ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ СОВМЕСТНЫХ И НЕСОВМЕСТНЫХ СОБЫТИЙ.

ТЕОРЕМЫ УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НЕЗАВИСИМЫХ СОБЫТИЙ

ЦЕЛИ УРОКА

Образовательные:

- изучить теоремы сложения и умножения вероятностей;
- научить в процессе реальной ситуации определять термины теории вероятностей;
- научить решать реальные жизненные задачи.

Воспитательные:

- развивать развивать у учащихся коммуникативные компетенции (культуру общения, умение работать в группах, элементы ораторского искусства);
- способствовать развитию творческой деятельности учащихся, потребности к самообразованию.

Развивающие:

- способствовать развитию общения как метода научного познания, аналитического мышления, смысловой памяти, внимания; умения работать с дополнительной литературой;
- развитию навыков исследовательской деятельности.

РАЗМИНКА

- № 1

В партии из 18 деталей находятся четыре бракованных. Наугад выбирают пять деталей. Найти вероятность того, что из этих пяти деталей две окажутся бракованными.

- №2.

Номер машины состоит из 3 букв и 4 цифр. Сколько всего существует разных номеров, если алфавит содержит 32 буквы?

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

- Всякий **результат (исход) опыта** – …..
- **Случайное событие -……**
- **Достоверное событие** – **…..**
- **Невозможное событие** – **……**
- **Несовместные события** – **….**
- **Совместные события** – **…….**
- **Противоположные события** – **…..**

ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ НЕСОВМЕСТНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Вероятность появления одного из двух ***несовместных*** событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Следствия из теоремы сложения вероятностей для несовместных событий

1. Для двух несовместных событий: $P(A + B) = P(A) + P(B)$, то есть вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

2. Для нескольких несовместных событий
$P(A1 + A2 + \ldots + An) = P(A1) + P(A2) + P(An)$.
Первые два следствия повторяют *аксиому сложения вероятностей*.

3. Для полной группы несовместных событий
$P(A1 + A2 + \ldots + An) = P(A1) + P(A2) + P(An) = 1$.

4)Сумма вероятностей ***противоположных*** событий равна 1

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

ЗАДАЧА 1

В лотерее участвуют 100 билетов, из которых на 5 билетов падает выигрыш 20 рублей, на 10 билетов – 15 руб., на 15 билетов – 10 руб., на 25 билетов – 2 рубля.

Найти вероятность того, что на купленный билет будет получен выигрыш не менее 10 рублей.

Решение.

Пусть A,B,C – события, состоящие в том, что на купленный билет падает выигрыш, равный соответственно 20,15 и 10 руб.

Т.к. события A,B и C несовместны, то

$$P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C) = \frac{5}{100} + \frac{10}{100} + \frac{15}{100} = 0,3$$

Ответ: 0,3.

ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ СОВМЕСТНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Вероятность появления хотя бы одного из двух ***совместных*** событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

ЗАДАЧА 2

Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 3, либо 5, либо тому и другому одновременно.

Решение

Пусть A — событие, состоящее в том, что наудачу взятое число кратно 3, а B — в том, что оно кратно 5. Найдем $P(A+B)$. Так как A и B — совместные события, то воспользуемся формулой (16.14): $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

Всего имеется 90 двузначных чисел: 10, 11, ..., 98, 99. Из них 30 являются кратными 3 (благоприятствуют наступлению события A); 18 — кратными 5 (благоприятствуют наступлению события B) и 6 — кратными одновременно 3 и 5 (благоприятствуют наступлению события AB). Таким образом, $P(A)=30/90=1/3$, $P(B)=18/90=1/5$, $P(AB)=6/90=1/15$, т. е. $P(A+B)=1/3+1/5-1/15=7/15=0{,}467$.

ЗАДАЧА 3

В коробке 250 лампочек, из них
100 по 100 Вт, 50 – по 60 Вт, 50 - по 25 Вт,
50 - по 15 Вт.
Вычислить вероятность того, что мощность
любой взятой наугад лампочки
не превысит 60 Вт.

РЕШЕНИЕ

Пусть А – событие, состоящее в том, что мощность лампочки равна 60 Вт, В – 25 Вт, С – 15 Вт, D – 100 Вт. События А,В,С,D образуют полную систему, т.к.все они несовместны и одно из них обязательно наступит в данном испытании (выборе лампочки), т.е.

$$P(A)+P(B)+P(C)+P(D) = 1.$$

События «мощность лампочки не более 60 Вт» и

«мощность лампочки более 60 Вт» – противоположные.

По свойству противоположных событий

$$P(A)+P(B)+P(C) = 1- P(D),$$

$$P(A+B+C) = 1- \frac{100}{250} = \frac{150}{250} = \frac{3}{5}$$

Ответ: 0,6

ЗАДАЧА 4

В коробке лежат 30 галстуков, причем 12 из них красные, остальные белые. Определить вероятность того, что из 4 наудачу вынутых галстуков все они окажутся одного цвета.

Решение

- Пусть А – событие, состоящее в том, что все 4 галстука будут красные,
- В – все 4 галстука будут белыми

4 галстука из 30 можно выбрать

4 галстука из 30 можно выбрать

$$C_{30}^{4}=\frac{30!}{4!26!}=\frac{27\cdot 28\cdot 29\cdot 30}{2\cdot 3\cdot 4}=27405$$ способами

4 галстука из 12 красных можно выбрать

$$C_{12}^{4}=\frac{12!}{4!8!}=\frac{9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{2\cdot 3\cdot 4}=495$$ способами, аналогично

4 белых - $C_{18}^{4}=\frac{18!}{4!14!}=\frac{15\cdot 16\cdot 17\cdot 18}{2\cdot 3\cdot 4}=3060$ способами.

Вероятность того, что все 4 галстука будут красные, равна

$$P=P(A)+P(B)=\frac{495}{27405}+\frac{3060}{27405}=\frac{79}{609}=0{,}13$$

Ответ: 0,13

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

- 4. Производят три выстрела по одной мишени. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,5. Найти вероятность того, что в результате этих выстрелов произойдет только одно попадание.
- 5. У продавца имеется 10 оранжевых,8 синих, 5 зеленых и 15 желтых шаров. Найти вероятность того, что купленный шар окажется оранжевым, синим или зеленым.
- 6. В денежно-вещевой лотерее на каждые 10000 билетов разыгрывается 150 вещевых и 100 денежных выигрышей. Найти вероятность выигрыша денежного или вещевого на один лотерейный билет.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

- 7. Вероятность того, что новая кофемолка прослужит больше года, равна 0,91. Вероятность того, что она прослужит больше двух лет, равна 0,78.

  Найти вероятность того, что кофемолка прослужит меньше двух лет, но больше года.

ОТВЕТЫ

- 4. 0,375
- 5. $\frac{23}{38}$
- 6. 0,025
- 7. 0,13

ЗАВИСИМЫЕ И НЕЗАВИСИМЫЕ СОБЫТИЯ

- **Условной вероятностью** события *A* называется его вероятность при условии, что другое событие *B* произошло.
- *Обозначение*: $P\ (A/B)$.
- Условные вероятности обладают всеми свойствами обычных (безусловных) вероятностей, в частности, $0 <= P(A/B) <= 1$.

Пример . В урне 4 белых и 3 красных шара. Производится извлечение шаров без возвращения. Найти: а) вероятность извлечения белого шара; б) вероятность извлечения белого шара при условии, что до того был извлечен красный шар; в) вероятность извлечения белого шара при условии, что до того был извлечен белый шар.

Решение. Используем классическое определение вероятности события и условной вероятности события.

а) P(Б) = 4/7 = 0,57;

б) P(Б/К) = 4/6 = 0,67;

в) P(Б/Б) = 3/6 = 0,5.

ЗАВИСИМОСТЬ И НЕЗАВИСИМОСТЬ ДВУХ СОБЫТИЙ

- События A и B *независимы,* если $p(A/B) = p(A)$, то есть если условная вероятность равна безусловной, и *зависимы*, если $p(A/B) \neq p(A)$.
- *Смысл независимости* двух событий: вероятность появления одного события не меняется от того, произошло или не произошло другое событие. Поэтому независимые события являются исходами независимых испытаний, то есть испытаний, никак не связанных между собой, поскольку исход одного испытания не влияет на исход другого.
- *Смысл зависимости* двух событий: вероятность появления одного события меняется от того, произошло или не произошло другое событие.

ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ НЕЗАВИСИМЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.

Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению их вероятностей:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Следствия из теоремы умножения вероятностей для независимых событий

- 1. Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей:

$P(AB) = P(A) * P(B)$.

Это утверждение обобщается на несколько независимых событий, в частности

$P(ABC) = P(A) * P(B) * P(C)$.

- 2. Если событие A зависит от события B, то и событие B зависит от события A, то есть вероятностная зависимость является взаимной.

СЛЕДСТВИЯ ИЗ ТЕОРЕМЫ УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛЯ НЕЗАВИСИМЫХ СОБЫТИЙ

- 3. Если событие A не зависит от события B, то и B не зависит от A.

- 4. Если события A и B независимы, то независимы и противоположные события A и B , то есть если $P(AB) = P(A) * P(B)$,

то $P(\bar{A} * \bar{B}) = P(\bar{A}) * P(\overline{B})$

ВЕРОЯТНОСТЬ НАСТУПЛЕНИЯ ХОТЯ БЫ ОДНОГО ИЗ НЕСКОЛЬКИХ НЕЗАВИСИМЫХ СОБЫТИЙ

- ***Теорема.*** Вероятность появления хотя бы одного из двух независимых событий равна 1 минус вероятность произведения противоположных событий,

т.е. $p(A+B) = 1- p(\bar{A})*p(\bar{B})$.

Задача 1

В первой урне находятся
6 черных и 4 белых шара,
во второй – 5 черных и 7 белых.
Из каждой урны извлекают
по одному шару.
Какова вероятность того,
что оба шара окажутся
белыми?

РЕШЕНИЕ

Пусть A_1 – из первой урны извлечен белый шар;

A_2 – из второй урны извлечен белый шар.

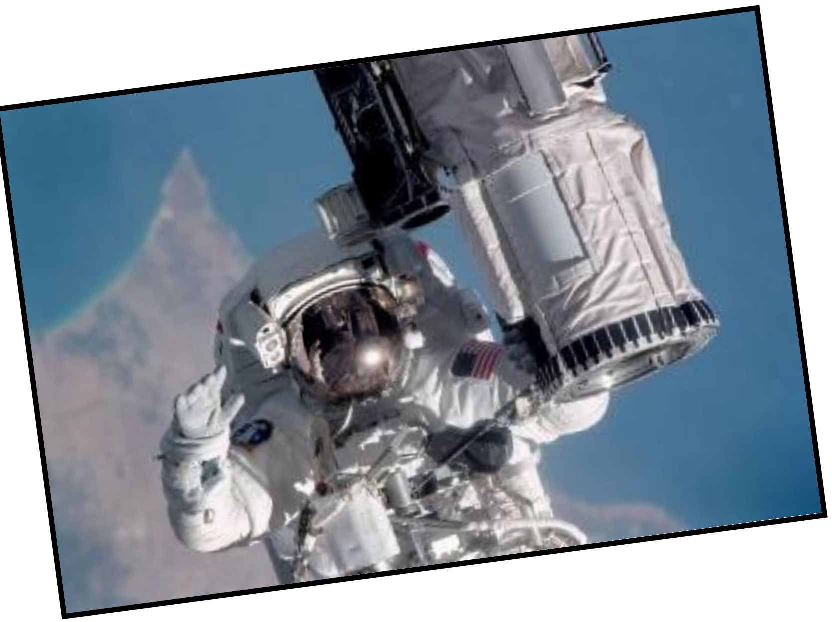
События A_1 и A_2 независимы.

$$P(A_1)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5};P(A_2)=\frac{7}{12};$$

$$P(A_1\cdot A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2)=\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{12}=\frac{7}{30}$$

Ответ: $\frac{7}{30}$

Задача 2



Прибор состоит из двух элементов, работающих независимо.
Вероятность выхода из строя первого элемента равна 0,2;
Вероятность выхода из строя второго элемента равна 0,3.
Найти вероятность того, что:
а) оба элемента выйдут из строя;
б) оба элемента будут работать.

Решение

Пусть событие A – выход из строя первого элемента,
событие E – выход из строя второго элемента.
Эти события независимы (по условию).

а) одновременно появление A и E есть событие AE

$P(AE) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$

б) если работает первый элемент, то имеет место событие $\bar{A}$ (противоположное событию A – выходу этого элемента из строя);

Если работает второй элемент – событие $\bar{E}$, противоположное событию E

$P(\bar{A}) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$ и $P(\bar{E}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

Тогда событие, состоящее в том, что будут работать оба элемента, есть $\bar{A}\bar{E}$.

$P(\bar{A}\bar{E}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{E}) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}56.$

***Ответ:* 0,56.**

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

- 4.В следующих испытаниях найдите вероятности «успеха» и «неудачи»:

а) Бросают пару различных монет. «Неудача» – выпадение двух орлов.

б) Бросают игральный кубик. «Успех» – выпадение числа,

кратного трем.

в) Бросают пару различных кубиков. «Неудача» – выпадение двух четных чисел.

г) Из 36 игральных карт берут 5. «Успех» – среди них нет дамы пик.

- 5. В экзаменационные билеты включено по 2 теоретических вопроса и по 1 задаче. Всего составлено 28 билетов. Вычислить вероятность того, что, вынув наудачу билет, студент ответит на все вопросы, если он подготовил 50 теоретических вопросов и 22 задачи.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

- 6. Вероятность того, что изготовленная на первом станке деталь будет первосортной, равна 0,7. При изготовлении такой же детали на втором станке эта вероятность равна 0,8. На первом станке изготовлены две детали, на втором три. Найти вероятность того, что все детали первосортные.
- 7. Из колоды в 36 карт наудачу извлекается одна карта. События: A = {вынутая карта – туз},

B = {вынутая карта чёрной масти},

F = {вынутая карта – фигура, т.е. является валетом, дамой, королём или тузом}.

Установить, зависимы или независимы следующие три пары событий: A и B, A и F, F и B

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

- 1. В урне 2 белых и 10 черных шаров; во второй – 8 белых и 4 черных шара. Из каждой урны вынули по шару. Какова вероятность, что

  а) оба шара белые;

  б) один белый и один черный;

  в) оба черные.

- Три стрелка стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка 0,75; для второго – 0,8; для третьего – 0,9. Какова вероятность того, что

  а) все три попадут в цель;

  б) в цель попадет хотя бы один стрелок.