

**ЛЕКЦИЯ 3.  
РАБОТА СТЕРЖНЕВЫХ  
ЭЛЕМЕНТОВ ПОД НАГРУЗКОЙ.**

## План лекции:

1. Работа и расчет по СП растянутых и изгибаемых элементов в упругой и пластической состояниях. Влияние формы сечения. Пластический шарнир;
2. Нормативные положения СП «Стальные конструкции».

# Три типа задач при расчёте на прочность.

Предельные неравенства используются для в трёх основных типах расчётных задач:

- 1. Проектная задача, или подбор сечения.** В этом случае по заданным внешним воздействиям определяют  $N_{\max}$  – максимальное усилие, подбирают материал, т. е. устанавливают  $[\sigma]$  – допускаемое напряжение или  $R$  – расчётное сопротивление (в зависимости от применяемого расчётного метода). Затем из условия прочности определяют размеры поперечного сечения;
- 2. Эксплуатационная задача, или определение грузоподъёмности (эксплуатационной несущей способности).** Конструкция реально существует, значит известны  $[\sigma]$  или  $R$ , размеры поперечного сечения. Требуется определить максимально допускаемые нагрузки. В этом случае вначале определяют  $N_{\max}$ , а затем сравнивают  $N_{\max}$  с внешними силами на основе уравнений равновесия для соответствующей системы;
- 3. Поверочный расчет.** При известных нагрузках и размерах поперечного сечения определяют напряжение  $\sigma_{\max}$ , которое сравнивают с допускаемым напряжением или расчётным сопротивлением, после чего делают вывод о состоянии конструкции.

## Два типа расчётов на прочность.

Все расчеты делятся на две группы — силовые и конструктивные. Цель силовых расчетов — определить усилия, действующие в конструкции (системе) и в каждом элементе. Этим занимается строительная механика.

Цель конструктивных расчетов — подтвердить, что при принятых размерах сечений ни одно возможное предельное состояние не наступит.

Есть и третья цель — обеспечение путем обоснованного выбора габаритов элемента и размеров сечений минимума расхода металла или иных экономических показателей. Для этого используется раздел строительной механики — теория оптимального проектирования.

При выполнении конструктивных расчетов в соответствии с техническими требованиями выполняются три основных проверки — прочности, общей устойчивости, жесткости (гибкости).

## Расчет на прочность (главные и эквивалентные напряжения)

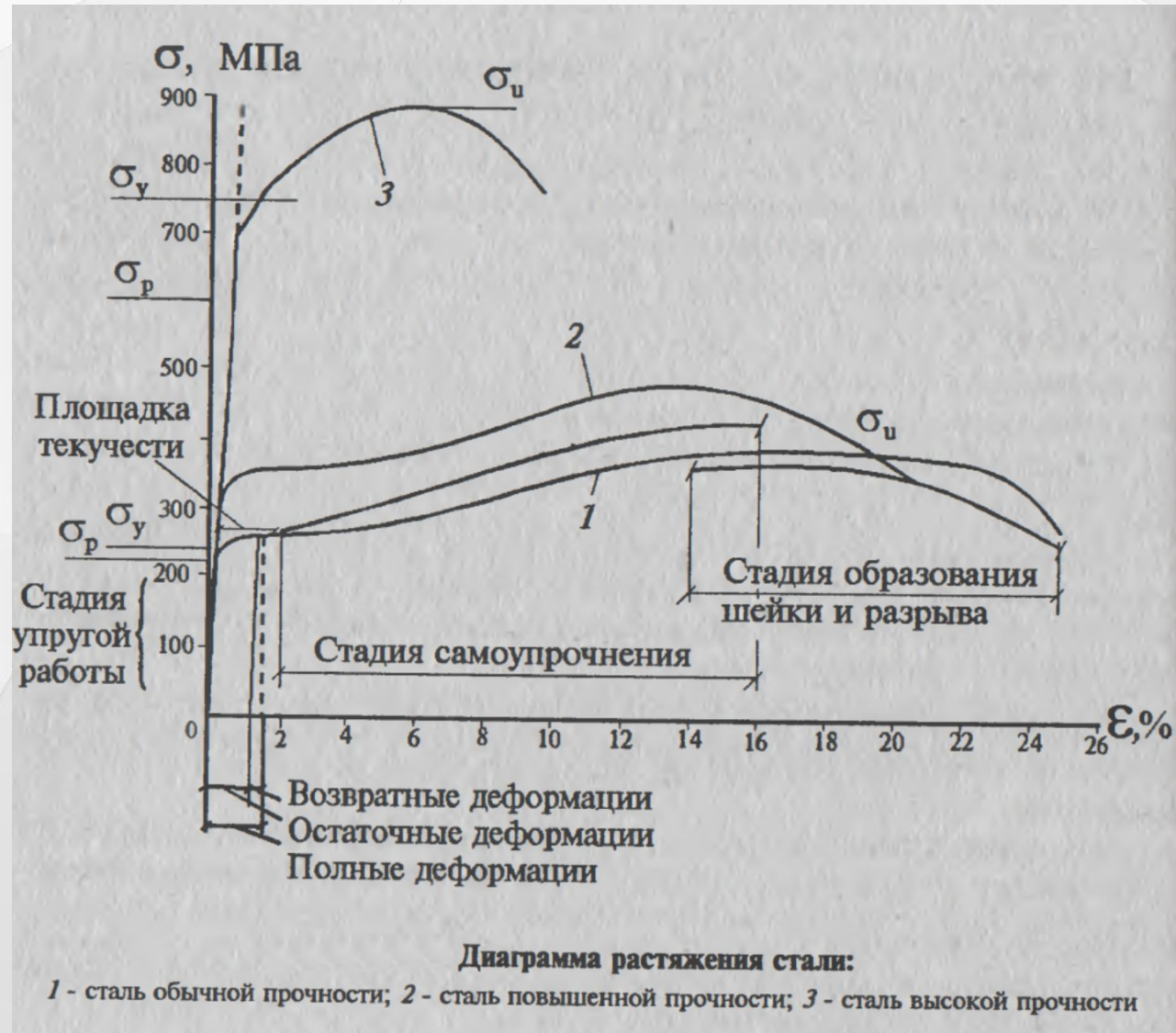
№ п/п	Теории прочности	Выражение для вычисления эквивалентного напряжения растяжения $\sigma_e$ и сжатия $\sigma_s$	Сфера применения
1	Теория максимальных нормальных напряжений	$\sigma_e = \sigma_1$ $\sigma_s =  \sigma_3 $	Для хрупких однородных материалов (керамика, стекло)
2	Теория наибольших линейных деформаций	$\sigma_e = \sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3)$ $\sigma_s =  \sigma_3 - \mu (\sigma_1 + \sigma_2) $	
3	Теория наибольших касательных напряжений	$\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3$ $\sigma_s = \sigma_e$	Для пластических материалов с малым упрочнением, для которых характерно появление локальных пластических деформаций в виде линий скольжения (отпущенная сталь)
4	Теория октаэдрических касательных напряжений или удельной энергии формоизменения (энергетическая теория Губера-Хенки-Мизеса)	$\sigma_e = \sigma_i = \left\{ \frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \right\}^{1/2}$ $\sigma_s = \sigma_e$	Для большинства пластических материалов (сталь, медь, никель)

При простых видах деформации, в частности, при одноосном напряженном состоянии об опасности действующих напряжений судят, сопоставляя их с экспериментально устанавливаемой величиной (с пределом текучести для пластических материалов или с временным сопротивлением для хрупких тел).

Для сложного напряженного состояния, характеризующегося главными напряжениями  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ , обычно используется некоторая гипотеза (теория прочности) о преимущественном влиянии на прочность материала того или иного фактора. При этом предусматривается возможность сопоставления некоторого эквивалентного напряжения с пределом, который соответствует простому одноосному растяжению.

# Расчет на прочность (одноосное напряженное состояние)

Таблица 4.1



Классификация строительных сталей

По прочно-сти	По химиче-скому со-ставу	ГОСТ 19281-89, ГОСТ 380-2005	ГОСТ 27772-88	$\sigma_y^*$ кН/см <sup>2</sup>	$\sigma_u^*$ кН/см <sup>2</sup>	$\epsilon$ %
1	2	3	4	5	6	7
Стали обычной прочности	Малоуглеродистые, (низкоуглеродистые)	Вст3кп2 18кп	C235	18-23	36	25-27
		Вст3пс6 18пс	C245	24	37	24-25
		Вст3сп5 18сп, 18Гпс	C255	24-25	37-38	24-25
		Вст3сп5-2 Вст3Гпс5-2**	C285	27-28	38-39	23-24
Стали повышенной прочности	Низколегированные стали	14Г2 09Г2С 15ХСНД ВстГпс***	C345	30-39	45-49	20-21
		09Г2С гр2 12Г2С гр2	C375	33-37,5	48-51	20
		14Г2АФ 10Г2С1 т.у.***	C390	39	54	20
Стали высокой прочности	Низколегированные стали повышенной прочности. Среднелегированные стали	16Г2АФ 15Г2СФ т.у.***	C440	41-44	57-59	19
		12Г2СМФ	C590	Св. 54 усл.	Св. 65	18-19
		12ГН2МФАЮ	C590К	Св. 54 усл.	Св. 65	18-19

\* Предел текучести  $\sigma_y$ , и временное сопротивление  $\sigma_u$  зависят от толщины проката.

\*\* Вст3Гпс5-2 – полуспокойная малоуглеродистая сталь с добавлением марганца.

\*\*\* ВстГпс; 10Г2С1 т.у.; 15Г2СФ т.у. – термоупрочненные стали.



## Работа под нагрузкой и расчет элементов конструкций по предельным состояниям.

Работе пластичных сталей наиболее близко соответствуют третья и четвертая теории прочности. В нормах проектирования для расчета элементов стальных конструкций принята четвертая энергетическая теория прочности. На основании четвертой теории прочности сложное напряженное состояние, вызывающее переход материала в пластическое состояние, может быть заменено эквивалентным одноосным напряженным состоянием с помощью приведенных напряжений. При объемном напряженном состоянии приведенные напряжения определяют по формуле которую ввиду ее большой значимости мы запишем здесь и к которой будем постоянно обращаться в дальнейшем:

$$\sigma_{ef} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}.$$

По этой формуле будем оценивать прочность стали в отдельной точке при любом напряженном состоянии, подставляя в нее присутствующие в этой точке напряжения и используя условие неперехода стали в пластическое состояние  $\sigma_u < R_y$  Так, для плоского напряженного состояния будем иметь:

$$\sigma_{ef} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - (\sigma_x + \sigma_y) + 3\tau_{xy}^2} \leq R_y$$

При простом сдвиге  $\sigma_x = \sigma_y = 0$ ,  
поэтому

$$\sigma_{ef} = \sqrt{3\tau_{xy}^2} \leq R_y$$

ил  
и

$$\tau_{xy} \leq R_y / \sqrt{3} = 0,58R_y$$

## Работа под нагрузкой и расчет элементов конструкций по предельным состояниям.

Работа центрально растянутых элементов конструкций полностью соответствует работе стали при простом одноосном растяжении. Напряжения в сечении таких элементов от действия растягивающей силы распределяются равномерно. Примером элементов, работающих на центральное растяжение, являются растянутые пояса, раскосы и подвески ферм при узловой передаче нагрузки.

Если элемент работает только на центральное растяжение, то:

- потеря устойчивости центрально растянутого элемента невозможна;
- появление недопустимых прогибов (по второй группе предельных состояний) также невозможно.

Следовательно, предельные состояния центрально растянутых элементов наступят в результате потери прочности или чрезмерного развития пластических деформаций.

Прочность центрально растянутого элемента будет обеспечена, если, согласно основному неравенству расчета по первой группе предельных состояний, выполнено условие  $N < S$ .

Прочность элемента будет обеспечена до достижения в элементе напряжений, равных временному сопротивлению. Однако в элементах из малоуглеродистых и низколегированных сталей в момент наступления предельного состояния, определенного по временному сопротивлению, разовьются значительные по величине остаточные пластические деформации. Из рисунка видно, что величина остаточных деформаций значительно превышает допускаемые нормами. Иными словами элемент получает удлинения, не допускаемые при нормальной эксплуатации.



При центральном растяжении допускают развитие только упругих деформаций или работу элемента только в упругой области, иначе элемент получит значительное удлинение. Поэтому расчетом проверяют только упругую работу. Растянутые стержни проверяются на прочность по площади нетто.

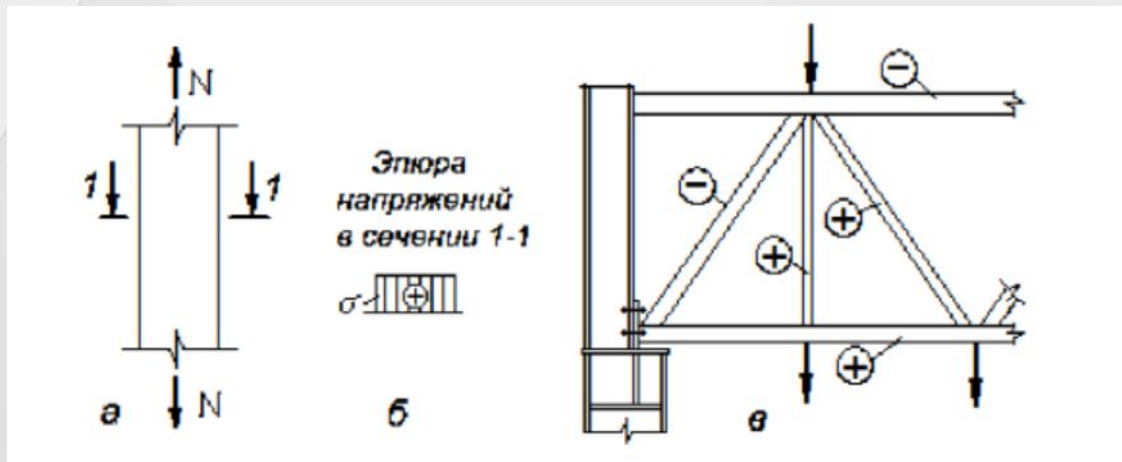
$$\frac{N}{A_n \cdot R_v \cdot \gamma_c} \leq 1$$

где  
е

$$N = \sum^m (N_{ni} \cdot \gamma_{fi} \cdot \Psi_i) \cdot \gamma_n$$

При расчете элементов из сталей высокой прочности расчет элементов и проверку прочности выполняют по временному сопротивлению, но с учетом коэффициента надежности  $\gamma_u$ :

$$\frac{N}{A_n \cdot R_u \cdot \gamma_c \cdot 1/\gamma_u} \leq 1$$



На примере работы растянутых элементов ферм (см. рис.) видно, что удлинение хотя бы одного элемента приведет к появлению дополнительных напряжений в других элементах и изменению расчетной схемы фермы в целом. Следовательно, пригодность к эксплуатации устанавливается путем ограничения деформаций (недопущения развития пластических деформаций). Расчетом допускается только упругая работа растянутого элемента (напряжения не должны превышать предела текучести материала).

## Предельное состояние центрально сжатого короткого

элементы  
Короткие сжатые элементы могут потерять устойчивость. При нагружении выше предела текучести короткие образцы все более сжимаются и ни при каких нагрузках не разрушаются, превращаясь во все более и более тонкую пластинку. Поэтому расчет на прочность сжатого короткого элемента является условным. Если короткий элемент работает на центральное сжатие, то:

- хрупкого и усталостного разрушения быть не может;
- потеря устойчивости сжатого короткого элемента невозможна;
- появление недопустимых прогибов невозможно (по второй группе предельных состояний).

Следовательно, предельное состояние центрально сжатых коротких элементов наступит в результате чрезмерного развития пластических деформаций. Согласно основному неравенству при расчете по первой группе предельных состояний (по чрезмерному развитию пластических деформаций) предельное состояние задается в виде

$$\left( \sum_{i=1}^n \delta_{mi} \cdot \gamma_{fi} \cdot \psi \right) \gamma_n \leq \delta_u$$

Пригодность к эксплуатации устанавливается путем ограничения развития деформаций. В коротких образцах развитие относительных остаточных деформаций практически не заметно, даже при напряжениях, равных пределу текучести. Временного сопротивления разрушению в коротких образцах, работающих на сжатие, нет. Расчет коротких образцов следует выполнять по временному сопротивлению:

$$\frac{N}{A \cdot R_u \cdot \gamma_c} \leq 1$$

# Предельные состояния и расчет изгибаемых

## элементов

Примером изгибаемых элементов служат балки - один из основных элементов строительных конструкций. В изгибаемых элементах пролет значительно превосходит высоту поперечного сечения. При изгибе таких стержней справедлива гипотеза плоских сечений, т.е. по высоте сечений изменение напряжений и деформаций происходит по линейному закону, но только до появления напряжений, равных пределу текучести.

Основными видами предельных состояний, способных возникнуть в изгибаемых элементах строительных конструкций, по первой группе являются:

- потеря прочности в результате пластического, хрупкого или усталостного разрушения;
- потеря устойчивости формы;
- чрезмерное развитие пластических деформаций;

по второй группе:

- появление недопустимых прогибов.

## Расчет изгибаемых элементов в пределах

### упругости

Прочность изгибаемых элементов, работающих в пределах упругости, будет обеспечена, если, согласно основному неравенству расчета по первой группе предельных состояний, выполнено условие  $M < S$ ,

где  $M$  - изгибающий момент, определяемый от расчетных нагрузок

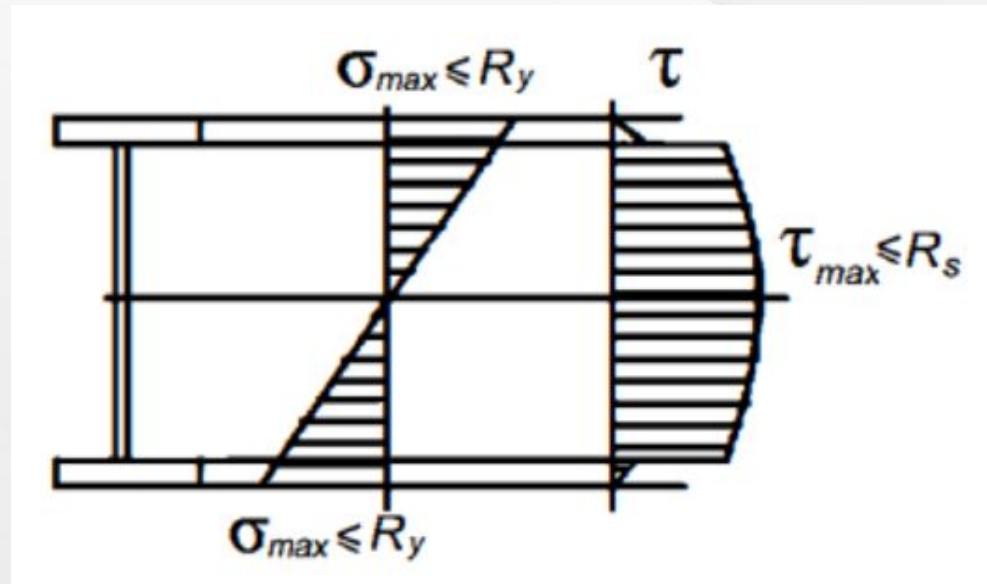
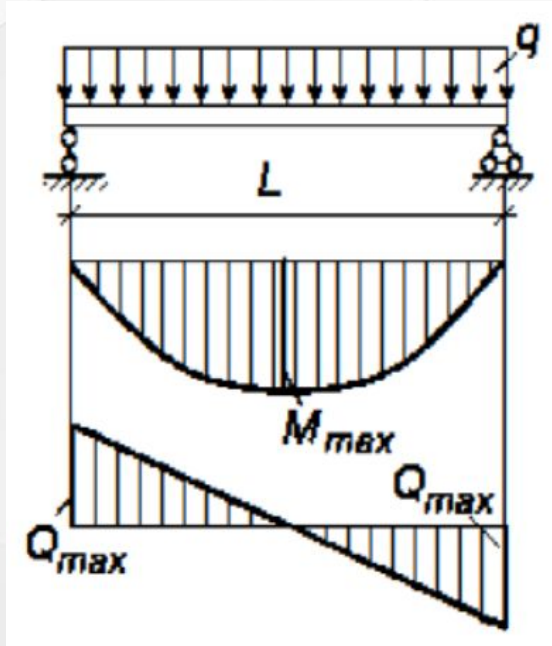
$S$  - несущая способность элемента.

Так как рассматривается упругая работа элементов, основное неравенство при расчете по предельным состояниям запишется по пределу текучести:

$$\sum_{i=1}^m (M_{ni} \cdot \gamma_{fi} \cdot \psi_i) \cdot \gamma_n \leq W_n \cdot R_y \cdot \gamma_c$$

где  
е

$$M = \sum_{i=1}^m (M_{ni} \cdot \gamma_{fi} \cdot \psi_i) \cdot \gamma_n; S = W_n \cdot R_y \cdot \gamma_c$$



В упругой стадии работы балки предельное состояние определяется достижением нормальными или касательными напряжениями предельных значений хотя бы в одной точке сечения (рис. 6.13). За предельные значения принимают: для нормальных напряжений - расчетное сопротивление стали растяжению  $R_y$ , для касательных напряжений — расчетное сопротивление срезу  $R_s$ , которые используют с поправкой на условия работы (умножением на коэффициент условий работы  $\gamma_s$ ).

Расчетные усилия в сечении балки - это изгибающий момент  $M$  и поперечная сила  $Q$ . Прочность изгибаемых элементов при изгибе в одной из главных плоскостей проверяют по формулам:

- от действия момента

$$\frac{M \cdot y_{\max}}{I_x \cdot R_y \cdot \gamma_c} = \frac{M}{W_x \cdot R_y \cdot \gamma_c} \leq 1,$$

- от действия поперечной силы (формула Журавского)

$$\frac{Q \cdot S_{\text{отс. части}}}{I_x \cdot t_w \cdot R_s \cdot \gamma_c} \leq 1$$

При изгибе в двух плоскостях прочность изгибаемого элемента определяют по формуле

$$\frac{M_x}{W_x \cdot R_y \cdot \gamma_c} + \frac{M_y}{W_y \cdot R_y \cdot \gamma_c} \leq 1$$

Если сечение балки несимметричное, то лучше пользоваться формулой

$$\frac{M_x}{I_x \cdot R_y \cdot \gamma_c} \cdot y + \frac{M_y}{I_y \cdot R_y \cdot \gamma_c} \cdot x \leq 1$$

# Работа изгибаемых элементов с учетом развития пластических деформаций

При загрузении балки возрастающей нагрузкой ее поведение, т.е. изменение напряженно-деформированного состояния, определяется изменением таких величин, как нормальные и касательные напряжения и прогиб  $f$

При работе изгибаемого элемента выделяют три характерных состояния работы балки, соответствующих трем принципам расчета:

- область упругой работы. Под действием нагрузки крайние волокна середины балки имеют наибольшие напряжения и раньше других могут достигнуть предела текучести. Появление текучести в крайних фибрах сечения не приводит к исчерпанию несущей способности балки, так как соседние менее нагруженные фибры могут еще работать. Сохраняется прямая  $M_1 = W_x \cdot R_y \gamma_c$  линейность между нагрузкой, напряжениями и деформациями. Максимальный момент, соответствующий этому состоянию равен

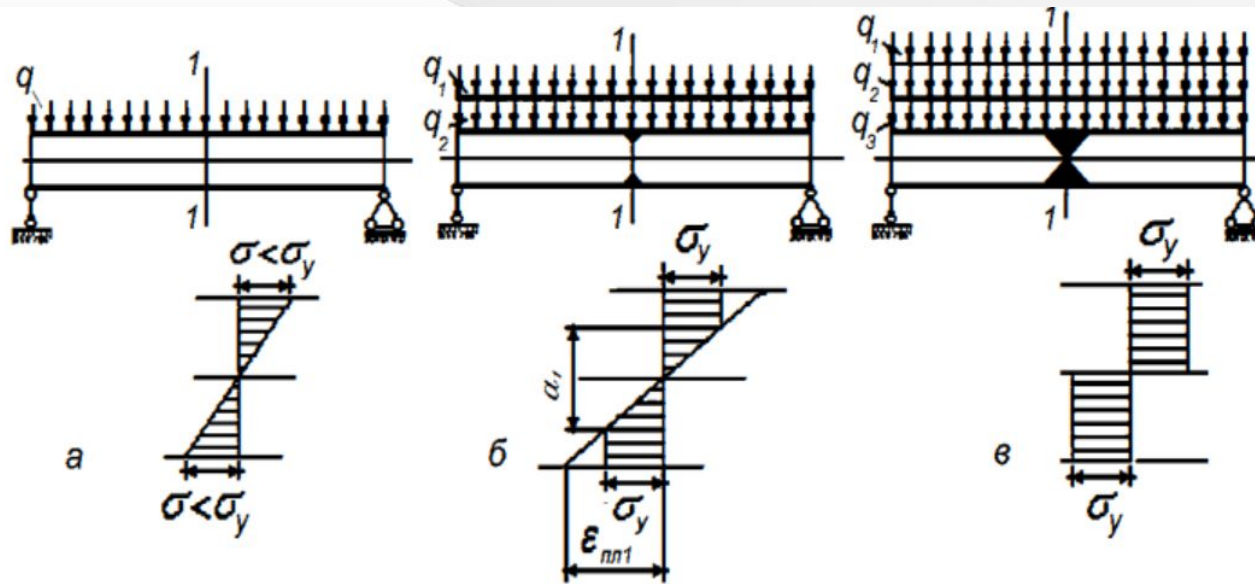
В случае разгрузки остаточные деформации отсутствуют;

- наличие в сечении упругих и пластических деформаций. При дальнейшем увеличении нагрузки рост напряжений в крайних фибрах прекращается, ограничиваясь значением предела текучести  $\sigma_{tv}$ .

Пластические деформации, как правило, образуются и распространяются от крайних волокон вглубь к середине сечения, где еще остается упругая область. При этом нарушается линейная связь между нагрузкой, напряжениями и деформациями.

Эта стадия работы элемента называется упругопластической. В сечении элемента еще сохраняется упругое ядро, обеспечивающее несущую способность (прочность) в данный период;





*Развитие пластических деформаций в балке  
и эпюры напряжений в сечении 1-1:  
а – упругая работа; б – упругопластическая работа;  
в – образование пластического шарнира*

- полное «вырождение» упругой части. Дальнейшее увеличение нагрузки доводит до предела текучести все волокна наиболее нагруженного сечения 1-1. Пластичность полностью пронизывает сечение. Эпюра напряжений представляет собой два разнозначных прямоугольника, а деформации стремятся к бесконечности. Поскольку теоретически деформации в этом случае могут расти без ограничений, то это соответствует работе шарнира. Такое состояние называют шарниром пластичности. Момент в данном случае равен

$$M_{пл} = R_y \cdot \gamma_c \cdot W_{пл}$$

$S_{в.х}$  и  $S_{н.х}$  – статические моменты верхнего и нижнего полусечений относительно нейтральной оси. В симметричном сечении  $W_{пл} = 2S_x$ .

Очевидно, что пластический момент сопротивления больше, чем момент сопротивления, соответствующий упругой стадии работы:

$W_{пл} > W_x$ .

В месте пластического шарнира происходит большое нарастание деформаций, балка получает угол перелома, перегибается, но не разрушается. При этом эксплуатационные качества конструкция полностью утрачивает.

Совместное действие нормальных и касательных напряжений ускоряет развитие пластичности, если касательные напряжения малы, то текучесть начинается с крайних фибр сечения (обычно при больших пролетах балок и небольшой нагрузке).

При больших значениях поперечной силы текучесть может раньше наступить у нейтральной оси сечения

$$\tau = \tau_y = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} = 0,58 \cdot \sigma_y$$

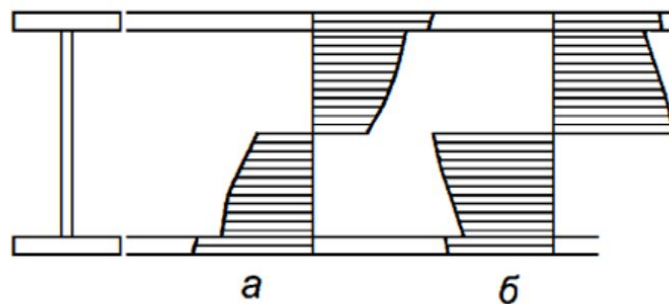


Рис. 6.16. Эпюры приведенных напряжений в изгибаемом элементе при развитии пластических деформаций: а – при  $\sigma > \tau \cdot \sqrt{3}$ ; б – при  $\sigma < \tau \cdot \sqrt{3}$

Заметных прогибов в последнем случае нет. Разрушение может произойти внезапно.

Напряженное состояние при сжатии элемента малой длины принято называть смятием. Сечение элемента длиной (высотой) не более  $a < 1,5t$ , согласно СП [2], следует проверять на смятие:

$$\frac{N}{A_p \cdot R_p \cdot \gamma_c} \leq 1, \quad (6.25)$$

где  $A_p$  – площадь смятия торцевой поверхности;

$R_p = R_u$  – расчетное сопротивление смятию торцевой поверхности.

Примеры работающих на смятие коротких элементов – нижняя часть фланца опорного узла фермы (рис. 6.11, а), а также нижняя выступающая часть опорного ребра балки (рис. 6.11, б). Высоту выступающей части опорного ребра балки или опорного фланца фермы принимают равной  $a \leq 1,5t$ , что обычно не превышает 15–20 мм.

При конструировании элементов, работающих на смятие, следует предусмотреть *плотную подгонку* соприкасаемых поверхностей путем строгания или фрезерования торцов. Плотная подгонка необходима для того, чтобы усилие передавалось всей площадью смятия. Поэтому торцы нижних частей фланца опорного узла фермы и опорного ребра балки строгают или фрезеруют (рис. 6.11).

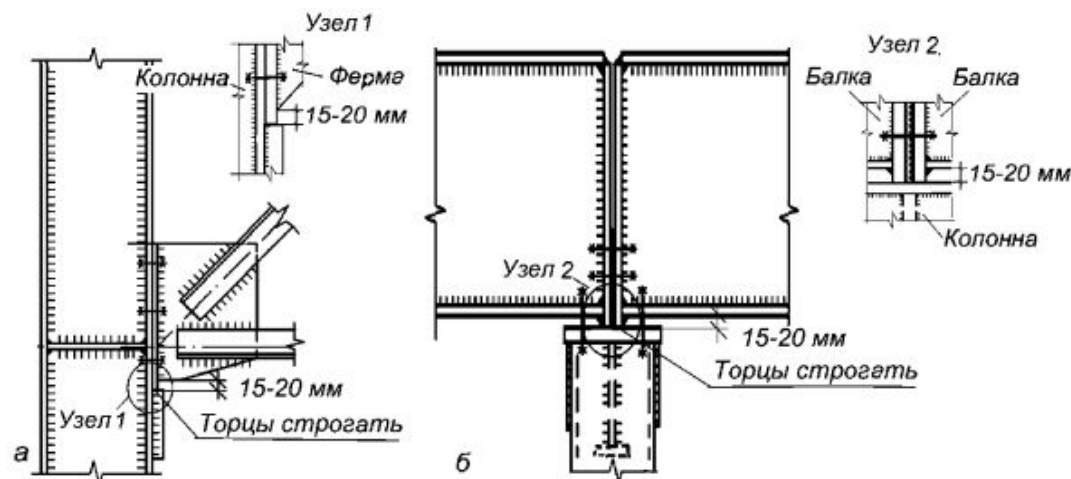


Рис. 6.11. Опорные узлы: а – фермы; б – балки

## Расчетные проверки прочности изгибаемых элементов

Вид работы	От действия момента	От действия поперечной силы	Совместное действие момента и поперечной силы
Упругая работа	$\frac{M}{W_n \cdot R_y \cdot \gamma_c} \leq 1$	$\frac{Q \cdot S_{\text{отс. части}}}{I \cdot t \cdot R_s \cdot \gamma_c} \leq 1$	$\frac{1}{R_y \cdot \gamma_c} \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2} \leq 1$
Ограниченная пластическая деформация	$\frac{M}{c_x \cdot \beta \cdot W_{x \text{ min}} \cdot R_y \cdot \gamma_c} \leq 1$	$\frac{Q}{h_{\text{ст}} \cdot t_{\text{ст}} \cdot R_y \gamma_c} \leq 1$	$\frac{0,87}{R_y \cdot \gamma_c} \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2} \leq 1$

Предельное состояние изгибаемой конструкции может наступить при затруднении или нарушении нормальной ее эксплуатации (вторая группа предельных состояний). В изгибаемых элементах в процессе нагружения могут появиться прогибы, затрудняющие нормальную эксплуатацию:

$$\sum_{i=1}^m (f_{i\Delta} \cdot \psi_i) \cdot \gamma_n \leq f_u$$

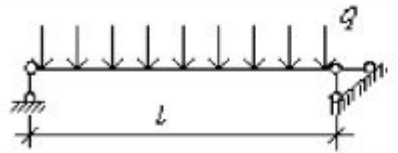
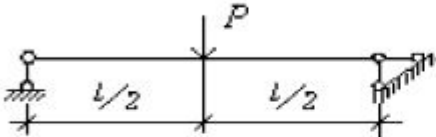
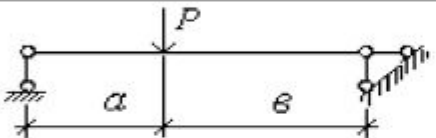
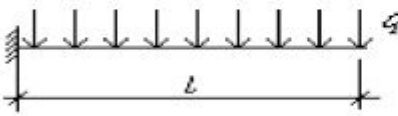

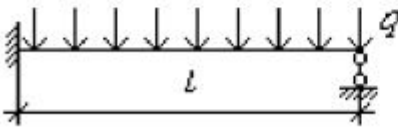
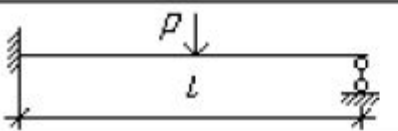
Прогибы балок от действия нормативных нагрузок определяют по формулам сопротивления материалов. Величина прогибов зависит от вида нагрузки, пролета балки, момента инерции сечения. Формулы для определения максимальных прогибов в балках приведены в табл.

Предельно допустимые значения прогибов, получены исходя из следующих требований:

- Конструктивных — обеспечение целостности примыкающих элементов, размещение перегородок и т.п.;
- Технологических — обеспечение нормальной эксплуатации технологического и подъемно-транспортного оборудования;
- Физиологических и эстетико-психологических — обеспечение благоприятных впечатлений от внешнего вида конструкций, предотвращение вредных воздействий и ощущения опасности и дискомфорта.

Расчет по второму предельному состоянию производят от нормативных нагрузок ( $\gamma_n=1$ ), при которых развитие пластических деформаций в сечении не происходит. Поэтому при проверке жесткости развитие пластичности не учитывают.

## Прогибы балок от действия нормативных нагрузок

Расчетная схема	Прогиб балки
	$f = \frac{5}{384} \cdot \frac{q_n \cdot l^4}{E \cdot I}$
	$f = \frac{P_n \cdot l^3}{48E \cdot I}$
	$f = \frac{P_n \cdot b \cdot \sqrt{(l^2 - b^2)^3} \cdot \sqrt{3}}{27E \cdot I \cdot l}$
	$f = \frac{q_n \cdot l^4}{8E \cdot I}$
	$f = \frac{P_n \cdot l^3}{3E \cdot I}$
	$f_{\max} = \frac{q_n \cdot l^4}{185 \cdot E \cdot I}$
	$f_{\max} = \frac{P_n \cdot l^3}{107 \cdot E \cdot I}$