Математика
Лекция 2
Ранг матрицы. Системы линейных уравнений

- Ранг матрицы
- Системы линейных уравнений
- Матричный метод решения
- Формулы Крамера
- Метод Гаусса
- Системы линейных однородных уравнений, фундаментальная система решений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Ранг матрицы.

Рассмотрим матрицу A размера $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Выделим в ней k строк и k столбцов,

$$k \le \min(m, n).$$

Элементы, стоящие на пересечении выбранных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу порядка k, определитель которой называется **минором *k*-го порядка** матрицы A.

<u>Определение.</u> В матрице порядка m×n минор порядка r называется **базисным**, если он не равен нулю, а все миноры порядка $r+1$ и выше равны нулю, или не существуют вовсе, т.е. r совпадает с меньшим из чисел m или n.

Столбцы и строки матрицы, на которых стоит базисный минор, также называются **базисными.**

В матрице может быть несколько различных базисных миноров, имеющих одинаковый порядок.

<u>Определение.</u> Порядок базисного минора матрицы называется **рангом** матрицы и обозначается Rg A.

Пример Найти ранг матрицы: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

○ Решение: Все миноры 3-го порядка равны нулю. Есть минор 2-го порядка, отличный от нуля $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$. Значит, $r(A) = 2$. Базисный минор стоит на пересечении 2 и 3 строки с 1 и 3 столбцами.

●

Методы вычисления ранга матрицы

1. Метод окаймляющих миноров

Пусть в матрице найден минор k-го порядка M, отличный от нуля. Рассмотрим лишь те миноры $(k+1)$-го порядка, которые содержат в себе (окаймляют) минор M: если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k. В противном случае среди окаймляющих миноров найдется ненулевой минор $(k+1)$-го порядка, и вся процедура повторяется.

Пример. Найти ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Так как все элементы матрицы равны 0, тогда окаймляющие миноры 1-го порядка равны нулю, значит, $r(A) = 0$.

Пример. Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Фиксируем минор 2-го порядка, отличный от нуля:

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0.$$

Найдем все миноры 3-го порядка, окаймляющие M_2:

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как все окаймляющие миноры 3-го порядка равны нулю, то ранг матрицы равен 2, то есть $r(A) = 2$.

<u>Определение.</u> **Элементарными преобразованиями** матрицы назовем следующие преобразования:

1) умножение строки на число, отличное от нуля;
2) прибавление к элемнтам одной строки элементов другой строки;
3) перестановка строк;
4) вычеркивание (удаление) одной из одинаковых строк (столбцов);
5) транспонирование

Те же операции, применяемые для столбцов, также называются элементарными преобразованиями.

С помощью элементарных преобразований можно к какой-либо строке или столбцу прибавить линейную комбинацию остальных строк (столбцов).

<u>Определение.</u> Матрицы, полученные в результате элементарного преобразования, называются **эквивалентными.**

Надо отметить, что **равные** матрицы и **эвивалентные** матрицы - понятия совершенно различные.

2. Метод элементарных преобразований

С помощью элементарных преобразований матрицу можно привести к такому виду, когда все ее элементы, кроме

$$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{rr} \ (r \le \min(m, n)),$$

равны нулю. Следовательно, ранг матрицы равен r.

Пример. Найти ранг матрицы A методом элементарных преобразований, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Произведем элементарные преобразования.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&3&4\\3&4&2&6&8\\1&2&1&3&4\end{pmatrix}\begin{matrix}(-1)\\ \\ \end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&3&4\\3&4&2&6&8\\\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&3&4\\3&4&2&6&8\end{pmatrix}\begin{matrix}(-3)\\ \end{matrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&2&1&3&4\\0&-2&-1&-3&-4\end{pmatrix}\begin{matrix}\\(+1)\end{matrix}\sim\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&-2&-1&-3&-4\end{pmatrix}\\ \begin{matrix}\left(-\frac{1}{2}\right)&\left(-\frac{3}{2}\right)&(-2)\end{matrix}\end{array}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&-2&0&0&0\end{pmatrix},$$

значит, ранг матрицы A равен двум, то есть $r(A)=2$.

Пример. Найти ранг матрицы A методом элементарных преобразований, если

$$A=\begin{pmatrix}4 & 8 & 4 & 12 & 4\\ 2 & 4 & 2 & 6 & 2\\ 1 & 2 & 1 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

Решение. Произведем элементарные преобразования.

$$A=\begin{pmatrix}4 & 8 & 4 & 12 & 4\\ 2 & 4 & 2 & 6 & 2\\ 1 & 2 & 1 & 3 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3 & 1\\ 2 & 4 & 2 & 6 & 2\\ 4 & 8 & 4 & 12 & 4\end{pmatrix} \begin{matrix}(-2)\\ (-4)\end{matrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3 & 1\\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0}\\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0}\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3 & 4\end{pmatrix} \qquad \sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

$$(-2) \quad (-1) \quad (-3) \quad (-4)$$

Значит, ранг матрицы A равен единице, то есть $r(A)=1$.

Линейная зависимость (независимость) строк и столбцов матрицы

Понятие ранга матрицы тесно связано с понятием линейной зависимости (независимости) ее строк или столбцов.

Определим понятия зависимости и независимости для строк матрицы. Для столбцов эти понятия определяются аналогично.

Пусть дана матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Обозначим ее строки следующим образом:

$$e_1 = (a_{11}\, a_{12}\ \dots\ a_{1n}), \qquad e_2 = (a_{21}\, a_{22}\dots\ a_{2n}), \qquad \dots, \qquad e_m = (a_{m1}\, a_{m2}\dots\ a_{mn}).$$

Две строки матрицы называются **равными**, если равны их соответствующие элементы: $e_k = e_s$, если $a_{kj} = a_{sj}$, $j = 1, 2, \dots n$.

Арифметические операции над строками матрицы (умножение строки на число, сложение строк) вводятся как операции, проводимые поэлементно:

$$\lambda e_k = (\lambda a_{k1}\, \lambda a_{k2}\ \dots \lambda a_{kn});$$

$$e_k + e_s = \left[(a_{k1} + a_{s1})\ (a_{k2} + a_{s2})\ \dots (a_{kn} + a_{sn})\right].$$

Строка e называется **линейной комбинацией** строк $e_1, e_2, \dots, e_s$ матрицы, если она равна сумме произведений этих строк на произвольные действительные числа:

$$e = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_s e_s,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ — любые числа.

Строки матрицы $e_1, e_2, \ldots, e_m$ называются **линейно зависимыми**, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, не равные одновременно нулю, что линейная комбинация строк матрицы равна нулевой строке:

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_m e_m = 0,$$

где $0 = (0\ 0\ \ldots\ 0)$.

Линейная зависимость строк матрицы означает, что хотя бы одна строка матрицы является линейной комбинацией остальных.

Если линейная комбинация строк $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_m e_m$ равна нулю тогда и только тогда, когда все коэффициенты λ_i равны нулю, т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$, то строки $e_1, e_2, \ldots, e_m$ называются **линейно независимыми**.

Теорема о ранге матрицы. *Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых строк или столбцов, через которые выражаются все остальные ее строки (столбцы).*

Пример. Докажите, что система векторов $e_1 = (1 \quad 2 \quad -1 \quad -2 \quad 0)$, $e_2 = (2 \quad 3 \quad 0 \quad -2 \quad 1)$, $e_3 = (1 \quad 2 \quad 1 \quad 4 \quad 2)$, $e_4 = (1 \quad 3 \quad -1 \quad 0 \quad -1)$ линейно независима.

Решение. Составим матрицу, строки которой будут векторами данной системы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим ранг данной матрицы с помощью элементарных преобразований.

$$
A=\begin{pmatrix}1&2&-1&-2&0\\2&3&0&-2&1\\1&2&1&4&2\\1&3&-1&0&-1\end{pmatrix}
\sim\begin{pmatrix}1&2&-1&-2&0\\0&-1&2&2&1\\0&0&2&6&2\\0&1&0&2&-1\end{pmatrix}
\sim\begin{pmatrix}1&0&3&2&2\\0&-1&2&2&1\\0&0&2&6&2\\0&0&2&4&0\end{pmatrix}\sim
$$

$$
\sim\begin{pmatrix}1&0&3&2&2\\0&-1&2&2&1\\0&0&1&3&1\\0&0&1&2&0\end{pmatrix}
\sim\begin{pmatrix}1&0&0&-7&1\\0&-1&0&-4&-1\\0&0&1&3&1\\0&0&0&-1&-1\end{pmatrix}
\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&6\\0&-1&0&0&-3\\0&0&1&0&-2\\0&0&0&-1&-1\end{pmatrix}\sim
$$

$$
\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&-1&0\end{pmatrix}.
$$

Значит, ранг матрицы A равен четырем, то есть $r(A)=4$. Так как ранг матрицы равен количеству векторов исходной системы, то, согласно теореме, доказана линейная независимость исходной системы векторов.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти ранг матриц:

$$a)\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -5 \\ 14 & 28 & -42 & 70 \end{pmatrix}; \quad b)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad c)\begin{pmatrix} -5 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & -10 & -4 & 1 \\ 7 & 1 & 5 & 2 & -8 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $a)\,2;\ \ b)\,4;\ \ c)\,2.$

2. Является ли система векторов $e_1 = (1 \quad 2 \quad 2)$, $e_2 = (-1 \quad -1 \quad 0)$, $e_3 = (3 \quad 4 \quad 2)$, $e_4 = (1 \quad 3 \quad -1 \quad 0 \quad -1)$ линейно независимой?

Ответ: исходная система векторов линейно зависимая.

Глава 2. Системы линейных уравнений

2.1. Основные понятия

Системой линейных алгебраических уравнений, содержащей m уравнений и n неизвестных, называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где a_{ij} — коэффициенты системы; b_i — свободные члены; x_j — неизвестные значения; $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Запишем систему в матричной форме:

$$A \cdot X = B,$$

где A — матрица коэффициентов системы или **основная матрица системы**:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

X — вектор-столбец из неизвестных x_j:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

B — вектор-столбец из свободных членов b_i:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Расширенной матрицей системы называется матрица вида

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Решением системы называется n значений неизвестных

$$x_1 = c_1,\ x_2 = c_2,\ \dots,\ x_n = c_n,$$

при подстановке которых все уравнения системы обращаются в верные равенства.

Система уравнений называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение.

Система уравнений называется **несовместной**, если она не имеет ни одного решения.

Совместная система называется **определенной**, если она имеет единственное решение.

Совместная система называется **неопределенной**, если она имеет более одного решения.

Каждое решение неопределенной системы называется **частным решением этой системы**.

Совокупность всех частных решений называется **общим решением системы**.

2.2. Решение невырожденных линейных систем

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{2.1}$$

или в матричной форме: $A \cdot X = B$.

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ — определитель системы.

Если определитель системы отличен от нуля, то система называется **невырожденной**.

Рассмотрим способы решения системы (2.1).

Матричный метод решения

Умножим обе части уравнения $A \cdot X = B$ слева на матрицу A^{-1}:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

Так как $A^{-1} \cdot A = E$, то

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Пример. Решить матричным способом систему:

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 3, \\ x + z = 1, \\ 2x + y + 3z = 2. \end{cases}$$

Решение. Решение системы найдем по формуле $X = A^{-1} \cdot B$.

Основная матрица системы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица для матрицы A:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1-2 \\ 3-2+0 \\ -3+0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Формулы Крамера

Запишем матричное равенство $X = A^{-1} \cdot B$ в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

то есть

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \cdots + A_{n1}b_n}{\Delta} \\ \dfrac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \cdots + A_{n2}b_n}{\Delta} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \cdots + A_{nn}b_n}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$x_1 = \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \cdots + A_{n1}b_n}{\Delta},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_n = \frac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \cdots + A_{nn}b_n}{\Delta}.$$

Но $A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \cdots + A_{n1}b_n$ есть разложение определителя

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

по элементам первого столбца. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов. Итак,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}.$$

Аналогично $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, где Δ_2 получен из Δ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов; $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \ \ldots, \ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$.

Формулы Крамера имеют вид

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

где Δ — определитель основной матрицы системы; Δ_i — определитель, получаемый из определителя Δ заменой i-го столбца на столбец свободных членов; $i = \overline{1, n}$.

Пример. Решить по формулам Крамера систему

$$\begin{cases} x + y - z = 0, \\ 2x + y + z = 7, \\ x - y + z = 2. \end{cases}$$

Решение. Запишем формулы Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

Найдем определитель системы Δ и определители неизвестных Δ_x, Δ_y, Δ_z. Здесь $\Delta_x = \Delta_1$, $\Delta_y = \Delta_2$, $\Delta_z = \Delta_3$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 + 2 + 1 + 1 - 2 = 4,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 7 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0+2+7+2-0-7=4,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 7+0-4+7-2-0=8,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2+7+0-0+7-4=12.$$

Находим по формулам Крамера $x,\ y,\ z$:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{4}{4} = 1; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{8}{4} = 2; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{12}{4} = 3. \quad \text{Итак, } X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2.3. Решение произвольных систем линейных уравнений

Пусть задана система m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Теорема Кронекера-Капелли

Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу расширенной матрицы, то есть

$$r(A) = r(\overline{A}).$$

Пусть $r(A) = r(\bar{A}) = r$, то есть система совместна.

Утверждение 1. Если $r = n$, то система является определенной.

Утверждение 2. Если $r < n$, то система является неопределенной.

Правила решения произвольной системы линейных уравнений

1. Найти ранги основной и расширенной матриц системы. Если $r(A) \neq r(\bar{A})$, то система несовместна.

2. Если $r(A) = r(\bar{A})$, то система совместна. Найти какой-либо базисный минор порядка r. Взять r уравнений, из коэффициентов которых составлен базисный минор (остальные уравнения отбросить). Главные неизвестные оставить слева, а свободные перенести в правые части уравнений.

Главные (базисные) неизвестные — неизвестные, коэффициенты которых входят в базисный минор.

Свободные неизвестные — это $n-r$ неизвестных, коэффициенты которых не входят в базисный минор.

3. Решить систему относительно главных неизвестных, выразив главные неизвестные через свободные. Получить общее решение системы.

4. Придавая свободным неизвестным произвольные значения, найти соответствующие значения главных неизвестных, то есть найти частное решение системы.

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

Решение

1. Найдем ранги основной и расширенной матриц системы.

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\bar{A}=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1 & 5 & 4 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0\\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}(-2)\ (-5)\\ \\ \\ \end{array}\sim\begin{pmatrix}1 & 5 & 4 & 3 & 1\\ 0 & -11 & -6 & -7 & -2\\ 0 & -22 & -12 & -14 & -4\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ (-2)\\ \\ \end{array}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 5 & 4 & 3 & 1\\ 0 & -11 & -6 & -7 & -2\\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 5 & 4 & 3 & 1\\ 0 & -11 & -6 & -7 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_2=\begin{vmatrix}1 & 5\\ 0 & -11\end{vmatrix}=-11\neq 0 \ \Rightarrow \ r(\bar{A})=2=r(A).$$

2. Так как $r(A)=r(\bar{A})=r=2$, то система совместна.

Выберем базисный минор:

$$M_2=\begin{vmatrix}1 & 5\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-11.$$

Возьмем первые два уравнения, из коэффициентов которых составлен базисный минор:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$$

x_1, x_2 — главные неизвестные, так как их коэффициенты входят в базисный минор; x_3, x_4 — свободные неизвестные, так как коэффициенты при этих неизвестных не входят в базисный минор.

Главные неизвестные оставим слева, а свободные перенесем в правые части уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 1 - 4x_3 - 3x_4, \\ 2x_1 - x_2 = -2x_3 + x_4. \end{cases}$$

3. Выразим главные неизвестные через свободные.

Решим последнюю систему относительно x_1 и x_2 по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -11;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1-4x_3-3x_4 & 5 \\ -2x_3+x_4 & -1 \end{vmatrix} = -1+4x_3+3x_4+10x_3-5x_4 = -1+14x_3-2x_4;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1-4x_3-3x_4 \\ 2 & -2x_3+x_4 \end{vmatrix} = -2x_3+x_4-2+8x_3+6x_4 = -2+6x_3+7x_4.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-1+14x_3-2x_4}{-11} = \frac{1}{11} - \frac{14}{11}x_3 + \frac{2}{11}x_4;$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-2+6x_3+7x_4}{-11} = \frac{2}{11} - \frac{6}{11}x_3 - \frac{7}{11}x_4.$$

Итак,

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{11} - \dfrac{14}{11}x_3 + \dfrac{2}{11}x_4, \\ x_2 = \dfrac{2}{11} - \dfrac{6}{11}x_3 - \dfrac{7}{11}x_4. \end{cases}$$

Общее решение системы имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{11} - \dfrac{14}{11}c_1 + \dfrac{2}{11}c_2, \\ x_2 = \dfrac{2}{11} - \dfrac{6}{11}c_1 - \dfrac{7}{11}c_2, \qquad -\infty < c_1, c_2 < +\infty, \\ x_3 = c_1, \\ x_4 = c_2. \end{cases}$$

4. Найдем частное решение системы.

Пусть $c_1 = c_2 = 0$, тогда частное решение системы имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{11} \\ x_2 = \dfrac{2}{11} \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

2.4. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Метод Гаусса состоит в последовательном исключении неизвестных. Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2.2}$$

Решение происходит в два этапа.

1 этап. Прямой ход

С помощью элементарных преобразований строк система (2.2) приводится к **ступенчатому** (в частности, треугольному) виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad a_{kk}x_k + \dots + a_{kn}x_n = b_k, \end{cases} \tag{2.3}$$

где $k \le n, \quad a_{ii} \ne 0, \quad i = \overline{1, k}.$

Коэффициенты a_{ii} называют **главными** элементами системы.

Опишем, как привести систему (2.2) к виду (2.3).

Пусть $a_{11} \ne 0$. Если $a_{11} = 0$, то первым в системе запишем уравнение, в котором коэффициент при x_1 отличен от нуля.

С помощью элементарных преобразований преобразуем систему (2.2). Исключим неизвестное x_1 во всех уравнениях, кроме первого. Для этого умножим обе части первого уравнения на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ и сложим почленно со вторым уравнением системы. Затем умножим обе части первого уравнения на $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ и сложим с третьим уравнением системы. Продолжая этот процесс, получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\quad a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \qquad\quad a_{m2}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)}, \end{cases}$$

где $a_{ij}^{(1)}$, $b_i^{(1)}$ $(i = \overline{2,m}; j = \overline{2,n})$ — новые значения коэффициентов и правых частей, которые получаются после первого шага.

Далее аналогично, считая главным элементом $a_{22}^{(1)} \neq 0$, исключим неизвестное x_2 из всех уравнений системы, кроме первого и второго, и так далее.

Если в процессе приведения системы (2.2) к ступенчатому виду появляются нулевые уравнения, т.е. равенства вида $0=0$, то их отбрасывают. Если же появляются уравнения вида $0=b_i$, а $b_i \neq 0$, то система несовместная.

2 этап. Обратный ход

На втором этапе решаем ступенчатую систему. В последнем уравнении этой системы выражаем первое неизвестное x_k через остальные неизвестные $(x_{k+1}, \ldots, x_n)$. Затем подставляем полученное значение x_k в предпоследнее уравнение системы и выражаем x_{k-1} через $(x_{k+1}, \ldots, x_n)$, далее последовательно находим $x_{k-2}, \ldots, x_1$. Придавая свободным неизвестным $(x_{k+1}, \ldots, x_n)$ произвольные значения, получим множество решений системы.

Замечания

1. Если ступенчатая система оказывается треугольной, то есть $k = n$, то исходная система имеет единственное решение.

2. На практике удобнее работать не с системой (2.2), а с ее расширенной матрицей, выполняя все элементарные преобразования над ее строками.

Пример. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 7. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

1 этап. Приведем матрицу к ступенчатому виду:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \end{pmatrix}.$$

2 этап. Восстановим систему:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \qquad\qquad + x_4 = -3, \\ \qquad 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 10. \end{cases}$$

Из второго уравнения найдем x_2:

$$x_2 = \frac{2}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_4 + 2.$$

Подставим x_2 в первое уравнение и найдем x_1:

$$x_1 = \frac{4}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 + 1.$$

Общее решение системы будет иметь вид

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{4}{5}c_1 + \dfrac{1}{5}c_2 + 1, \\ x_2 = \dfrac{2}{5}c_1 + \dfrac{3}{5}c_2 + 2, \\ x_3 = c_1, \\ x_4 = c_2. \end{cases}$$

2.5. Системы линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений

Система линейных уравнений называется **однородной**, если все свободные члены равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Однородная система всегда совместна, то есть

$$r(A) = r(\overline{A}).$$

Она имеет **нулевое (тривиальное) решение**: $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0.$

Теорема 1. *Для того чтобы система однородных уравнений (2.4) имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ранг r ее основной матрицы был меньше числа n неизвестных, то есть $r < n$.*

Пусть дана однородная система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases}$$

Теорема 2. *Для того чтобы однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю, то есть $\Delta = 0$.*

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 2 - 12 - 2 - 3 - 4 = -20.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система имеет, согласно теореме 2, только одно (нулевое) решение:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

Запишем решение системы (2.4) $x_1 = k_1,\ x_2 = k_2,\ \ldots,\ x_n = k_n$ в виде строки

$$e_1 = (k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n).$$

Решения системы линейных однородных уравнений обладают следующими свойствами.

1. Если строка $e_1 = (k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n)$ — решение системы (2.4), то и строка $\lambda e_1 = (\lambda k_1,\ \lambda k_2,\ \ldots,\ \lambda k_n)$ — также решение этой системы.

2. Если строки $e_1 = (k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n)$ и $e_2 = (l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_n)$ — решения системы (2.4), то при любых c_1 и c_2 их линейная комбинация $c_1 e_1 + c_2 e_2 = (c_1 k_1 + c_2 l_1, c_1 k_2 + c_2 l_2 + \ldots + c_1 k_n + c_2 l_n)$ — также решение данной системы.

Из сформулированных свойств следует, что всякая линейная комбинация решений системы линейных однородных уравнений также является решением этой системы.

Система линейно независимых решений $e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_k$ называется **фундаментальной**, если каждое решение системы (2.4) является линейной комбинацией решений $e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_k$.

***Теорема**. Если ранг r основной матрицы системы линейных однородных уравнений (2.4) меньше числа переменных n, то всякая фундаментальная система решений системы (2.4) состоит из n–r решений.*

Общее решение системы (2.4) линейных однородных уравнений может быть представлено в виде

$$c_1 e_1 + c_2 e_2 + \ldots + c_k e_k ,$$

где $e_1, e_2, \ldots, e_k$ — любая фундаментальная система решений (ФСР), $c_1, c_2, \ldots, c_k$ — произвольные постоянные и $k = n - r$.

Решения $e_1, e_2, \ldots, e_k$ можно получить, придавая свободным неизвестным поочередно значение 1, полагая остальные свободные неизвестные равными 0.

Пример. Найти фундаментальную систему решений и общее решение однородной системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Найдем ранг системы *r*:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-3)\ (-4)\ (-3) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-3)\ (+2) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

Оставим первые два уравнения системы:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -4x_3 + 3x_4, \\ 3x_1 + 5x_2 = -6x_3 + 4x_4. \end{cases}$$

Решим полученную систему по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -4x_3 + 3x_4 & 2 \\ -6x_3 + 4x_4 & 5 \end{vmatrix} = -20x_3 + 15x_4 + 12x_3 - 8x_4 = -8x_3 + 7x_4;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4x_3 + 3x_4 \\ 3 & -6x_3 + 4x_4 \end{vmatrix} = -6x_3 + 4x_4 + 12x_3 - 9x_4 = 6x_3 - 5x_4;$$

$$x_1 = \frac{-8x_3 + 7x_4}{-1} = 8x_3 - 7x_4, \qquad x_2 = \frac{6x_3 - 5x_4}{-1} = -6x_3 + 5x_4.$$

Общее решение системы будет иметь вид

$$\begin{cases} x_1 = 8c_1 - 7c_2, \\ x_2 = -6c_1 + 5c_2, \\ x_3 = c_1, \\ x_4 = c_2. \end{cases}$$

Из общего решения находим фундаментальную систему решений:

$$e_1^T = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2^T = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

С помощью фундаментальной системы общее решение может быть записано в виде

$$X(c_1, c_2) = c_1 \cdot e_1 + c_2 \cdot e_2.$$

Теорема о структуре общего решения неоднородной системы линейных уравнений. *Общее решение совместной неоднородной системы линейных уравнений равно сумме какого-либо ее частного решения и общего решения однородной системы, соответствующей данной неоднородной.*

Частное решение неоднородной системы можно получить, приравняв к нулю все свободные неизвестные. Такое решение называется **базисным решением** (в выбранном базисе).

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить системы методом матричного исчисления:

$$a)\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 3; \end{cases} \qquad b)\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Ответ: $a)\begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = -3, \\ x_3 = 4; \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x_1 = -9, \\ x_2 = -10, \\ x_3 = 13. \end{cases}$

2. Решить системы по формулам Крамера:

$$a)\begin{cases} 4x_1+2x_2-\ \ x_3=1, \\ 5x_1+3x_2-2x_3=2, \\ 3x_1+2x_2-3x_3=0; \end{cases} \qquad b)\begin{cases} 5x_1+2x_2+5x_3=4, \\ 3x_1+5x_2-3x_3=-1, \\ -2x_1-4x_2+3x_3=1. \end{cases}$$

$$\mathit{Ответ:}\ a)\begin{cases} x_1=-1, \\ x_2=3, \\ x_3=1; \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x_1=-7, \\ x_2=7, \\ x_3=5. \end{cases}$$

3. Исследовать совместность и найти общее решение систем

$$a)\begin{cases} 5x_1+12x_2+5x_3+3x_4=10, \\ 4x_1+3x_2+x_3+3x_4=2, \\ 11x_1+11x_2+4x_3+8x_4=8; \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x_1-\ \ x_2+\ \ 3x_3+\ x_4=6, \\ 7x_1+5x_2-\ \ 7x_3-\ \ x_4=8, \\ x_1+8x_2-18x_3-5x_4=-6. \end{cases}$$

$$\mathit{Ответ:}\ a)\begin{cases} x_1=8-9x_2-4x_3, \\ x_4=-10+11x_2+5x_3; \end{cases} \qquad b)\text{система несовместна.}$$

4. Найти фундаментальную систему решений для систем

$$a)\begin{cases}5x_1-3x_2+2x_3+4x_4=0,\\ 2x_1-\ \ x_2+3x_3+5x_4=0,\\ 4x_1-3x_2-5x_3-7x_4=0;\end{cases}\qquad b)\begin{cases}3x_1+\ \ x_2-\ \ x_3+\ \ x_4=0,\\ \ \ x_1+3x_2+\ \ x_3-\ \ x_4=0,\\ -x_1+\ \ x_2+3x_3+\ \ x_4=0,\\ \ \ x_1-\ \ x_2+\ \ x_3+3x_4=0.\end{cases}$$

Ответ: $a)$ $(7,11,-1,0)$, $(11,17,0,-1)$; $b)$ $(1,-1,1,-1)$.