Занимательная математика

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА.

УРОК НА ТЕМУ: ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ.

$$log_a f(x) = log_a g(x)$$

Логарифм.

Рассмотрим, как решать различные уравнения, в которых есть логарифмы.

Логарифмическим уравнением, называется уравнение вида:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

Не забываем про все требования, выдвигаемые в определение логарифма, **про основание логарифма и число, стоящее под знаком логарифма.**

Опираясь на теорему из параграфа 18 учебника, сформулируем основный принцип при решении логарифмических уравнений.

Теорема. Если f(x)>0 и g(x)>0, то логарифмическое уравнение

равносиль $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ (где $a > 0, a \neq 1$)

Логарифм.

И так как же решать логарифмические уравнения?

1. От логарифмического уравнения $log_a f(x) = log_a g(x)$ перейти к уравнению f(x)=g(x).

2. Решить уравнения f(x)=g(x).

3. Проверить каждый корень уравнения f(x)=g(x) на условие f(x)>0 и g(x)>0.

4. Если корень уравнения удовлетворяет каждому из f(x)>0 и g(x)>0, то это и есть решение исходного уравнения. Если хоть одно из условий f(x)>0 и g(x)>0 не выполняется, то этот корень не будет являться решением исходного уравнения.

Логарифм.

Пример. Решить уравнение

$$log_3(x^2 - 2x - 7) = log_3(x + 3)$$

Решение.

Избавимся от знака логарифма

$$x^2 - 2x - 9 = x + 1$$

Решим уравнение

$$x^2 - 3x - 10 = 0 \qquad (x - 5)(x + 2) = 0$$

$$x_1 = 5 \text{ и } x_2 = -2$$

Проверим полученные корни

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x - 9 > 0 \\ g(x) = x + 1 > 0 \end{cases}$$

Проверим первый корень:

$$\begin{cases} f(5) = 5^2 - 2 \cdot 5 - 9 = 6 > 0 \\ g(5) = 5 + 1 = 6 > 0 \end{cases}$$

-$x_1 = 5$ение исходного уравнения.

Проверим второй корень:

$$\begin{cases} f(-2) = (-2)^2 - 2 \cdot (-2) - 9 = -5 < 0 \\ g(-2) = -2 + 1 = -1 < 0 \end{cases}$$

Второй корень не является решением исходного уравнения, вообще проверку можно было прекратить, когда подсчитали f(-2).

Ответ: x=5.

Логарифм.

Пример. Решить уравнение

$$log_4(x+3) + log_4(x+1) = log_4(6x+6)$$

Решение.

Сумма логарифмов равно логарифму произведения:

$$log_4(x+3) + log_4(x+1) = log_4(x+3)(x+1) = log_4(x^2+4x+3)$$

Перепишем исходное уравнение $log_4(x^2+4x+3) = log_4(6x+6)$

Наше уравнение равносильно уравнению:

$$x^2+4x+3 = 6x+6$$
$$x^2-2x-3=0$$
$$(x-3)(x+1)=0$$
$$x_1 = 3 \text{ и } x_2 = -1$$

Проверим наши корни $\begin{cases} x+3>0 \\ x+1>0 \\ 6x+6>0 \end{cases}$

Первый корень x=3, удовлетворяет каждому неравенству выше.

Второй корень x = -1, не удовлетворяет второму и третьему неравенству.(x = -1 посторонний корень)

Ответ: x=3.

Пример:

Решение

$\log_2(x+1)+\log_2(x+2)=1$

ОДЗ: $\begin{cases} x+1>0 \\ x+2>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>-1 \\ x>-2 \end{cases}$

$x>-1$

$\log_2(x+1)(x+2)=1$

$(x+1)(x+2)=2^1$

$x^2+3x=0$

$x(x+3)=0$

$x_1=0 \qquad x_2=-3$ (не уд. ОДЗ)

Ответ: $x=0$

Логарифм.

Пример. Решить уравнение

$$lg^2x - lgx + 1 = \frac{9}{lg10x}$$

Решение. Уравнение имеет смысл, если x > 0. Сначала рассмотрим правую часть уравнения:

$$\frac{9}{\lg 10x} = \frac{9}{\lg 10 + \lg x} = \frac{9}{1 + \lg x}$$

Исходное уравнение примет вид:

$$lg^2x - lgx + 1 = \frac{9}{1 + lgx}$$

Давайте введем новые переменные: Пусть y = lg(x)

$$y^2 - y + 1 = \frac{9}{1 + y}$$

Обратим внимание y≠-1 так как знаменатель правой части уравнения, обращается в нуль при таком значении y.

$$(1 + y)(y^2 - y + 1) = 9 \qquad y^3 + 1 = 9 \qquad y^3 = 8 \qquad y = 2$$

Введем обратную замену, тогда: lg(x) = 2 => x = 100 >0.

Ответ: x=100.

Пример:

Уравнение, сводящееся к квадратныму

Решение

$\lg^2 x - 3\lg x + 2 = 0$ **ОДЗ:** $x > 0$

пусть $\lg x = t$, $t \in R$

$t^2 - 3t + 2 = 0$

$t_1 = 1$ $t_2 = 2$

если $t_1 = 1$, то если $t_2 = 2$, то

$\lg x = 1$ $\lg x = 2$

$x = 10$ $x = 100$

Ответ: $x_1 = 10$, $x_2 = 100$

Пример:

<u>Решение</u>

$\log_x(9x^2)\log^2{}_3x = 4$ **<u>ОДЗ:</u>** $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

$(\log_x 9+\log_x x^2)\log^2{}_3x = 4$

$(2\log_x 3+2)\log^2{}_3x = 4$

$(2/\log_3 x+2)\log^2{}_3x = 4$

пусть $\log_3 x = t$ $(2/t+2)t^2 = 4$

$2t^2+2t-4 = 0$

$t_1 = 1;$ $t_2 = -2$

если $t_1 = 1$, то

$tog_3x = 1;$ $x_1 = 3;$

если $t_2 = -2$, то

$\log_3 x = -2.$ $x_2 = 1/9.$

<u>Ответ:</u> $x_1 = 3, x_2 = 1/9$

Логарифм.

Запишите основные способы решения логарифмических уравнений:

1. Графический метод. Представляем обе части уравнения в виде функций и строим их графики, находим точки пересечений графиков.

2. Принцип равенства чисел стоящих под знаком логарифма. Принцип основан на том, что два логарифма с одинаковыми основаниями равны, тогда и только тогда когда равны числа стоящие под знаком логарифма.

$$log_a f(x) = log_a g(x) \iff f(x) = g(x)$$

3. Метод замены переменных. Данный метод стоит применять, когда уравнение при замене переменных упрощает свой вид, и его становится гораздо легче решить.

4. Метод логарифмирования. Данный метод используется в случаях, когда вид уравнения значительно упрощается при логарифмировании обоих его частей. Подробнее этот метод рассмотрим в следующем примере.

Логарифм.

Пример. Решить уравнение

$$x^{1+log_3 x} = 9$$

Решение.

Обе части нашего уравнения принимают только положительные значения, тогда мы можем подсчитать логарифмы от каждой части. Возьмем логарифм по основанию 3.

$$log_3(x^{1+log_3 x}) = log_3 9$$

Вспомним важное свойство логарифма: $log_a b^r = r \cdot log_a b$

Тогда:

$$log_3(x^{1+log_3 x}) = (1 + log_3 x)(log_3 x)$$

$$log_3 9 = log_3 3^2 = 2log_3 3 = 2$$

Введем новую переменную: $y = log_3 x$

$$(1+y)y = 2 \quad y^2 + y - 2 = 0 \quad (y+2)(y-1) = 0 \quad y_1 = -2 \text{ и } y_2 = 1$$

Введем обратную замену:

$$log_3 x = -2 \text{ и } log_3 x = 1$$

$$x = (3)^{-2} = \frac{1}{9} \text{ и } x = 3^1 = 3$$

Ответ: x_1=3 и x_2=1/9.

Спасибо за внимание

Дерзайте