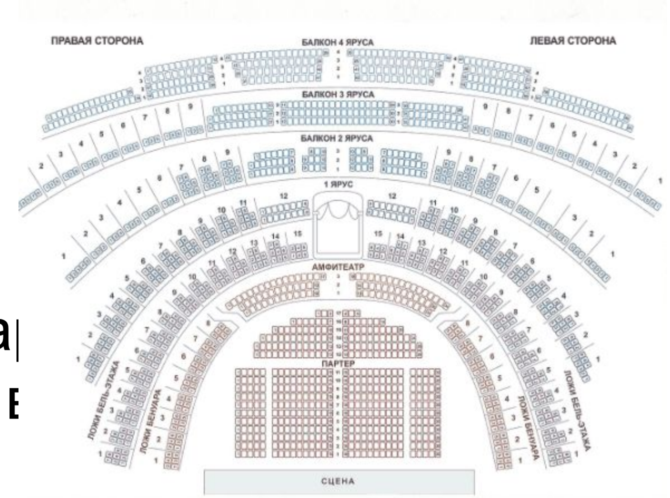
Принцип Дирихле

Составила Сафонова Е.В.,
Учитель 1798

Большой театр

Верите ли вы, что среди зрителей, сидящих в Большом театре во время спектакля, обязательно есть люди, родившиеся в один и тот же день одного и того же месяца?



- Зрительный **зал** Основной сцены Государ академического **Большого театра** России около 2 500 зрительских **места**.

Подсчитаем: в зале большого театра 2000 мест. И даже если не все они заполнены (что в этом знаменитом театре бывает нечасто), можно смело утверждать, что на спектакле собралось более 366 человек. Но 366 - это максимально возможное число дней в году, считая 29 февраля. Итак, для 367-го зрителя просто не остаётся свободной от дней рождений его соседей по залу даты в году.

Рассуждение имеет своё название в математике: принцип Дирихле
(в честь немецкого математика
Иоганна Петера Густава Лежёна Дирихле).

Иоганн Петер Густав Лежён Дирихле

Дирихле Петер Густав Лежен (1805-1859) – немецкий математик, иностранный член Петербургской Академии наук.
Дирихле – автор многих достижений в области математики, одна из его заслуг – принцип доказательства, названный его именем.

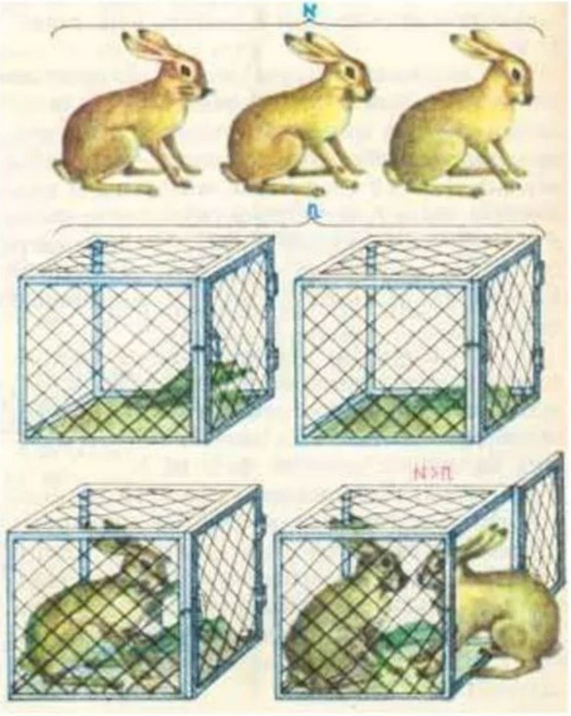
Принцип Дирихле

Если в n клетках сидит m зайцев,

причем m > n,

то хотя бы в одной клетке сидят,

по крайней мере, два зайца.



Задача 1.

Шесть школьников съели семь конфет. Докажите, что один из них съел не менее двух конфет.

Решение. Задача 1

«Клетки" школьники - **шесть**,

«Кролики" конфеты - **семь**.

Используя принцип Дирихле получим, что найдётся "клетка", где сидят не менее двух "кроликов". А это и означает, что найдётся школьник, который съел хотя бы две конфеты.

Задача 2

В клетках таблицы 3×3 расставлены числа: -1, 0 и 1

Рассмотрим **восемь** сумм:

суммы трёх чисел в каждой строке, в каждом столбце и по двум диагоналям.

Могут ли быть все эти суммы различны?

-1	**0**	**1**
0	**-1**	**0**
1	**1**	**-1**

Решение. Задача 2

«**Клетками»** будут все различные значения всех трех чисел, каждое из которых принимает значение 0, 1 или -1.

Этих значений будет семь: -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3

«**Кроликами»** будут **восемь** наборов из трёх чисел, расположенные в одном столбце, или в одной строке, или по одной из двух диагоналей таблицы.

Рассаживаем кроликов в клетки , где значение суммы равно сумме чисел этого "кролика"-набора. Тогда согласно принципу Дирихле найдётся "клетка", где сидят не менее двух кроликов. А это значит, что найдутся две рассматриваемые тройки чисел, для которых суммы равны.

Итак, все суммы различными быть не могут.

Задача 3.

В классе 15 учеников.

Найдется ли месяц, в котором отмечают свои дни рождения не меньше, чем два ученика этого класса ?

Решение. Задача 3

«Клетками" будут месяцы - 12,

а "кроликами" – ученики - 15.

Используя принцип Дирихле получим, что найдётся "клетка", где сидят не менее двух "кроликов". А это и означает, что найдётся месяц, в котором отмечают свои дни рождения хотя бы два ученика.

Задача 4

В лесу растет миллион елок. Известно, что на каждой из них не более 600000 иголок. Докажите, что в лесу найдутся две елки с одинаковым числом иголок.

Решение. Задача 4

Примем за "клетки" количество иголок. Всего "клеток" будет 600001 (0,1,2,...600000).

А за "кроликов" ёлки. Используя принцип Дирихле получим, что найдётся "клетка", где сидят не менее двух "кроликов". А это и означает, иголок.

Задача 5

Из любых трёх целых чисел можно выбрать два, сумма которых чётна. Докажите это.

Решение. Задача 5

За "клетки" примем чётность чисел, их две (чётные числа и нечётный).

За "кроликов" - числа.

Используя принцип Дирихле получим, что в какой-то из двух "клеток" будет по одинаковому числу "кроликов". Это означает, что найдутся два числа одинаковой чётности. А если имеется два

числа одинаковой чётности, то сумма этих чисел будет чётной.

Задача 6

Докажите, что в Вашем классе найдутся два человека, имеющие одинаковое число друзей среди своих одноклассников.

Решение. Задача 6

В нашем классе 30 человек.

«Кролики» - ученики,

«Клетки" количество друзей.

Друзей у каждого человека может быть 0,1,...,29 т.е. у нас получится 30 "клеток". Но "клетки» 29 и 0 одновременно существовать не могут т.к. если человек имеет 29 друзей, то каждый из его друзей будет иметь хотя бы одного друга, значит всего может быть 29 "клеток" (0,1,...,28 или 1,2,...,29).

Используя принцип Дирихле получим, что найдётся "клетка", где сидят не менее двух "кроликов". А это и означает, что найдутся два человека имеющие одинаковое число друзей.

Обобщенный принцип Дирихле

Задача 2.1

В классе учится 29 человек. Саша Иванов допустил в диктанте 13 ошибок, и никто другой не сделала большего числа ошибок.

Доказать, что по крайней мере трое учащихся сделали одинаковое число ошибок.

Решение. Задача 2.1

Примем за "клетки" всевозможные варианты количества ошибок.

Их 14, так как школьники могут сделать 0, 1, ..., 13 ошибок. А за "кроликов" примем школьников, которые писали диктант.

Их по условию 29 человек.

Каждого из них сажаем в клетку, которая соответствует количеству ошибок сделанных им.

Тогда получим, что найдётся "клетка", в которой сидят по меньшей мере три "кролика", а это и означает , что найдутся трое школьников, сделавших одинаковое число ошибок.

Задача 2.2

В пяти классах школы учатся 160 человек. Доказать, что найдутся 4 человека, у которых день рождения приходится на одну и туже

неделю.

Решение. Задача 2.2

В году может быть максимально 53 недели.

Их и примем за "клетки" а, за "кроликов" примем ребят. Рассаживаем "кроликов" по тем

"клеткам", которые соответствуют их дням рождения.

В силу принципа Дирихле найдётся "клетка" по меньшей мере с четырьмя "кроликами", а это и

означает, что найдётся неделя, когда день рождения сразу у четырёх человек.

3.Раскраска

Формула раскраски.

Если рассадить n кроликов в n-1 клеток, то найдётся по крайней мере одна свободная клетка.

Также может использоваться и другая формулировка: если число клеток больше числа кроликов, то как минимум одна клетка пуста.

Задача 3.1

Каждая грань куба раскрашена в чёрный или белый цвет.

Доказать, что найдутся одинаково раскрашенные грани, имеющие общее ребро.

Рассмотрим любую вершину куба.

В ней пересекаются три грани. Примем за "клетки" цвета, а за кроликов грани, пересекающиеся в одной вершине (их три). Поэтому согласно принципу Дирихле найдутся два "кролика" в одной "клетке", а это и означает, что найдутся две грани имеющие общее ребро (так как они имеют общую точку) и окрашенные

одинаково.

Задачи из видеофрагмента

- №1. Докажите, что никакая прямая не может пересекать все три стороны треугольника. (Прямая не проходит через вершины треугольника)
- №2. Семь цветков растут в клумбе, имеющей форму правильного шестиугольника со стороной 1 метр. Найдутся ли среди них два цветка, удаленных друг от друга не более чем на 1 метр?
- №3. Докажите, что в Санкт-Петербурге найдется более 50 человек, которые родились в один год и один день.
- №4. Какое наибольшее число королей можно расставить на шахматной доске так, чтобы никакие два из них не били друг друга?
- №5а. В прямоугольнике 3×4 расположено семь точек. Найдутся ли среди них две, расстояние между которыми не превосходит $\sqrt{5}$?
- №5б. В прямоугольнике 3×4 расположено шесть точек. Найдутся ли среди них две, расстояние между которыми не превосходит $\sqrt{5}$?
- В прямоугольнике 5×10 расположены 49 точек. Всегда ли среди них можно выбрать три, лежащие в круге единичного радиуса?