Тема: Дифференциальные уравнения

Системы дифференциальных уравнений

Учебный вопрос

1. Системы дифференциальных уравнений

Определение. Системой ДУ называется совокупность ДУ , каждое из которых содержит независимую переменную, искомые функции и их производные.

$$\begin{cases} F_1\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n'\right) = 0 \\ F_2\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n'\right) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ F_n\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n'\right) = 0 \end{cases}$$

Определение. Система ДУ первого порядка ,разрешенных относительно производной называется нормальной системой ДУ.

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \quad\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{cases} \qquad (1)$$

Проинтегрировать систему – значит определить функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$, удовлетворяющие системе уравнений (1) и данным начальным условиям

$$y_1\big|_{x=x_0} = y_{1_0}, y_2\big|_{x=x_0} = y_{2_0}, \ldots, y_n\big|_{x=x_0} = y_{n_0}. \qquad (2)$$

Задача Коши для системы (1) ставиться следующим образом: найти решение, удовлетворяющее начальным условиям (2).

Теорема (Коши). Если в системе (1) все функции $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ непрерывны вместе со всеми своими частными производными по y_i в некоторой области D

($(n+1)$-мерного пространства), то в каждой точке $M_0(x_0, y_{1_0}, y_{2_2}, \ldots, y_{n_0})$ этой области существует, и притом единственное, решение

$$\begin{gathered} y_1 = \varphi_1(x), \\ y_2 = \varphi_2(x), \\ \ldots, \\ y_n = \varphi_n(x) \end{gathered}$$

системы, удовлетворяющее начальным условиям. (2).

I. Метод исключения

Одно из уравнений системы (1) дифференцируем по x:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f'(x, y, z)_x = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} \qquad (2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot f + \frac{\partial f}{\partial z}\, g.$$

Из первого уравнения системы (1) находим z и подставляем найденное выражение во (2).

Получаем уравнение второго порядка с одной неизвестной функцией y.

Решая, получаем $y = y(x, C_1, C_2)$ и $z = z(x, C_1, C_2)$.

Пример.

Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2y + 2z \\ \dfrac{dz}{dx} = y + 3z \end{cases}$$

Решение.

Первое уравнение системы продифференцируем по x

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2y' + 2z'.$$

Из первого уравнения системы находим z:

$$z = \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx} - 2y\right).$$

Подставляем в уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2y' + 2(y + 3z) \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 2y' + 2\left(y + \frac{3}{2}\left(\frac{dy}{dx} - 2y\right)\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2y' + 2(y + 3z) \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 2y' + 3\frac{dy}{dx} - 4y \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

или $y'' - 5y' + 4y = 0$

$$y'' - 5y' + 4y = 0$$

Составляем характеристическое уравнение:

$$k^2 - 5k + 4 = 0,$$

$$k_1 = 1,\ k_2 = 4 \quad \Rightarrow \quad y = C_1 e^{x} + C_2 e^{4x}$$

Находим

$$y' = C_1 e^{x} + 4C_2 e^{4x},$$

$$z = \frac{1}{2}(C_1 e^{x} + 4C_2 e^{4x} - 2C_1 e^{x} - 2C_2 e^{4x});$$

$$z = -\frac{1}{2}C_1 e^{x} + C_2 e^{4x}.$$

Ответ:

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{4x}$$

$$z = -\frac{1}{2}C_1 e^{x} + C_2 e^{4x}.$$

Тема№10. Дифференциальные уравнения

Занятие 10.22. Системы дифференциальных уравнений

Лекция 10/10

Учебный вопрос

1. Системы дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему двух линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = a_{11}y + a_{12}z \\ \dfrac{dz}{dx} = a_{21}y + a_{22}z \end{cases} \qquad (3)$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ - постоянные коэффиценты, x - аргумент, y, z - функции.

Система (3) – нормальная система линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Будем искать частное решение системы (3) в виде:

$$y = \alpha e^{kx},\ z = \beta e^{kx} \tag{4}$$

где α, β, k - постоянные , которые надо подобрать так, чтобы функции (4) удовлетворяли системе (3).

Подставив эти функции в систему (3) и сократив на множитель получим:

$$\begin{cases} \alpha k = a_{11}\alpha + a_{12}\beta, \\ \beta k = a_{21}\alpha + a_{22}\beta, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta = 0, \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta = 0, \end{cases} \tag{5}$$

Система (5) можно расматривать как однородную систему с двумя неизвестными .

Чтобы эта система имела ненулевое решение достаточно определитель системы был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-k \end{vmatrix} = 0 \qquad (6)$$

Уравнение (6) назвается характеристическим уравнением системы (3).

1)Корни характеристического уравнения действительны и различные k_1, k_2 .

Для каждого корня напишем систему и определим коэффиценты $\alpha_i, \beta_i, i = 1,2.$

Таким образом :

- для корня k_1 : $y = \alpha_1 e^{k_1 x}$, $z = \beta_1 e^{k_1 x}$
- для корня k_2 : $y = \alpha_2 e^{k_2 x}$, $z = \beta_2 e^{k_2 x}$

Общее решение системы записываем в виде:

$$
\begin{aligned}
y &= C_1 \alpha_1 e^{k_1 x} + C_2 \alpha_2 e^{k_1 x}, \\
z &= C_1 \beta_1 e^{k_1 x} + C_2 \beta_2 e^{k_1 x}.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

2)Корни характеристическогоуравнения различны, но среди них есть комплексные корни: $k_1 = a \pm bi,\ k_2$. Вид частных решении определяют так же как и в случаи 1).

3)Характеристическое уравнение имеет корень кратности $m(m = 2{,}3)$. Решение системы следует искать в виде:

- если $m = 2$, то $y = (A + Bx)e^{kx}, z = (C + Dx)e^{kx};$
- если $m = 3$, то $y = \left(A + Bx + Cx^2\right)e^{kx}, z = \left(D + Ex + Fx^2\right)e^{kx}.$

II. Метод характеристического уравнения.

Рассмотрим систему двух линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = a_{11}y + a_{12}z \\ \dfrac{dz}{dx} = a_{21}y + a_{22}z \end{cases} \qquad (3)$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$- постоянные коэффициенты, x- аргумент, y,z- функции

Система (3)- нормальная система линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-k \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

$$(a_{11}-k)(a_{22}-k)-a_{12}a_{21}=0$$

$$k^2-(a_{11}+a_{22})k+(a_{22}a_{11}-a_{12}a_{21})=0$$

а) $k_1 \neq k_2$, частное решение $y = \alpha e^{kx}$, $z = \beta e^{kx}$

при $k = k_1$, $y_1 = \alpha_1 e^{k_1 x}$, $z_1 = \alpha_2 e^{k_1 x}$

при $k = k_2$, $y_2 = \beta_1 e^{k_2 x}$, $z_2 = \beta_2 e^{k_2 x}$

$$\begin{cases} y = C_1 \alpha_1 e^{k_1 x} + C_2 \alpha_2 e^{k_2 x} \\ z = C_1 \beta_1 e^{k_1 x} + C_2 \beta_2 e^{k_2 x} \end{cases} \tag{5}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ определяем из системы

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Пример. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2y + 2z \\ \dfrac{dz}{dx} = y + 3z \end{cases}$$

Решение Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 2-k & 2 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \quad (2-k)(3-k) - 2 = 0 \quad \Rightarrow 6- 3k- 2k+k^2- 2 = 0$$

$k^2 - 5k + 4 = 0$

$k_1 = 1, \ k_2 = 4$

а) $k_1 \neq k_2$, частное решение $y = \alpha e^{kx}$, $z = \beta e^{kx}$

при $k = k_1 = 1$, $y_1 = \alpha_1 e^{x}$, $z_1 = \beta_1 e^{x}$

при $k = k_2 = 4$, $y_2 = \alpha_2 e^{4x}$, $z_2 = \beta_2 e^{4x}$.

$$\begin{cases} y = C_1 \alpha_1 e^{x} + C_2 \alpha_2 e^{4x} \\ z = C_1 \beta_1 e^{x} + C_2 \beta_2 e^{4x} \end{cases}$$

При $k = k_1 = 1$,

$$\begin{cases} (2-1)\alpha_1 + 2\beta_1 = 0 \\ \alpha_1 + (3-1)\beta_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\beta_1 = 0 \\ \alpha_1 + 2\beta_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = -2\beta_1.$$

Полагая $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = -2$.

При $k = k_2 = 4$,

$$\begin{cases} (2-4)\alpha_2 + 2\beta_2 = 0 \\ \alpha_2 + (3-4)\beta_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\alpha_2 + 2\beta_2 = 0 \\ \alpha_2 - \beta_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_2 = \beta_2$$

Полагая $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = 1$.

Решение системы: $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{4x}$

$$z = -\frac{1}{2} C_1 e^{x} + C_2 e^{4x}.$$

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y, z) \\ \dfrac{dz}{dx} = g(x, y, z) \end{cases} \qquad (1)$$

где x- аргумент, y, z - искомые функции.

Определение. Система, когда в левой части производные первого порядка, а правые части не содержат производных, называется **нормальной.**