РАСПРЕДЕ-ЛЕНИЯ МАКСВЕЛЛА И БОЛЬЦМАНА II

Домашнее задание

2.80. При какой температуре T воздуха средние скорости молекул азота (N_2) и кислорода (O_2) отличаются на 30,0 м/с?

$$\sqrt{\frac{8kT}{\pi m_N}}-\sqrt{\frac{8kT}{\pi m_O}}=\Delta v\Rightarrow T=\frac{\Delta v^2}{\left(\sqrt{\frac{8k}{\pi m_N}}-\sqrt{\frac{8k}{\pi m_O}}\right)^2}=$$

$$=\frac{\pi\Delta v^2}{8k}\frac{m_N m_O}{\left(\sqrt{m_O}-\sqrt{m_N}\right)^2}$$

Домашнее задание

2.84. Моль азота (N_2) находится в равновесном состоянии при $T=300$ К. Чему равна:

а) сумма x-вых компонент скоростей всех молекул $\sum v_x$,

б) сумма скоростей всех молекул $\sum \mathbf{v}$,

в) сумма квадратов скоростей всех молекул $\sum \mathbf{v}^2$,

г) сумма модулей скоростей всех молекул $\sum v$?

$$\sum v_x = 0, \qquad \sum \mathbf{v} = 0,$$

$$\sum v^2 = N_A \left\langle v^2 \right\rangle = N_A \frac{3kT}{m} = \frac{3RT}{m},$$

$$\sum v = N_A \left\langle v \right\rangle = N_A \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}},$$

Домашнее задание

2.87. Определить, исходя из классических представлений, среднеквадратичную угловую скорость $\sqrt{\langle\omega^2\rangle}$ вращения молекул азота (N_2) при $T=300$ К. Расстояние между ядрами молекулы $l=3{,}7\cdot10^{-10}$ м.

$$I = ml^2 - 2m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{2},$$

$$\left\langle \frac{I\omega^2}{2} \right\rangle = i_{вр}\frac{kT}{2} = kT$$

$$\left\langle \omega^2 \right\rangle = \frac{2kT}{I} = \frac{4kT}{ml^2} = \frac{8kT}{m_N l^2} = \frac{8RT}{M_N l^2}$$

Проверочная работа

С помощью распределения Максвелла

$$F(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} \right)$$

определить $\left\langle v^n \right\rangle$, n>-1

$$F(v)dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 \exp(-u^2) du,$$

$$\left\langle v^n \right\rangle = \frac{4 v_в^n}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} u^{2+n} \exp(-u^2) du$$

$$I_n = \int_0^{+\infty} u^{2+n} \exp(-u^2) du = -\frac{u^{2+n}}{2} \exp(-u^2) \Big|_0^{+\infty} +$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} da = u \exp(-u^2) du, & a = -\dfrac{\exp(-u^2)}{2} \\ b = u^{n+1}, & db = (n+1) u^n du \end{array}}$$

$$+\frac{n+1}{2} \int_0^{+\infty} u^n \exp(-u^2) du = \frac{n+1}{2} I_{n-2}$$

$$I_{2k} = \frac{2k+1}{2} I_{2(k-1)} = \frac{(2k+1)!!}{2^k} I_0$$

$$\boxed{\frac{4}{\sqrt{\pi}} I_0 = 1}$$

$$\left\langle v^{2k} \right\rangle = \frac{4 v_в^{2k}}{\sqrt{\pi}} I_{2k} = v^{2k} \frac{(2k+1)!!}{2^k} \frac{4}{\sqrt{\pi}} I_0 = v^{2k} \frac{(2k+1)!!}{2^k}$$

$$\boxed{v_в = \sqrt{\frac{2kT}{m}}}$$

$$\left\langle v^{0} \right\rangle = v_в^0 \frac{(0+1)!!}{2^0} = 1,$$

$$\left\langle v^{2} \right\rangle = v_в^2 \frac{(2+1)!!}{2} = \frac{3kT}{m},$$

$$\left\langle v^{4} \right\rangle = v_в^4 \frac{(4+1)!!}{2^2} = \frac{15}{4} \frac{4(kT)^2}{m^2} = \frac{15(kT)^2}{m^2}.$$

$$I_{2k} = \frac{2k+1}{2} I_{2(k-1)} = \frac{(2k+1)!!}{2^k} I_0$$

$$\left\langle v^{2k} \right\rangle = \frac{4v_{в}^{2k}}{\sqrt{\pi}} I_{2k} = v^{2k} \frac{(2k+1)!!}{2^k} \frac{4}{\sqrt{\pi}} I_0 = v^{2k} \frac{(2k+1)!!}{2^k}$$

$$\left\langle v^{0} \right\rangle = v_{в}^{0} \frac{(0+1)!!}{2^0} = 1,$$

$$\boxed{v_{в} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}}$$

$$\left\langle v^{2} \right\rangle = v_{в}^{2} \frac{(2+1)!!}{2} = \frac{3kT}{m},$$

$$\left\langle v^{4} \right\rangle = v_{в}^{4} \frac{(4+1)!!}{2^2} = \frac{15}{4} \frac{4(kT)^2}{m^2} = \frac{15(kT)^2}{m^2}.$$

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2} I_{2k-1} = k!\,I_{-1} = k!\int_0^{+\infty} u\exp(-u^2)\,du = \frac{k!}{2}$$

$$\left\langle v^{2k+1} \right\rangle = \frac{4v_в^{2k+1}}{\sqrt{\pi}} \frac{k!}{2} = 2v_в^{2k+1} \frac{k!}{\sqrt{\pi}}$$

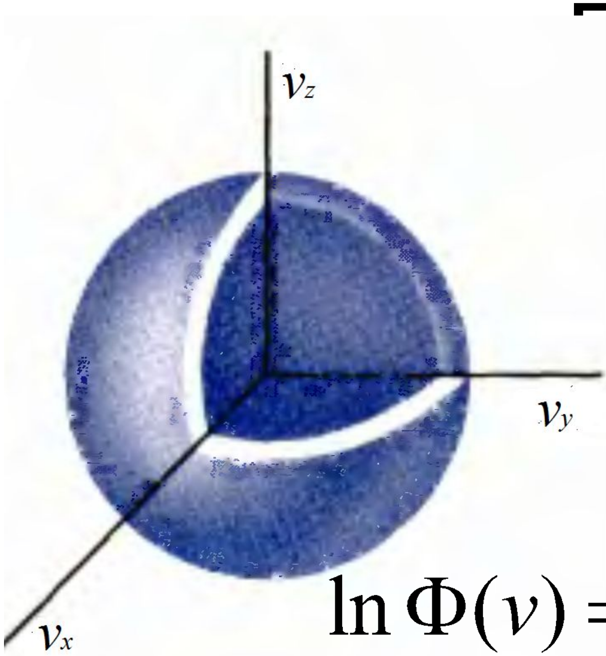
$$v_в = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

$$\left\langle v^1 \right\rangle = 2v_в \frac{0!}{\sqrt{\pi}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}},$$

$$\left\langle v^3 \right\rangle = v_в^3 \frac{1!}{\sqrt{\pi}} = \frac{6}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{3/2},$$

$$\left\langle v^5 \right\rangle = v_в^5 \frac{2!}{\sqrt{\pi}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{5/2}.$$

Следствия изотропности пространства



$$f(\mathbf{v}) = \varphi_x(v_x)\varphi_y(v_y)\varphi_z(v_z)$$

$$f(\mathbf{v}) = \Phi(v) = \varphi(v_x)\varphi(v_y)\varphi(v_z)$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$\ln\Phi(v) = \ln\varphi(v_x) + \ln\varphi(v_y) + \ln\varphi(v_z) \quad \Big| \frac{\partial}{\partial v_x}$$

$$\frac{\Phi'(v)}{\Phi(v)}\frac{\partial v}{\partial v_x} \equiv \frac{\Phi'(v)}{\Phi(v)}\frac{v_x}{v} = \frac{\varphi'(v_x)}{\varphi(v_x)}$$

Распределение по одной проекции

$$\frac{\varphi'(v_x)}{\varphi(v_x)}\frac{1}{v_x}=\frac{\Phi'(v)}{\Phi(v)}\frac{1}{v}=-\alpha$$

$$\frac{\varphi'(v_x)}{\varphi(v_x)}=-\alpha v_x \Rightarrow \varphi(v)=A\exp\left(-\alpha v^2\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} A\exp\left(-\alpha v^2\right)dx=1\\[2ex]\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{mv^2}{2}A\exp\left(-\alpha v^2\right)dx=\frac{kT}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}A=\sqrt{\dfrac{m}{2\pi kT}}\\[2ex]\alpha=\dfrac{m}{2kT}\end{array}\right.$$

Распределение Максвелла

$$f(\mathbf{v}) = \Phi(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right)\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{mv_y^2}{2kT}\right)\times\exp\left(-\frac{mv_z^2}{2kT}\right) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

$$F(v) = 4\pi v^2\Phi(v) = 4\pi v^2\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

О нормировке и размерностях

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(v)dv = 1, \quad [\varphi(v)] = \left[\frac{1}{v}\right].$$

$$\int f(\mathbf{v})d\mathbf{v} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{v})dv_x dv_y dv_z = 1,$$

$$[f(\mathbf{v})] = [\Phi(v)] = \left[\frac{1}{v^3}\right].$$

$$\int_{0}^{+\infty} F(v)dv = 1, \quad [F(v)] = \left[\frac{1}{v}\right].$$

Характерные скорости

$$v_в : \quad F'(v_в) = 0 \Rightarrow v_в = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

$$\langle v \rangle = \int_0^{+\infty} vF(v)dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

$$v_{кв} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\int_0^{+\infty} v^2 F(v)dv} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

Безразмерный вид

$$F(v)dv = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv =$$

$$\boxed{\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} = \frac{1}{v_в \sqrt{\pi}}, \qquad u = v\sqrt{\frac{m}{2kT}} = \frac{v}{v_в}}$$

$$= \frac{4\pi v^2}{\pi^{3/2} v_в^3} \exp\left(-\frac{v^2}{v_в^2}\right) dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 \exp(-u^2) du,$$

$$\varphi(v)dv = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-u^2\right) du$$

2.85. Найти среднее значение модуля x-вой компоненты скорости молекул газа, находящегося в равновесном состоянии при температуре T. Масса молекулы равна m.

2.85. Найти среднее значение модуля x-вой компоненты скорости молекул газа, находящегося в равновесном состоянии при температуре T. Масса молекулы равна m.

$$\varphi(v)=\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

$$v_в=\sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

$$\varphi(v)dv=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-u^2\right)du$$

$$\left\langle\left|v_x\right|\right\rangle=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|v\right|\varphi(v)dv=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{2kT}{m}}\int\limits_{0}^{+\infty}u\exp(-u^2)du$$

$$=2\sqrt{\frac{2kT}{\pi m}}\left[-\frac{\exp(-u^2)}{2}\right]_0^{+\infty}=\sqrt{\frac{2kT}{\pi m}}$$

6.106. Найти $\langle 1/v \rangle$ – среднее значение обратной скорости молекул идеального газа при температуре T, если масса каждой молекулы равна m. Сравнить полученную величину с обратной величиной средней скорости.

6.106. Найти $\langle 1/v \rangle$ – среднее значение обратной скорости молекул идеального газа при температуре T, если масса каждой молекулы равна m. Сравнить полученную величину с обратной величиной средней скорости.

$$F(v)dv = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} \right) dv =$$

$$= \frac{4v^2 dv}{\sqrt{\pi} v_в^3} \exp\left(-\frac{v^2}{v_в^2} \right) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 \exp(-u^2) du,$$

$$u = v\sqrt{\frac{m}{2kT}} = \frac{v}{v_в}$$

$$\left\langle \frac{1}{v} \right\rangle = \int_0^{+\infty} \frac{F(v)}{v} dv = \frac{1}{v_в} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} u \exp(-u^2) du =$$

$$\frac{1}{v_в}\frac{4}{\sqrt{\pi}}\left[-\frac{\exp(-u^2)}{2}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{v_в}\frac{2}{\sqrt{\pi}}=\sqrt{\frac{2m}{\pi kT}}$$

$$\langle v\rangle=\int_0^{+\infty}vF(v)dv=\frac{4v_в}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}u^3\exp(-u^2)du=$$

$$\frac{4v_в}{\sqrt{\pi}}\frac{2}{2}\int_0^{+\infty}u\exp(-u^2)du=\frac{4v_в}{\sqrt{\pi}}\frac{2}{2}\frac{1}{2}=\frac{2v_в}{\sqrt{\pi}}=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

$$\left\langle\frac{1}{v}\right\rangle\langle v\rangle=\sqrt{\frac{2m}{\pi kT}}\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}=\frac{4}{\pi}$$

Другие представления

$$F_\varepsilon(\varepsilon)d\varepsilon = F(v)dv \Rightarrow F_\varepsilon(\varepsilon)d\varepsilon = F(v)\left.\frac{dv}{d\varepsilon}\right|_{v=\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}}$$

$$F_\varepsilon(\varepsilon) = 4\pi v^2\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)\left.\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon m}}\right|_{v=\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}} =$$

$$= \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon}}{\left(\pi kT\right)^{3/2}}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right)$$

$$F_p(p) = F(v)\left.\frac{dv}{dp}\right|_{v=\frac{p}{m}} = \frac{4\pi p^2}{\left(2\pi mkT\right)^{3/2}}\exp\left(-\frac{p^2}{2mkT}\right)$$

6.109. Газ состоит из молекул массы m и находится при температуре T. Найти с помощью функции $F(v)$:

а) функцию распределения молекул по кинетическим энергиям $f(K)$; изобразить примерный график $f(K)$;

б) наиболее вероятную кинетическую энергию $K_{вер}$; соответствует ли $K_{вер}$ наиболее вероятной скорости?

6.109. Газ состоит из молекул массы m и находится при температуре T. Найти с помощью функции $F(v)$:

а) функцию распределения молекул по кинетическим энергиям $f(K)$; изобразить примерный график $f(K)$;

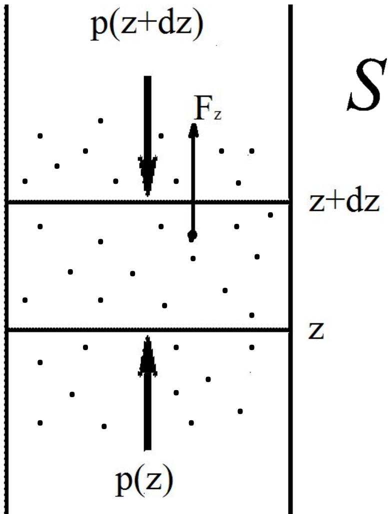
б) наиболее вероятную кинетическую энергию $K_{вер}$; соответствует ли $K_{вер}$ наиболее вероятной скорости?

$$F_\varepsilon(\varepsilon) = \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon}}{(\pi kT)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right)$$

$$\left(\varepsilon \exp\left(-\frac{2\varepsilon}{kT}\right)\right)'_\varepsilon = \exp\left(-\frac{2\varepsilon}{kT}\right) - \frac{2\varepsilon}{kT}\exp\left(-\frac{2\varepsilon}{kT}\right) = 0 \Rightarrow \varepsilon_в = \frac{kT}{2}$$

$$v_в = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \Rightarrow \frac{mv_в^2}{2} = \frac{m}{2}\frac{2kT}{m} = kT$$

Распределение Больцмана



$$S\left(p\big|_{z+dz} - p\big|_{z}\right) = dN\,F_z = nSdz\,F_z \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial z} = nF_z$$

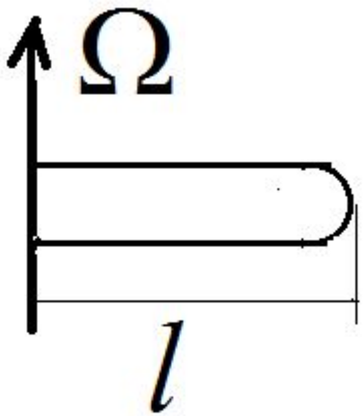
$$\left.\begin{aligned} \nabla p &= n\mathbf{F} = -n\nabla U \\ p &= nkT \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad kT\nabla n = -n\nabla U \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\nabla n}{n} = -\frac{\nabla U}{kT} \Rightarrow \quad \nabla \ln n = -\frac{\nabla U}{kT} \quad \Rightarrow n = n_0 \exp\left(-\frac{U}{kt}\right).$$

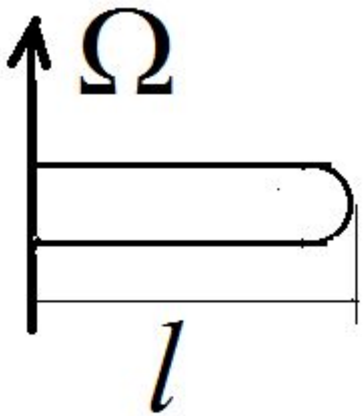
$$p = p_0 \exp\left(-\frac{U}{kt}\right).$$

$$U = mgh \;\Rightarrow p = p_0\big|_{h=0} \exp\left(-\frac{mgh}{kt}\right)$$

2.99. Закрытая с одного конца труба длины $l=1{,}00$ м вращается вокруг перпендикулярной к ней вертикальной оси, проходящей через открытый конец трубы, с угловой скоростью $\omega=62{,}8$ рад/с. Давление окружающего воздуха $p_0=1{,}00\cdot10^5$ Па, температура $t=20$ °С. Найти давление p воздуха в трубе вблизи закрытого конца.



2.99. Закрытая с одного конца труба длины $l=1{,}00$ м вращается вокруг перпендикулярной к ней вертикальной оси, проходящей через открытый конец трубы, с угловой скоростью $\omega=62{,}8$ рад/с. Давление окружающего воздуха $p_0=1{,}00\cdot10^5$ Па, температура $t=20$ °С. Найти давление p воздуха в трубе вблизи закрытого конца.

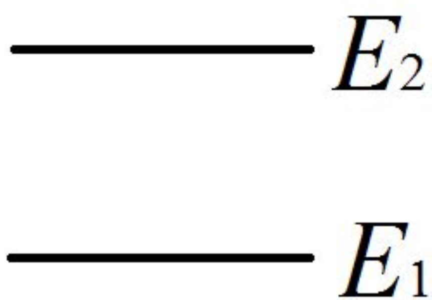


$$m\mathbf{a}=m\omega^2\mathbf{r}=\mathbf{F}_{ц},\ \ \mathbf{F}_{ц}=-\nabla U,$$

$$U=\frac{m\omega^2r^2}{2}$$

$$p=p_0\exp\left(-\frac{U}{kT}\right)=p_0\exp\left(-\frac{m(\omega r)^2}{kT}\right)$$

2.100. Имеется N частиц, энергия которых может принимать лишь два значения E_1 и E_2. Частицы находятся в равновесном состоянии при температуре T. Чему равна суммарная энергия E всех частиц в этом состоянии?



$$N(E) = N_0 \exp\left(-E / kT\right),$$

$$N_1 = N_0 \exp\left(-E_1 / kT\right), \qquad N_2 = N_0 \exp\left(-E_2 / kT\right),$$

$$N_1 + N_2 \equiv N_0 \exp\left(-E_1 / kT\right) + N_0 \exp\left(-E_2 / kT\right) = N,$$

$$N_0 = \frac{N}{\exp\left(-E_1 / kT\right) + \exp\left(-E_2 / kT\right)},$$

$$N_1 = \frac{N \exp\left(-E_1 / kT\right)}{\exp\left(-E_1 / kT\right) + \exp\left(-E_2 / kT\right)},$$

$$N_2 = \frac{N \exp\left(-E_2 / kT\right)}{\exp\left(-E_1 / kT\right) + \exp\left(-E_2 / kT\right)}$$

6.121. Газ находится в очень высоком цилиндрическом сосуде при температуре T. Считая поле тяжести однородным, найти среднее значение потенциальной энергии молекул газа. Как зависит эта величина от того, состоит ли газ из одного сорта молекул или из нескольких сортов?

6.121. Газ находится в очень высоком цилиндрическом сосуде при температуре T. Считая поле тяжести однородным, найти среднее значение потенциальной энергии молекул газа. Как зависит эта величина от того, состоит ли газ из одного сорта молекул или из нескольких сортов?

$$\alpha = \frac{mg}{kT}$$

$$U = mgh \Rightarrow \langle U \rangle = \frac{\int\limits_0^{+\infty} mgh \exp(-\alpha h)\, dh}{\int\limits_0^{+\infty} \exp(-\alpha h) dh} =$$

$$= mg \frac{\frac{1}{\alpha}\left(-h \exp(-\alpha h)\Big|_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} \exp(-\alpha h)\, dh \right)}{\int\limits_0^{+\infty} \exp(-\alpha h) dh} = \frac{mg}{\alpha} = kT$$