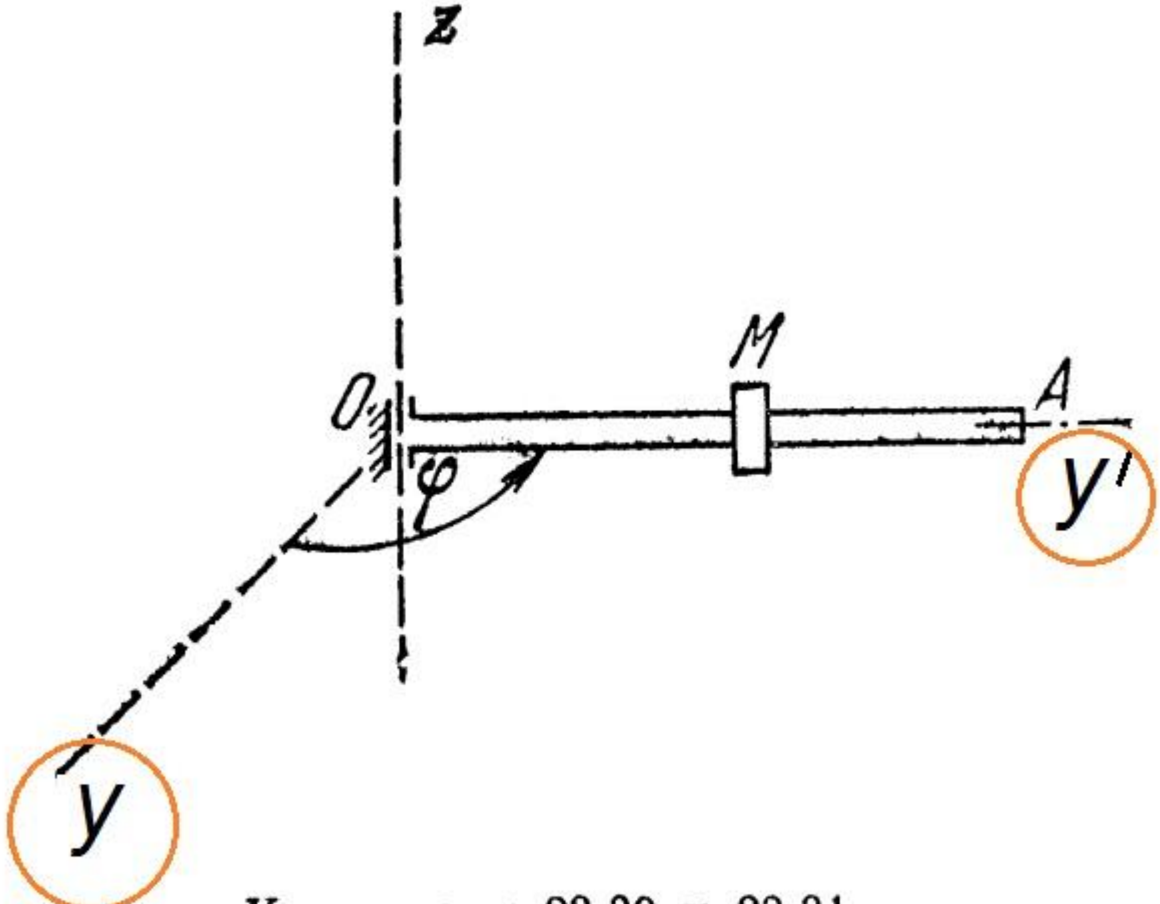
Теоретическая механика

Задачи

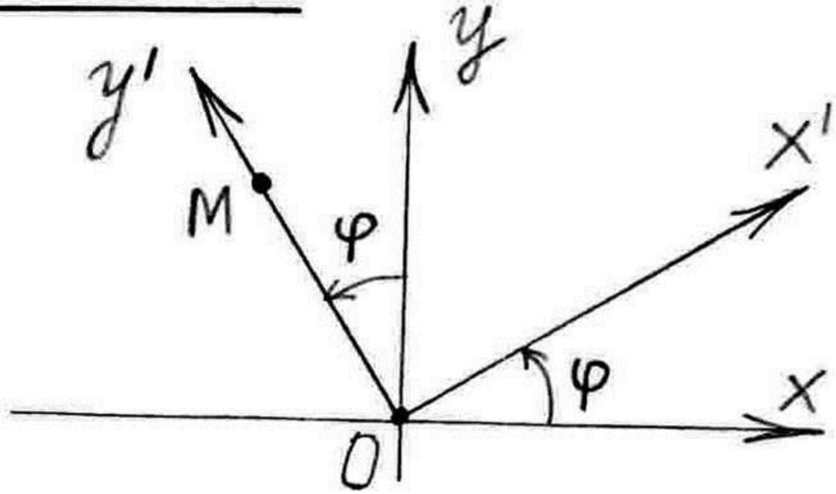
Сложение ускорений

Дом. задание :
23.30, 23.31, 23.36, 23.11



К задачам 23.30 и 23.31

№ 23.30.



Дано:

$\varepsilon = \ddot{\varphi}(t) \equiv -10$ рад/с²;

$y'(t_1) = |OM| = 0{,}6$ м;

$\dot{y}'(t_1) = |v_{отн}(t_1)| = 1{,}2$ м/с;

$\ddot{y}'(t_1) = |W_{отн}(t_1)| = 0{,}9$ м/с²;

$\omega(t_1) = \dot{\varphi}(t_1) = 5$ рад/с.

Найти: $w_{абс}(t_1)$

$Oz = Oz'$; в нач. момент системы совпадают.

1) $r' = r'_{OM} = \begin{pmatrix} 0 \\ y'(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ – закон движения т. M в подвижной системе $Ox'y'z$.

$Oz = Oz'$; в нач. момент системы совпадают.

1) $r' = r'_{OM} = \begin{pmatrix} 0 \\ y'(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ — закон движения т. M в подвижной системе $Ox'y'z$.

2) $B(t) = \begin{pmatrix} \cos\varphi(t) & -\sin\varphi(t) & 0 \\ \sin\varphi(t) & \cos\varphi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ — матрица перехода от $Ox'y'z'$ к $Oxyz$.

3) $r(t) = r_{OM}(t) = B(t)\, r'(t) = y'(t) \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}}_{= e_\varphi}$;

$\underline{r(t) = y'(t) \cdot e_\varphi(t)}$ — закон движения т. M в $Oxyz$

4) $\dot{r}(t) = \dot{y}'(t)\cdot e_\varphi + y'(t)\cdot\dot{\varphi}(t)(-e_\rho(t))$;

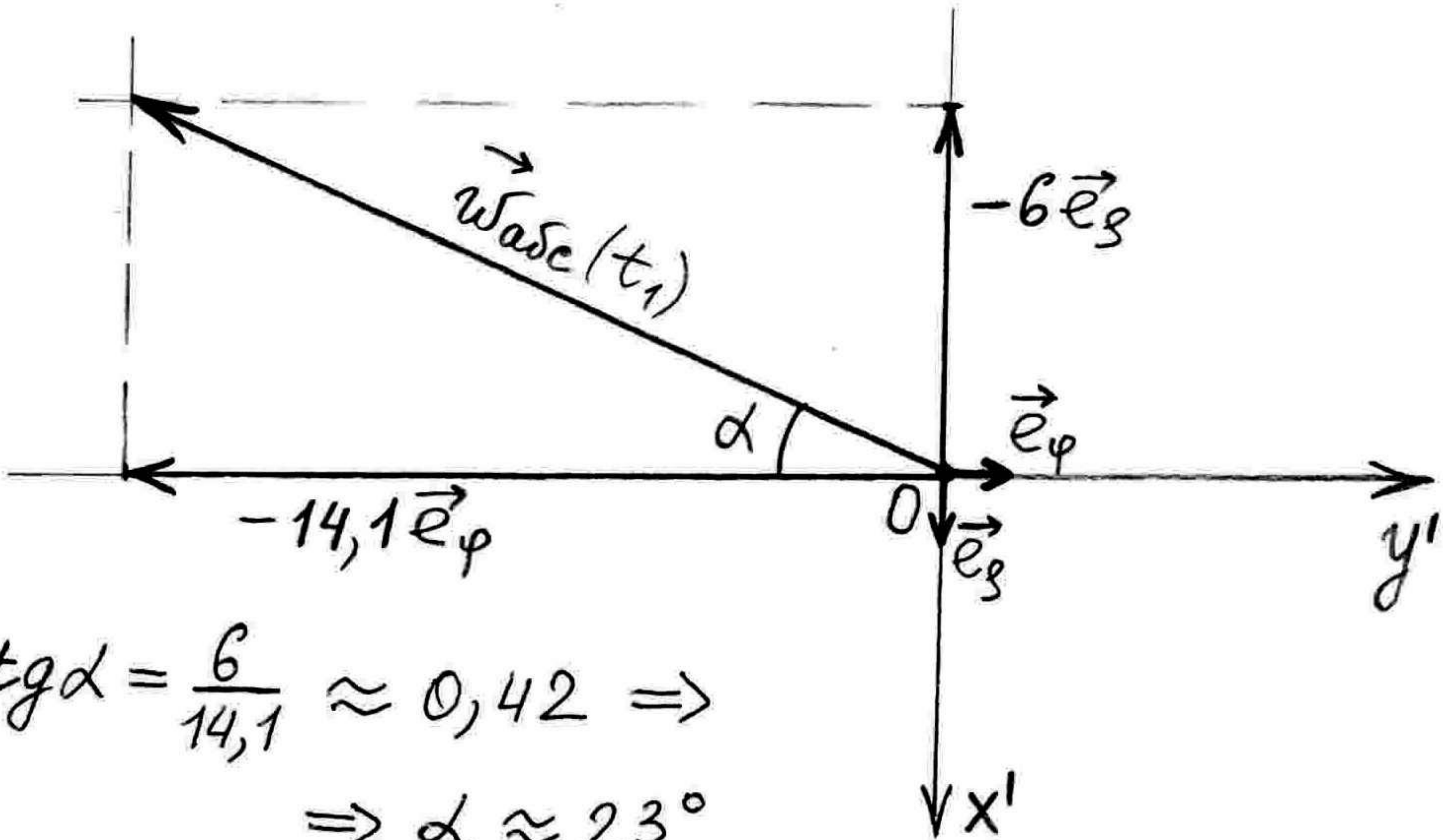
$$\ddot{r} = \ddot{y}'\cdot e_\varphi + \dot{y}'\cdot\dot{\varphi}(-e_\rho) + \dot{y}'\dot{\varphi}(-e_\rho) +$$
$$+ y'\cdot\ddot{\varphi}(-e_\rho) + y'\cdot\dot{\varphi}^2(-e_\varphi) =$$
$$= (\ddot{y} - y'\cdot\dot{\varphi}^2)e_\varphi - (2\dot{y}'\dot{\varphi} + y'\ddot{\varphi})e_\rho$$

(т.к. $\dot{e}_\rho = \dot{\varphi}e_\varphi$, $\dot{e}_\varphi = -\dot{\varphi}e_\rho$).

5) $w_{абс}(t_1) = (\ddot{y}'(t_1) - y'(t_1)\cdot\dot{\varphi}^2(t_1))e_\varphi -$
$$-(2\dot{y}'(t_1)\dot{\varphi}(t_1) + y'(t_1)\ddot{\varphi}(t_1))e_\rho =$$
$$= (0{,}9 - 0{,}6\cdot 5^2)e_\varphi - (2\cdot 1{,}2\cdot 5 - 0{,}6\cdot 10)e_\rho =$$
$$= -14{,}1\cdot e_\varphi - 6\cdot e_\rho.$$

$$= -14{,}1 \cdot e_\varphi - 6 \cdot e_\xi .$$

$$\underline{|w_{\text{абс}}(t_1)| \approx 15{,}32 \left(\text{м}/\text{с}^2\right)}$$



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{6}{14{,}1} \approx 0{,}42 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\alpha \approx 23^\circ}$$

N23.31. Рисунок — как в N23.30.

Дано: $y'(t) = |OM| = 0{,}5\,t^2$ см; $\varphi(t) = t^2 + t$.

Найти: $v_{рад}, v_{тр}, w_{рад}, w_{тр}$ при $t = 2$ с.

1) $Ox'y'z'$: $\quad r'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ y'(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}5t^2 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) $Oxyz$: $\quad r(t) = B(t)\,r'(t) = 0{,}5t^2 \cdot e_\varphi$

3) $\dot r(t) = t \cdot e_\varphi - t^2(t+0{,}5)\,e_\rho$;

$$\underset{(\text{как в } N23.30)}{\underline{\ddot r(t) = (\ddot y - y'\cdot\dot\varphi^2)\,e_\varphi - (2\dot y'\dot\varphi + y'\ddot\varphi)\,e_\rho =}}$$

3) $\dot{r}(t) = t \cdot e_\varphi - t^2(t+0{,}5)\,e_\rho\,;$

$$\underbrace{\ddot{r}(t) = (\ddot{y} - y' \cdot \dot{\varphi}^2)\,e_\varphi - (2\dot{y}'\dot{\varphi} + y'\ddot{\varphi})\,e_\rho}_{\text{(как в N 23.30)}} =$$

$$= \left(1 - 0{,}5t^2(2t+1)^2\right)e_\varphi - (5t^2+2t)\,e_\rho\,.$$

4) $v_{абс}(2) = \dot{r}(2) = 2 \cdot e_\varphi - 10 \cdot e_\rho\,;$

$$w_{абс}(2) = \ddot{r}(2) = -49 \cdot e_\varphi - 24 \cdot e_\rho\,.$$

Радиальная скорость — проекция скорости т. М на направление $\overrightarrow{OM}$ (т.е. на $\vec{e}_\varphi$):

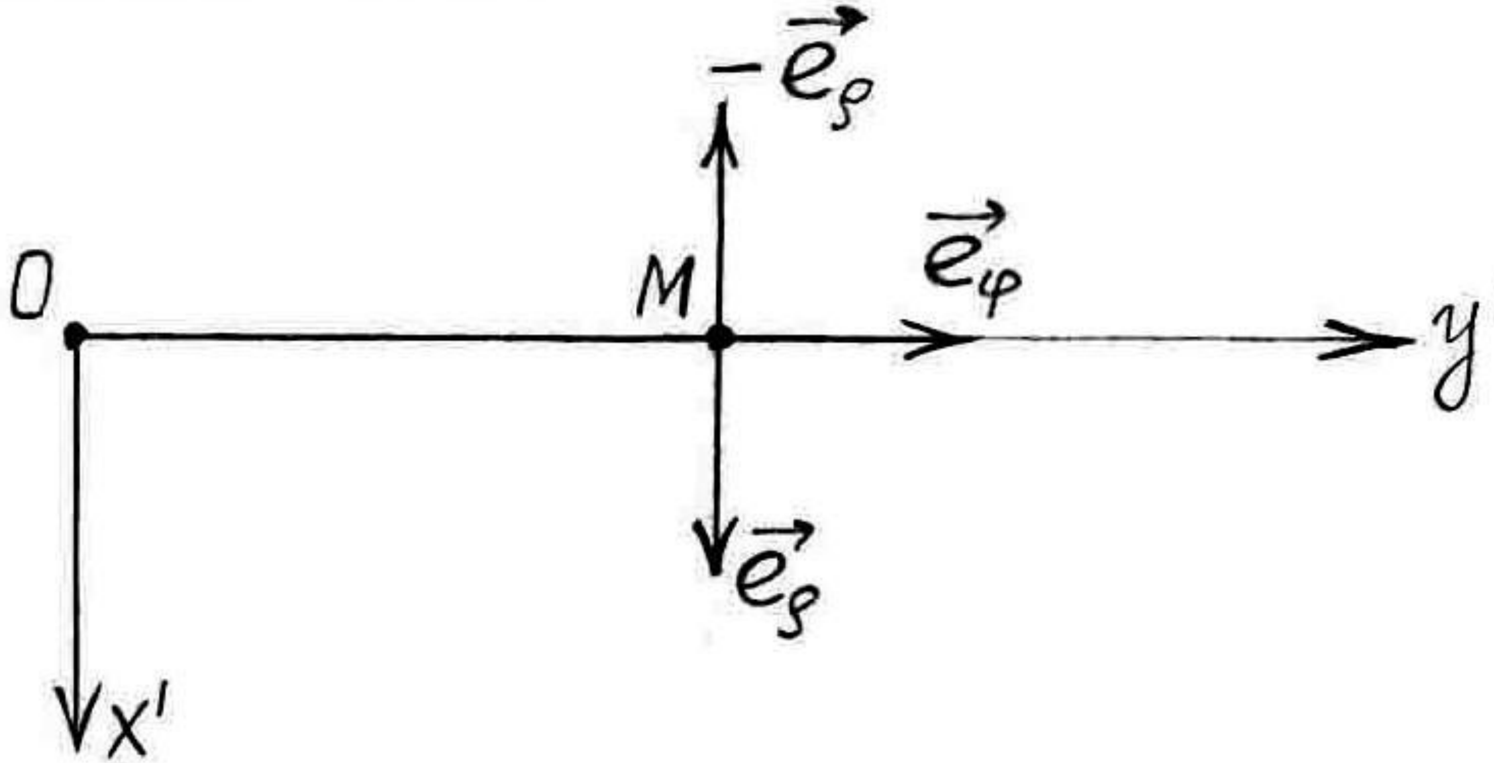
$$v_{рад} = v_\varphi = \langle \vec{v}, \vec{e}_\varphi \rangle = 0{,}02 \, (м/с)$$

Трансверсальная скорость — проекция скорости на направление, ортогон-е $\overrightarrow{OM}$ (полученное из $\overrightarrow{OM}$ поворотом на $90°$ против час. стрелки), т.е. на $-\vec{e}_\xi$:

$$v_{тр} = -v_\xi = -\langle \vec{v}, \vec{e}_\xi \rangle = 0{,}1 \, (м/с)$$

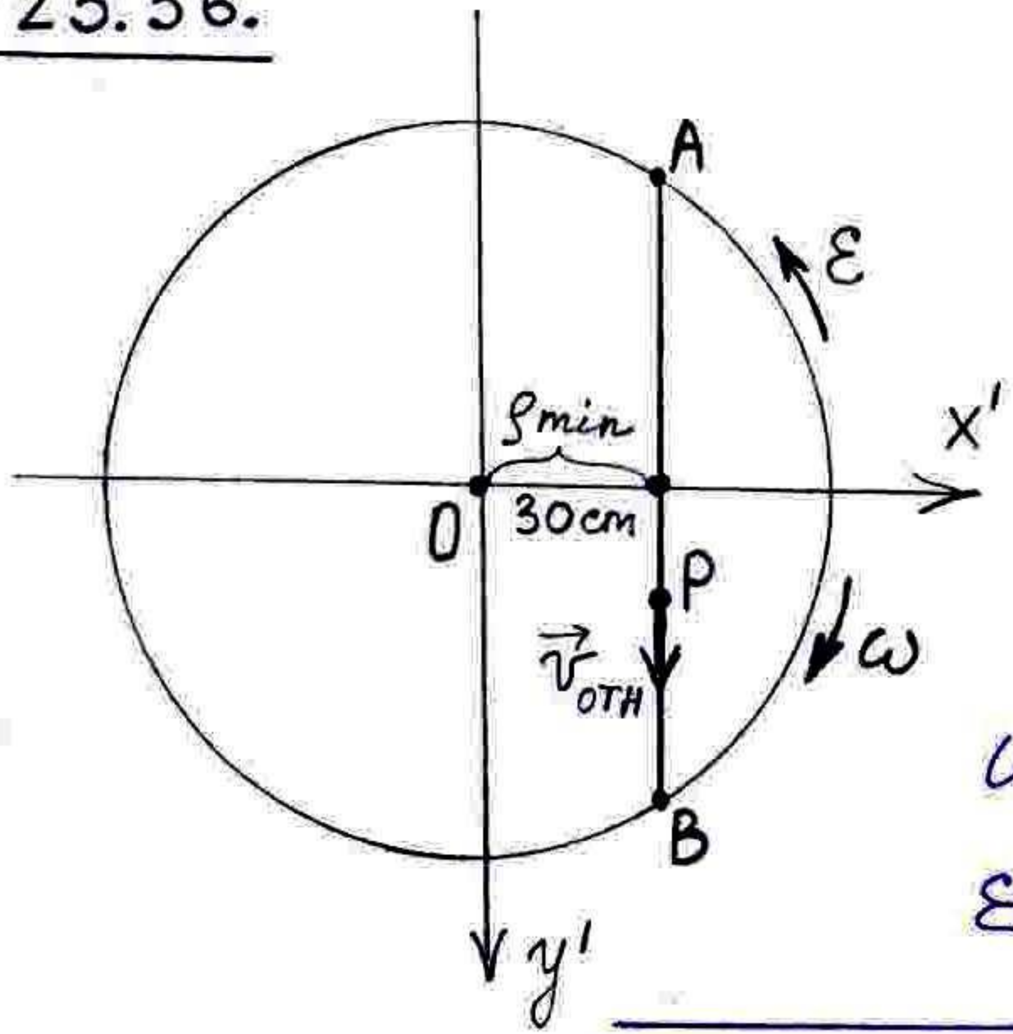
Рад-е ускорение: $w_{рад} = w_\varphi = -0{,}49 \, (м/с^2)$

Транс-е ускорение: $w_{тр} = -w_\xi = 0{,}24 \, (м/с^2)$



$-\vec{e}_\rho$
$\vec{e}_\varphi$
O
M
y'
$\vec{e}_\rho$
x'

N 23.36.



Дано:

$|v_{отн}| = 1{,}2\ м/с;$

$\rho = |OP|;$

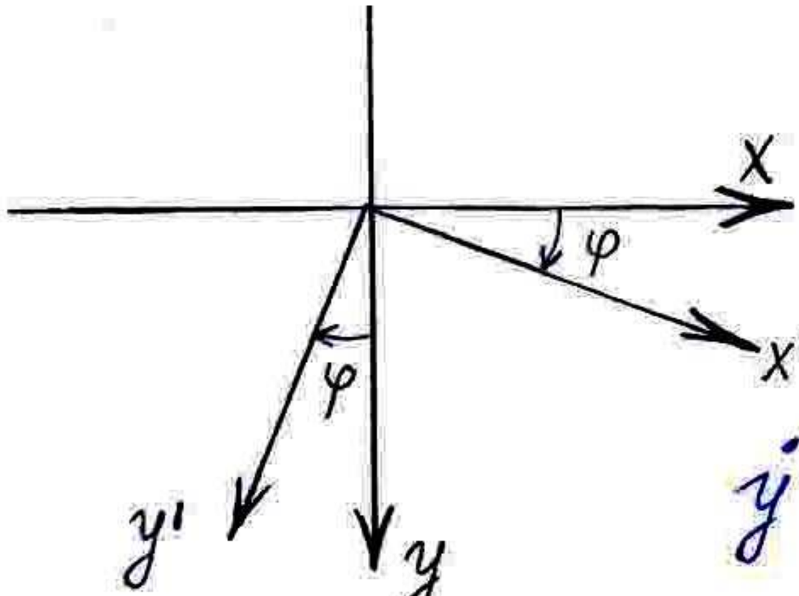
$\rho(t_1) = \rho_{min};$

$\rho_{min} = 30\ см;$

$\omega(t_1) = \dot\varphi(t_1) = 3\ р/с;$

$\varepsilon(t_1) = \ddot\varphi(t_1) = -8\ р/с^2.$

Найти: $w_{абс}(t_1)$



Oz направ. "от зрителя".

1) $r'(t) = \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 1{,}2t + c \\ 0 \end{pmatrix}$

$\dot{y}' = |v_{\text{отн}}| = 1{,}2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{y'(t) = 1{,}2t + c}.$

2) $r = Br' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 1{,}2t + c \\ 0 \end{pmatrix} =$

$= 0{,}3 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}}_{= e_\rho} + (1{,}2t + c) \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}}_{= e_\varphi}.$

3) $\dot{r}(t) = 0{,}3\,\dot{\varphi}\,e_\varphi + 1{,}2\,e_\varphi + (1{,}2t + c)\,\dot{\varphi}\,(-e_\rho)$

$$\ddot{r}(t) = 0{,}3\,\ddot{\varphi}\,e_\varphi + 0{,}3\,\dot{\varphi}^2(-e_\rho) + 1{,}2\,\dot{\varphi}(-e_\rho) +$$
$$+ 1{,}2\,\dot{\varphi}(-e_\rho) + (1{,}2t + c)\,\ddot{\varphi}\,(-e_\rho) +$$
$$+ (1{,}2t + c)\,\dot{\varphi}^2(-e_\varphi);$$

$\dot{\varphi}(t_1) = 3$ р/с; $\ddot{\varphi}(t_1) = -8$ р/с;

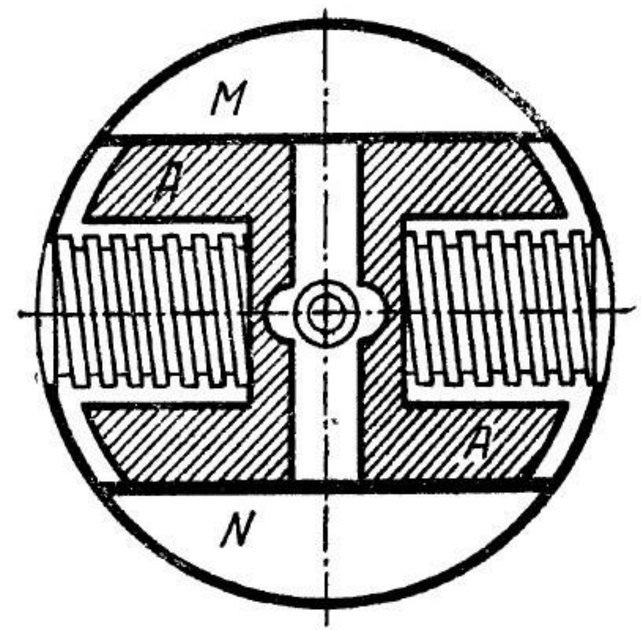
$y'(t_1) = 1{,}2\,t_1 + c = 0.$

$w_{абс}(t_1) = \ddot{r}(t_1) = -2{,}4\,e_\varphi - 9{,}9\,e_\rho.$

$|w_{абс}| \approx 10{,}1867.$

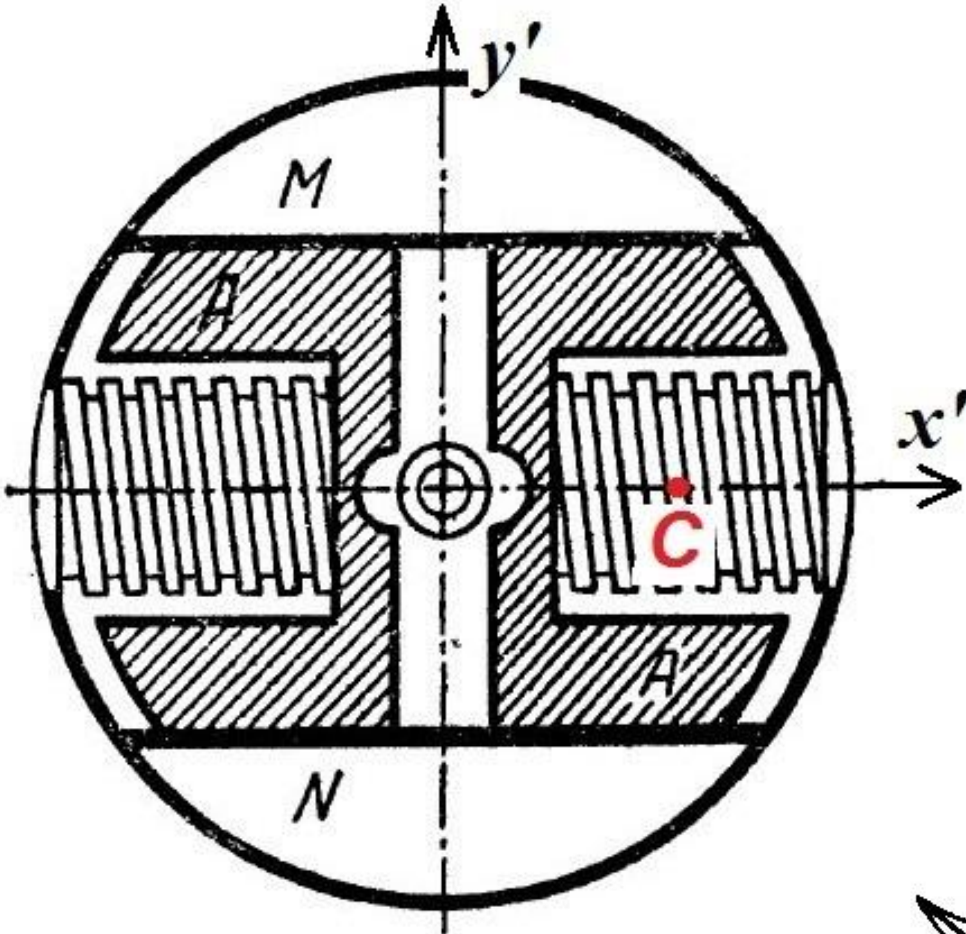
23.11(23.11). В регуляторе, вращающемся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью $\omega = 6\pi$ рад/с, тяжелые гири A, прикрепленные к концам пружины, совершают гармонические колебания вдоль паза MN таким образом, что расстояние их центров тяжести от оси вращения изменяются по закону $x = (0{,}1 + 0{,}05 \sin 8\pi t)$ м. Определить ускорение центра тяжести гири в момент, когда кориолисово ускорение достигает максимального значения, и указать значение кориолисова ускорения при крайних положениях гири.

Ответ: $w_a = 6\pi^2$ м/с^2, $w_c = 0$.

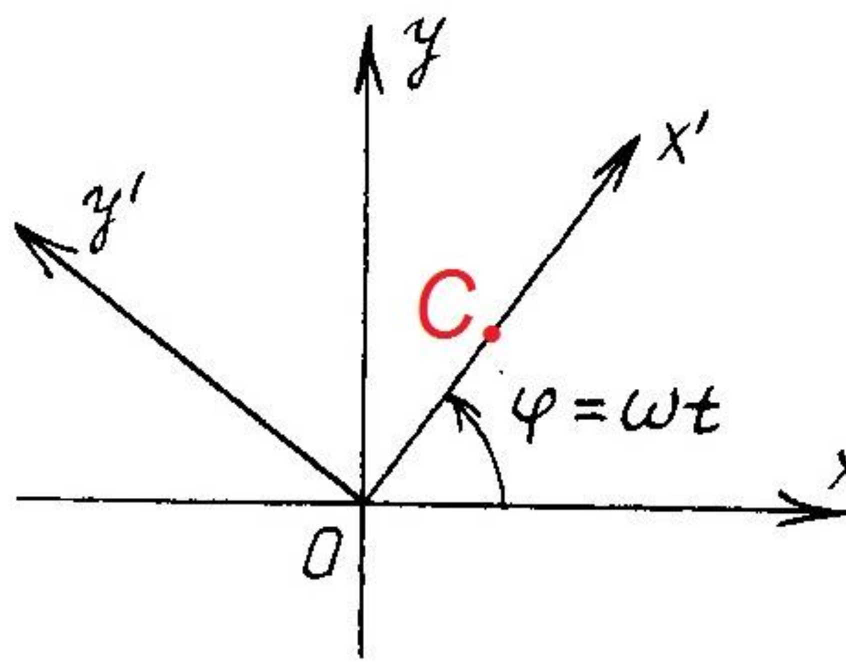


К задаче 23.11

23.12(23.12). Струя воды течет по го-



$$x' = 0{,}1 + 0{,}05\sin 8\pi t$$



№ 23.11. Система S' (связанная с регулятором) вращается относительно системы S, причем $O = O'$ и $Oz = Oz'$ – ось вращения системы S'. В начальный момент системы совпадают.

Уравнение $x' = 0{,}1 + 0{,}05\sin 8\pi t$ – закон движения точки C (центра масс правой гири) по оси Ox';

$\omega = 6\pi$ (рад/с) – угловая скорость вращения системы S'.

Найти : 1) $w_{кор}$ – кориолисово ускорение точки C,

2) момент t_1, в который $|w_{кор}|$ достигает максимума,

3) $w_{абс}(t_1)$ – абсолютное ускорение точки C в момент t_1,

4) значения $|w_{кор}|$ при крайних положениях гири.

Решение.

Матрица перехода от S к S' имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вектор r'_{OC} – координатный вектор точки C в S',

$$r'_{OC} = \begin{pmatrix} x' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1 + 0{,}05\sin 8\pi t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1) Найдем $w_{кор}$ – кориолисово ускорение точки C:

$$w_{кор} = 2\dot{D}\dot{r}'_{OC} = 2\omega \begin{pmatrix} -\sin\omega t & -\cos\omega t & 0 \\ \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\omega\dot{x}' \begin{pmatrix} -\sin\omega t \\ \cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix} =$$

1) Найдем $w_{кор}$ – кориолисово ускорение точки C:

$$w_{кор} = 2\dot{D}\dot{r}'_{OC} = 2\omega\begin{pmatrix} -\sin\omega t & -\cos\omega t & 0 \\ \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x}' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\omega\dot{x}'\begin{pmatrix} -\sin\omega t \\ \cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 12\pi\cdot 0{,}05\cdot 8\pi\cos 8\pi t\begin{pmatrix} -\sin 6\pi t \\ \cos 6\pi t \\ 0 \end{pmatrix} = 4{,}8\pi^2\cos 8\pi t\begin{pmatrix} -\sin 6\pi t \\ \cos 6\pi t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $|w_{кор}| = 4{,}8\pi^2 |\cos 8\pi t|$.

2) Найдем момент t_1, в который $|w_{кор}|$ достигает максимума:

$$|w_{кор}(t_1)| = \max|w_{кор}(t)| = 4{,}8\pi^2\cdot\max|\cos 8\pi t|.$$

Очевидно, что максимум достигается, когда $|\cos 8\pi t| = 1$. Поэтому в качестве t_1 можно взять начальный момент времени:

$$t_1 = 0.$$

3) Найдем $w_{абс}(t_1)$ – абсолютное ускорение точки C в момент $t_1 = 0$. Для этого воспользуемся теоремой о сложении скоростей и ускорений: $w_{абс} = w_{пер} + w_{отн} + w_{кор}$.

$$w_{пер} = \ddot{D}r'_{OC} = \omega^2 \begin{pmatrix} -\cos\omega t & \sin\omega t & 0 \\ -\sin\omega t & -\cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \omega^2 x' \begin{pmatrix} -\cos\omega t \\ -\sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$w_{пер}(0) = -3{,}6\pi^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$w_{пер}(0) = -3,6\pi^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$w_{отн} = D\ddot{r}'_{OC} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -3,2\pi^2 \sin 8\pi t \begin{pmatrix} \cos 6\pi t \\ \sin 6\pi t \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$w_{отн}(0) = 0; \qquad w_{кор}(0) = 4,8\pi^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, $w_{абс}(0) = w_{пер}(0) + w_{отн}(0) + w_{кор}(0) =$

$$= \begin{pmatrix} -3,6\pi^2 \\ 4,8\pi^2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1,2\pi^2 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$ и $|\, w_{абс}(0) \,| = 6\pi^2$ (м/с^2).

4) Найдем значения $|w_{кор}|$ при крайних положениях гири. Крайним положениям правой гири соответствуют максимальное и минимальное значения функции $x' = 0{,}1 + 0{,}05\sin 8\pi t$, которые достигаются в моменты времени $t_{\max}(n) = \dfrac{1}{16} + \dfrac{n}{4}$ (секунд) и $t_{\min}(n) = \dfrac{3}{16} + \dfrac{n}{4}$ (секунд) соответственно. В каждом из этих случаев $w_{кор} = 0$.

Подготовка к Контрольной работе

1. Точка движется по радиусу диска от центра к фиксированной точке на границе со скоростью v_0. Найти ее кориолисово и абсолютное ускорения, если диск вращается с постоянной угловой скоростью ω.

2. Задача N 12.2 из задачника Мещерского.

3. Искусственный спутник обращается вокруг Земли на высоте 500 *км* по круговой орбите. Определить время обращения и скорость спутника, если известно, что его центростремительное ускорение должно быть равно ускорению свободно падающего тела.

На данной высоте $g = 8,5$ *м*/*с*^{2}, а радиус Земли $R \approx 6370$ *км*.

4. Точка движется по окружности радиусом R равноускоренно из состояния покоя и совершает первый полный оборот за T *сек*. Определить величины скорости и ускорения точки в конце этого промежутка времени.