

$$\le M\,|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)| + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot \underbrace{(\psi(y_1) - \varphi(y_1))}_{\le (b-a)} + M\,|\psi(y_2) - \psi(y_1)| < M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2} + M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon.$$

Теор. доказано

Пусть $\varphi(y), \psi(y)$: $a \leq \varphi(y) \leq \psi(y) \leq b \quad \forall y \in [c,d]$.

$$\underline{\Omega} \equiv \{(x,y) : \varphi(y) \leq x \leq \psi(y),\ y \in [c,d]\}$$



Рассмотрим интегралы вида

$$F(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx, \quad y \in [c,d]$$

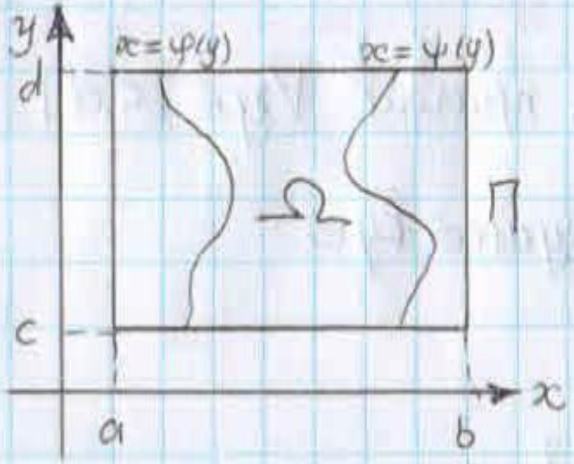
если $\forall y \in [c,d]$ $f(x,y)$ интегр. на $[\varphi(y), \psi(y)]$

<u>Т4</u>. $f(x,y)$ непр. в $\Pi \supset \Omega$, $\varphi(y), \psi(y) \in C[c,d] \Rightarrow F(y) \in C[c,d]$

<u>Сл</u>. $\forall y_0 \in [c,d]$ $\lim\limits_{y \to y_0} \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx = \int\limits_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} f(x,y_0)\,dx$

Пусть $\varphi(y), \psi(y)$: $a \le \varphi(y) \le \psi(y) \le b \quad \forall y \in [c,d]$.

$$\underline{\Omega} \equiv \{(x,y): \varphi(y) \le x \le \psi(y),\ y \in [c,d]\}$$



Рассмотрим интегралы вида

$$F(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx, \quad y \in [c,d]$$

если $\forall y \in [c,d]$ $f(x,y)$ интегр. на $[\varphi(y), \psi(y)]$

<u>T4</u>. $f(x,y)$ непр. в $П \supset \Omega$, $\varphi(y), \psi(y) \in C[c,d] \Rightarrow F(y) \in C[c,d]$

<u>T5</u> $f(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}$ непрер. в $П \supset \Omega$; $\varphi'(y), \psi'(y) \in C[c,d] \Rightarrow \forall y \in [c,d]$

$$\exists F'(y) \equiv \frac{d}{dy}\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx + f(\psi(y),y)\,\psi'(y) - f(\varphi(y),y)\,\varphi'(y).$$

T5 $f(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}$ непрер. в $П \supset \Omega$; $\varphi'(y), \psi'(y) \in C[c,d] \Rightarrow \forall y \in [c,d]$

$$\exists F'(y) \equiv \frac{d}{dy}\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx + f(\psi(y),y)\psi'(y) - f(\varphi(y),y)\varphi'(y).$$

Д-во. $\forall y_0 \in [c,d]$ $$F(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx = \underbrace{\int\limits_{\varphi(y)}^{\varphi(y_0)} f(x,y)\,dx}_{F_1(y)} + \underbrace{\int\limits_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} f(x,y)\,dx}_{F_2(y)} + \underbrace{\int\limits_{\psi(y_0)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx}_{F_3(y)} = F_1(y) + F_2(y) + F_3(y)$$

$$\frac{d}{dy}F_2(y) \overset{T.3}{=} \int\limits_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx. \quad F_3'(y_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{F_3(y) - \overbrace{F_3(y_0)}^{=0}}{y-y_0} = \lim_{y\to y_0} \frac{1}{y-y_0}\int\limits_{\psi(y_0)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx =$$

$$= (\text{т. о среднем}) = \lim_{\substack{y\to y_0 \\ \tilde{x}\in[\psi(y_0),\psi(y)]}} \frac{f(\tilde{x},y)\cdot(\psi(y)-\psi(y_0))}{y-y_0} = \lim_{y\to y_0} f(\tilde{x},y)\cdot \lim_{y\to y_0}\frac{\psi(y)-\psi(y_0)}{y-y_0} = f(\psi(y_0),y_0)\cdot\psi'(y_0)$$

$F_1'(y_0) = -f(\varphi(y_0),y_0)\varphi'(y_0)$ (сделать самостоят.)

Теор. д-зана.