“Путешественнику на корабле кажется, что океан состоит из волн, а не из воды”

А. Эддингтон, 1929

Волны

I. Лекция 6. Упругие волны
II. Лекция 7. Электромагнитные волны

Лекция 6. Упругие волны

… в завершение лекции №5:

3.2. Понятие о резонансе в параллельном контуре

3.2.1. Идеализация

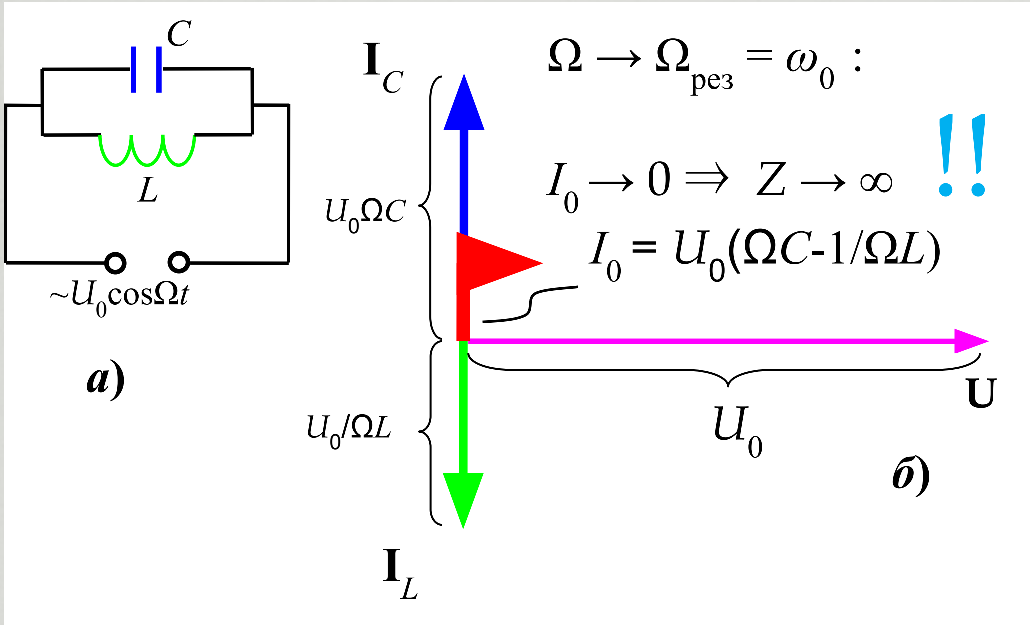
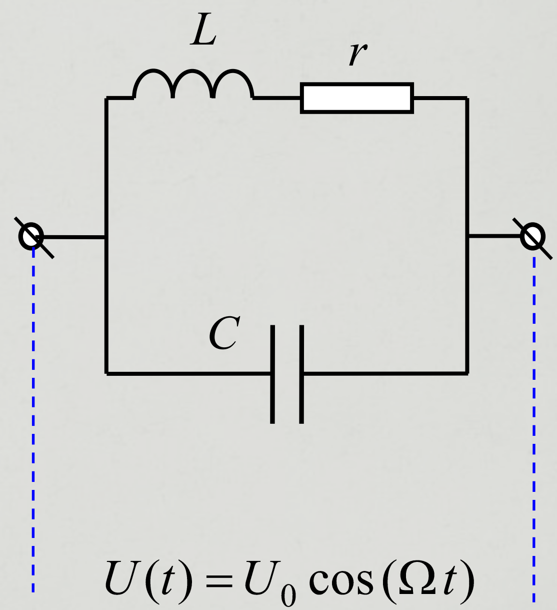


Рис. Параллельный контур: схема (*а*) и векторная диаграмма (*б*)

3.2.2. Реальность



$$U(t) = U_0 \cos(\Omega t)$$

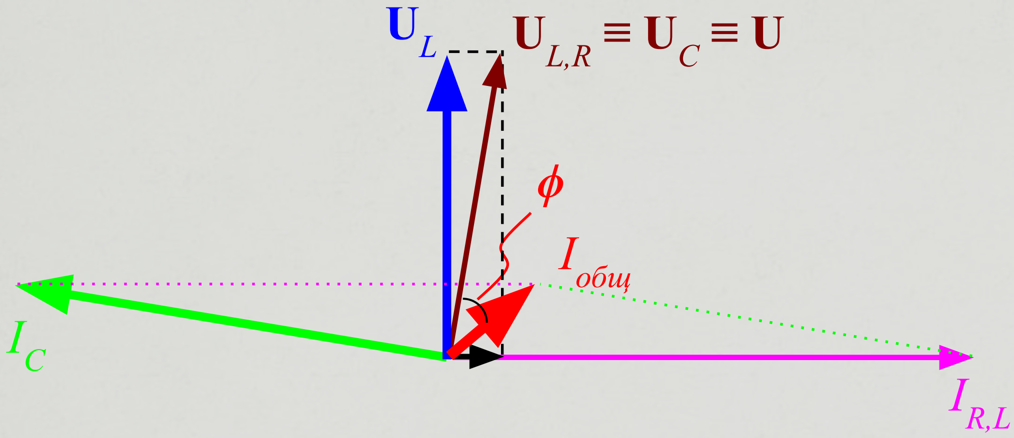
♣ ***Замечания***

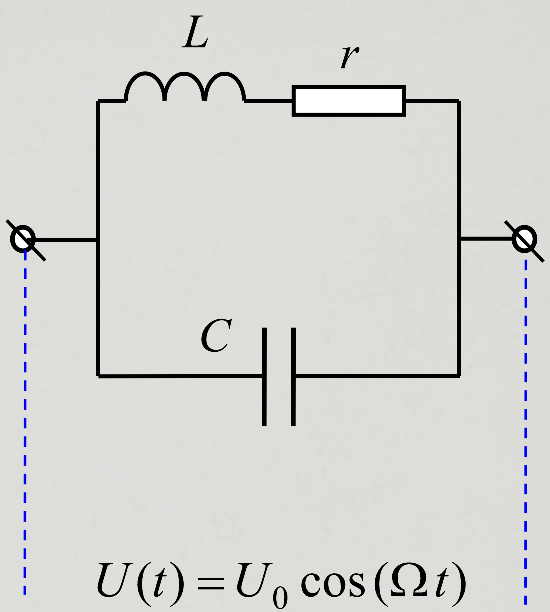
1) Селекторы теле-радиоприёмников → Селективность *~ Q*

2) резонансные фильтры, резонансные усилители, индукционные печи, …

3.2. Понятие о резонансе в параллельном контуре

3.2.2. Реальность





$$\Omega \to \Omega_{\text{рез}} \approx \omega_0 :$$

$$I_0 \to 0 \Rightarrow \; Z \to \infty \quad !!$$

Глава III. Волны

"Путешественнику на корабле кажется, что океан состоит из волн, а не из воды"

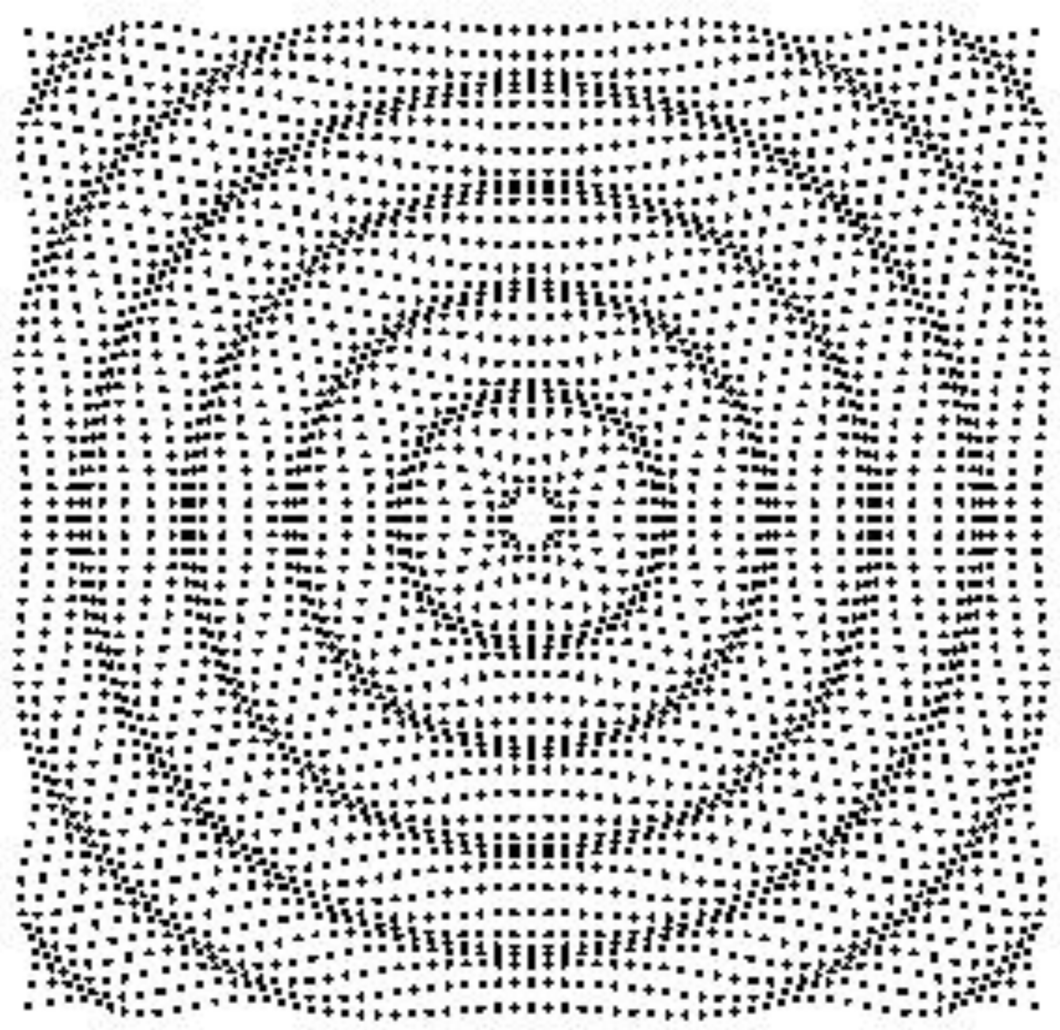
А. Эддингтон, 1929

• "Опр." ***Волна – процесс распространения колебаний в пространстве***

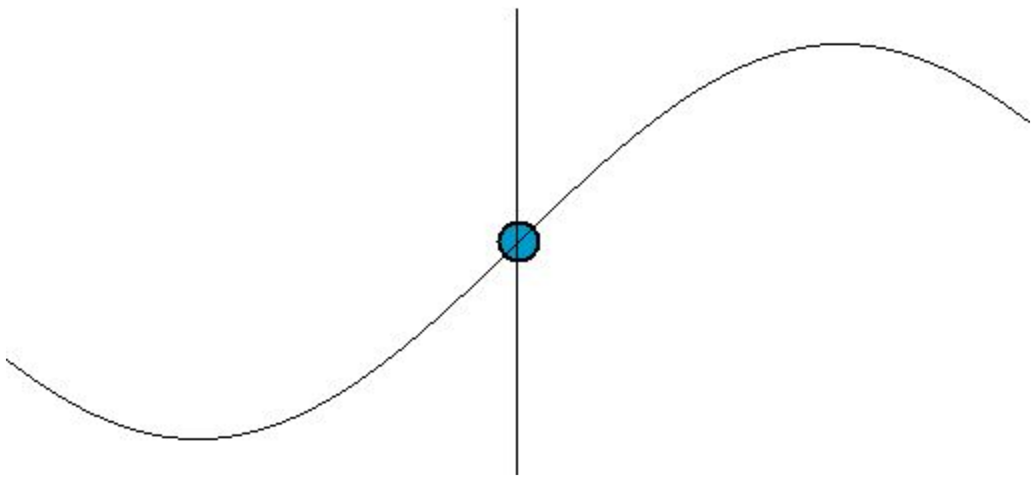
… ?


Волны

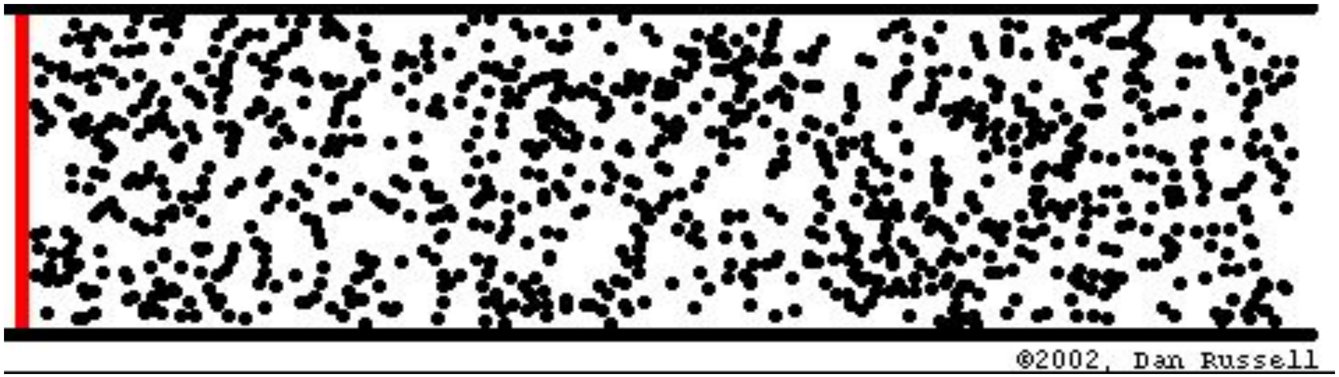
Волны



Волны



Волны



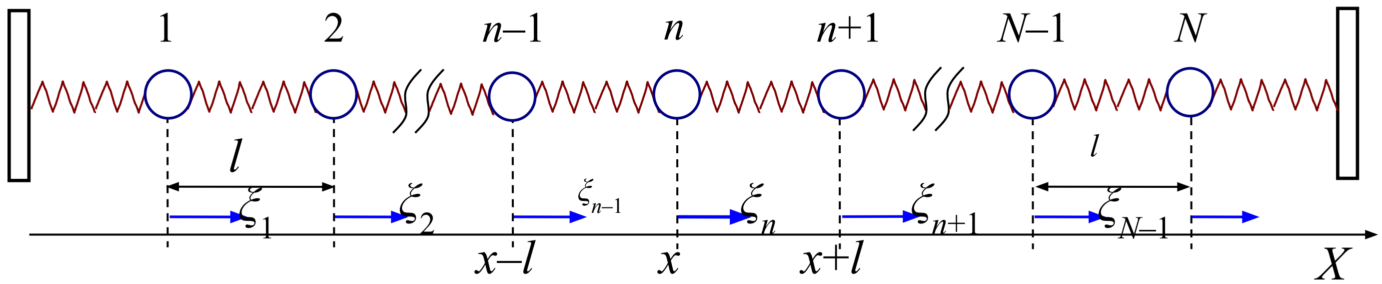
Волны

Волны

Волны

§ 1. *Упругие волны*

1.1. Дифференциальное волновое уравнение



Модель:

1) система состоит из длинной цепочки большого количества одинаковых связанных атомов массы *m (“химическая аналогия”)*;

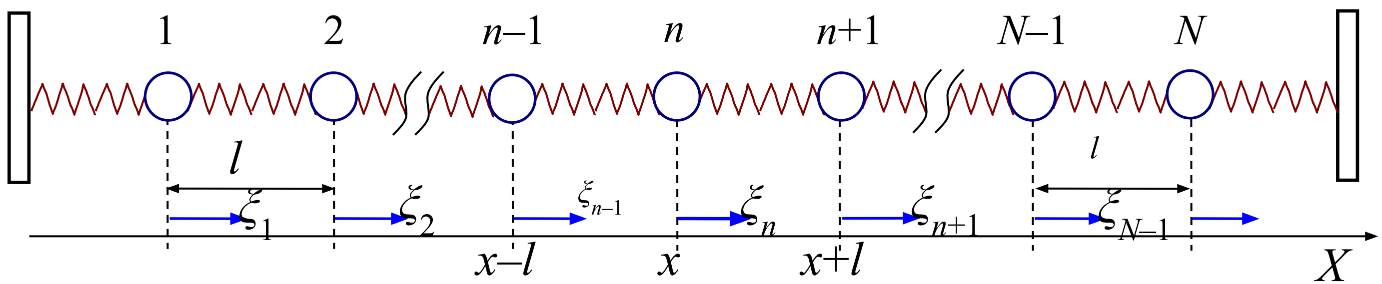
2) амплитуды колебаний малы, силы квазиупруги и моделируются пружинами жёсткости *k*;

3) система консервативна;

4) расстояние l между соседними осцилляторами очень мало;

5) соседние шарики-атомы движутся почти одинаково (исключаем из рассмотрения наиболее высокочастотные моды колебаний).

К выводу дифференциального волнового уравнения



$$m\ddot{\xi}_n = -\kappa(\xi_n - \xi_{n-1}) + \kappa(\xi_{n+1} - \xi_n)$$

$$\xi_n \to \xi(x,t)$$

$$\xi_{n+1} = \xi(x+l,t) \approx \xi(x,t) + \frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot l + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\cdot\frac{l^2}{2}$$

$$\xi_{n-1} = \xi(x-l,t) \approx \xi(x,t) - \frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot l + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\cdot\frac{l^2}{2}$$

$$m\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \kappa l^2 \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$$

Обозначим

$$\frac{\kappa l^2}{m} = v^2$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$$

Это одномерное
“Классическое Дифференциальное
Волновое Уравнение”

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = v^2\cdot\Delta\xi$$

“Трёхмерный” случай

$$\left(\text{"оператор Лапласа"}:\quad \Delta\xi = \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right)$$

♣ ***Замечания***

1) •“***Опр***.” ***Волна называется продольной, если колебания происходят вдоль направления распространения возмущений***

2) Для поперечной вместо $v^2 = \frac{\kappa l^2}{m}$ **:** $\kappa \rightarrow \frac{T}{l}$ $v^2 = \frac{Tl}{m}$

1.2. Уравнение волны

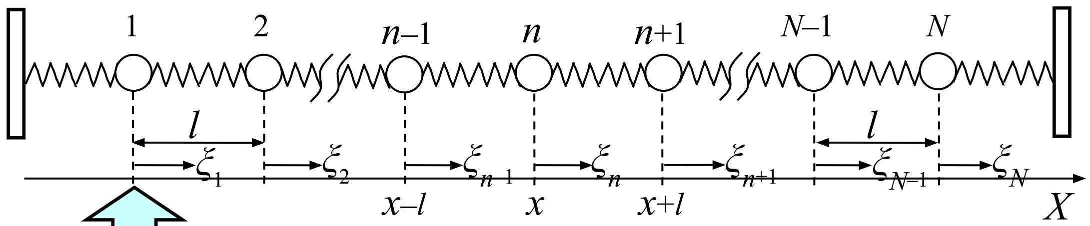
•“***Опр***.” ***Уравнением упругой волны называется соотношение, описывающее зависимость смещения колеблющихся частиц*** $\xi(x,t)$ ***от координат и времени в явной форме:***

$$\xi = \xi(x,t) \quad \text{или} \quad \xi = \xi(x,y,z,t)$$

Уравнение волны – вид решения ***волнового уравнения***

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

Уравнение волны (2)



$$\xi(0,t) = A\cos\omega t$$

запаздывание *на* $\tau = x/v$

$$\xi(x,t) = A\cos[\omega(t-\tau)]; \qquad \xi(x,t) = A\cos[\omega t - \omega\cdot x/v];$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T};$$

"Длина волны" : $\lambda = v\cdot T$

$$\frac{\omega\cdot x}{v} = \frac{2\pi\cdot x}{T\cdot v} = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot x$$

"Волновое число" : $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

$$\xi(x,t) = A\cos(\omega t - kx); \quad \text{или} \quad \xi(x,t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t - \frac{2\pi}{\lambda}\cdot x\right)$$

Уравнение волны (3)

•“**Опр**.” ***Уравнением гармонической бегущей волны называется функция координат и времени вида:***

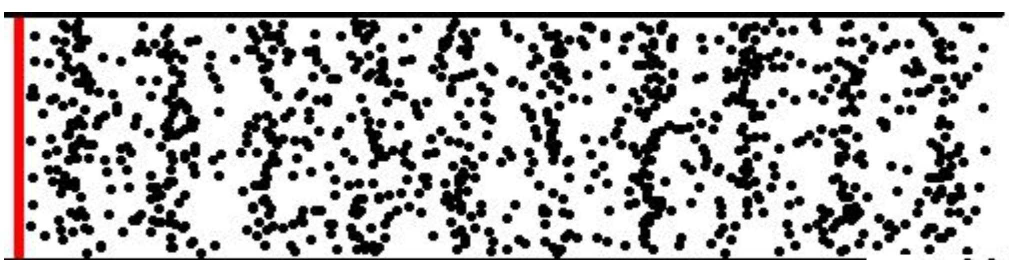
$$\xi(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$$

♣ ***Замечания***

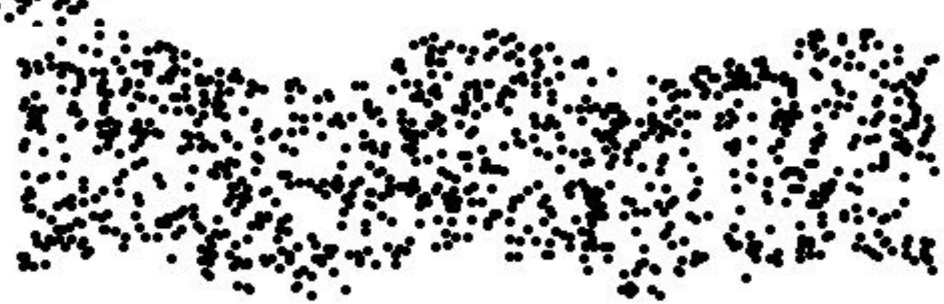
1) “**недиспергирующая**” **среда; … *любая*** $\xi(t - x/\upsilon)$;

2) ***гармоническая; “бегущая”; “плоская” (?); в среде без поглощения.***

Продольные волны



Поперечные волны



•"Опр." **Волновой поверхностью** называют такую поверхность, колебания во всех точках которой, происходят в одной и той же фазе

Волновая поверхность, служащая «передней» границей «возмущенной» области пространства, называется **волновым фронтом**

•"Опр." *Длиной волны называется расстояние, на которое фронт волны (или любая волновая поверхность) смещается за один период колебаний*

♣ Замечания

$$\xi(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$$

… 2) Эта волна …

а. гармоническая;

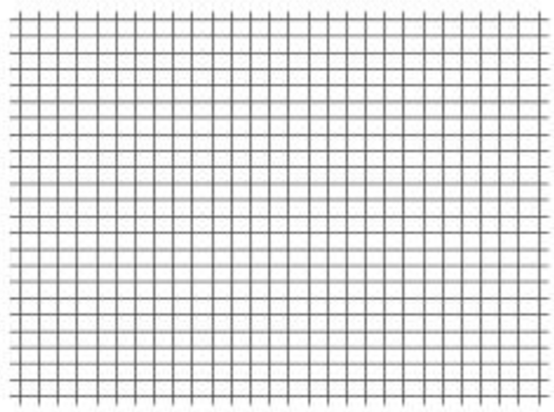
б. "бегущая" («+»);

в. в среде без поглощения;

г. "плоская".

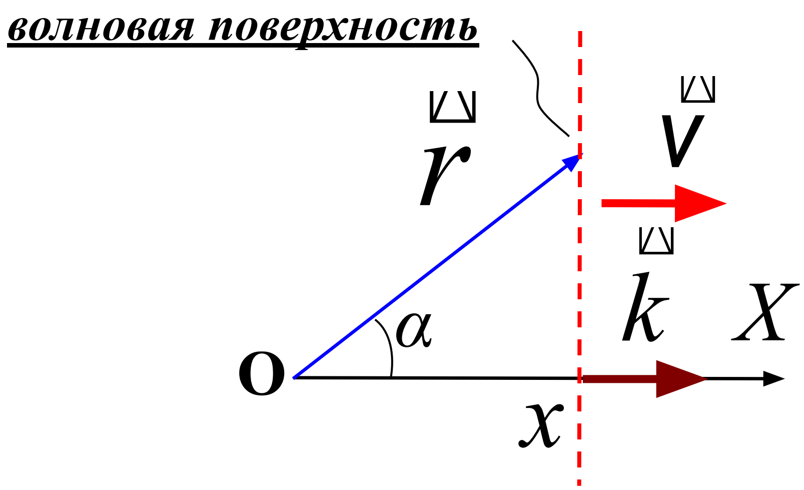
♣ … “*плоская*” … ?

Если фронт волны и волновые поверхности – плоскости, то волну называют ***плоской***



$$x << D \qquad (D - \textit{размер источника})$$

Плоская волна



$$kx = k \cdot r \cdot \cos\alpha = \vec{k} \cdot \vec{r}$$

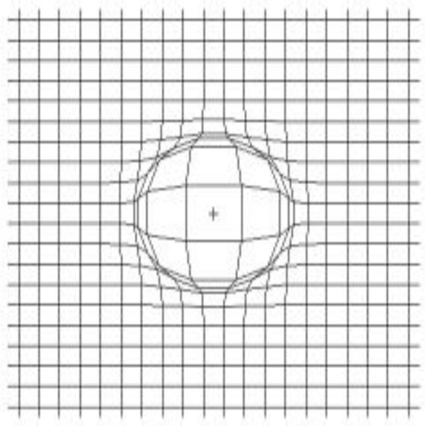
$$\xi(\vec{r}, t) = A\cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

Сферическая волна

Если волновые поверхности имеют сферическую форму, волну называют сферической

$$D << x, r$$

$$\xi(r,t) = \frac{A_0}{r}\cos(\omega t - kr)$$



♣ *Замечания*

1) ***нет поглощения средой, но энергия “разбегается”;***
2) **А если есть?**

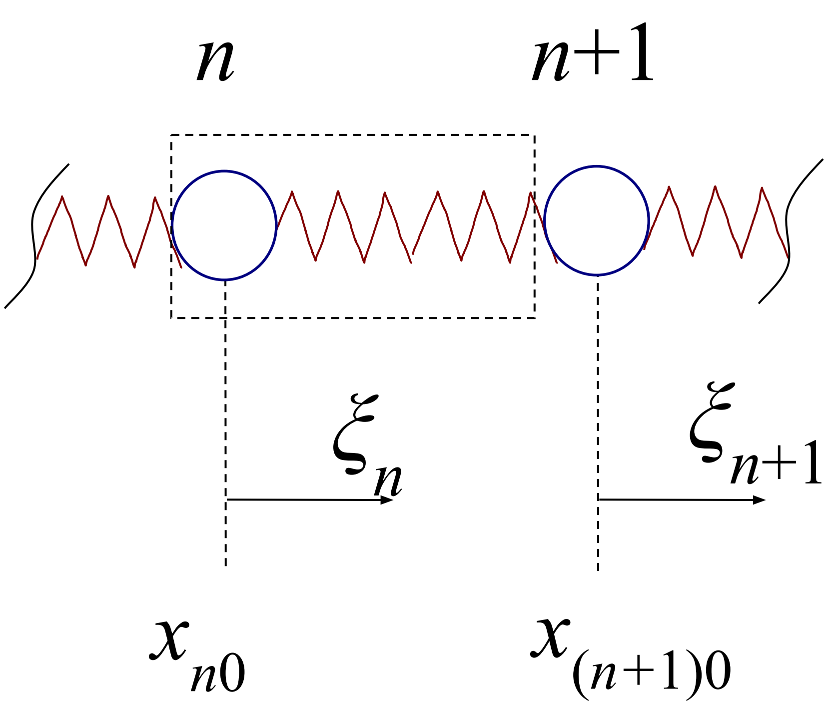
а. Плоская волна: $A(x) = A_0 e^{-\eta x}$

б.Сферическая волна: $A(r) = \frac{A_0}{r} \cdot e^{-\eta r}$

1.4. Энергия упругой волны

$$U=\frac{\kappa(\text{деформация})^2}{2}$$

$$\text{деформация}:\quad \xi(x+l,t)-\xi(x,t)\approx\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot l$$



$$U=\frac{\kappa}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}l\right)^2=\frac{\kappa l^2}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2;$$

$$v^2=\frac{\kappa l^2}{m};$$

$$U=\frac{mv^2}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2;$$

Энергия упругой волны (2)

$$T = \frac{m}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2; \qquad U = \frac{m\upsilon^2}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2; \qquad W = T + U;$$

$$W = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + \upsilon^2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2\right]$$

$$\frac{dW}{dV} = w \quad (\textit{плотность энергии})$$

$$w = \frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + \upsilon^2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2\right]$$

Энергия упругой волны (3)

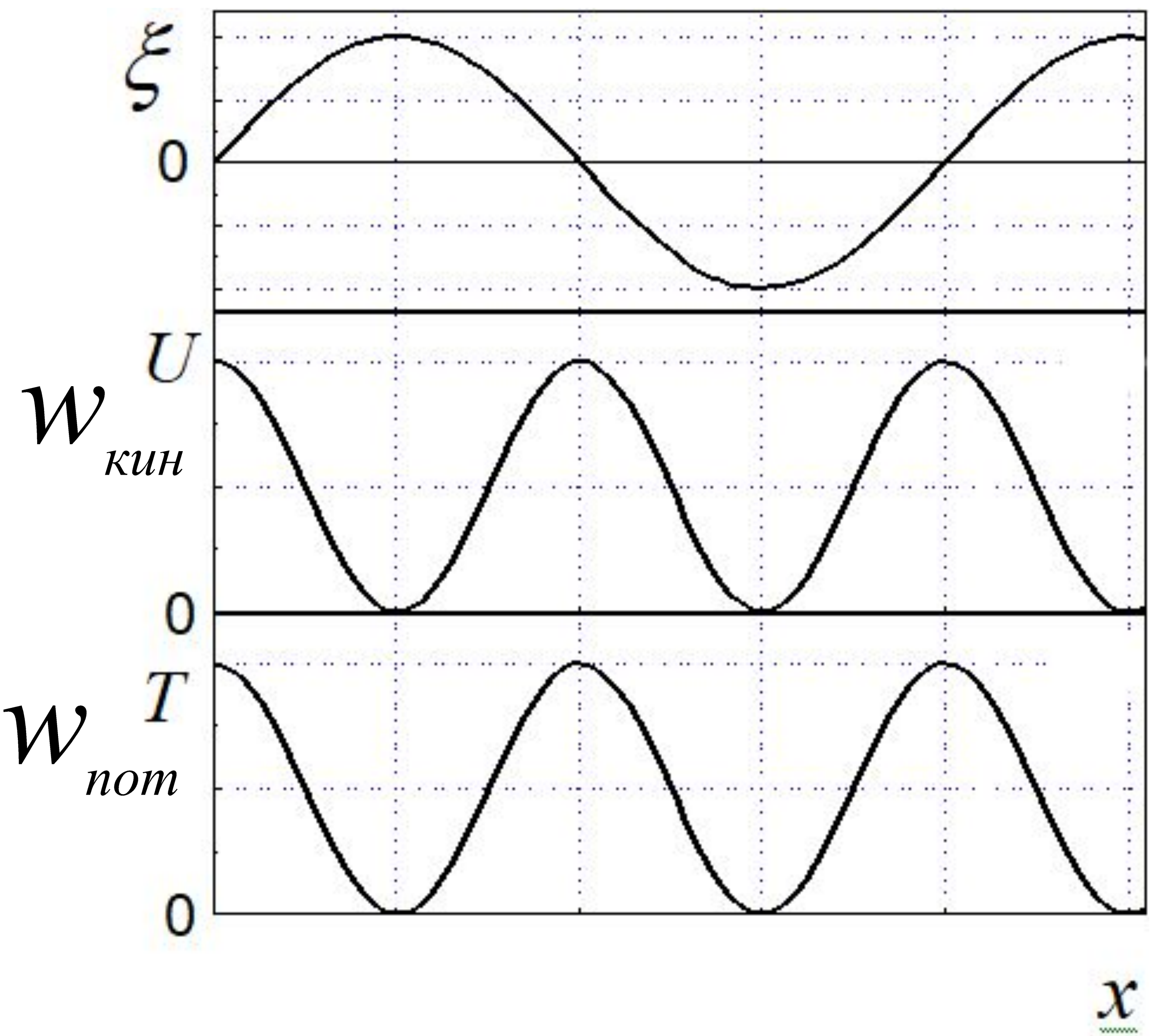
$$w_{\text{кин}} = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 = \frac{\rho}{2} A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx)$$

$$w_{\text{пот}} = \frac{\rho v^2}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 = \frac{\rho v^2}{2} A^2 k^2 \sin^2(\omega t - kx)$$

(с учётом $v = \omega / k$) $\quad w_{\text{пот}} = \dfrac{\rho}{2} A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx)$

$$w = w_{\text{кин}} + w_{\text{пот}}\,; \qquad w = \rho A^2 \omega^2 \cdot \sin^2(\omega t - kx)$$

Энергия упругой волны (4)



Характеристики переноса энергии упругой волны

$$w = w(x,t) \qquad\qquad S(t) = w(t)\cdot v$$

Плотность потока энергии – энергия, переносимая волной в единицу времени через «единичную площадку», перпендикулярную направлению распространения волны

Интенсивностью волны называется среднее по времени значение плотности потока её энергии

$$\langle w\rangle_t = \left\langle \rho A^2\omega^2 \cdot \sin^2(\omega t - kx)\right\rangle_t = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2$$

$$I = \langle S\rangle_t = \langle w\rangle_t \cdot v = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 v$$

Вектор Умова: $\vec{S} = w(t) \cdot \vec{v}$

«векторная интенсивность»:

$$\langle \vec{S} \rangle = \langle w \rangle \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \cdot \vec{v}$$

Поток энергии:

$$\Phi = \int_{\Sigma} \langle \vec{S} \rangle \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_{\Sigma} \langle S_n \rangle \mathrm{d}s$$