Действия над комплексными числами в показательной форме

Показательная форма комплексного числа

Представим комплексное число z в тригонометрической форме::

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Всякое комплексное число можно представить в ***показательной форме***:

$$\boxed{z = r \cdot e^{i\varphi}}$$

<u>Действия над комплексными числами в показательной форме</u>:

Пусть имеем: $z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$; $z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$. Тогда:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)};$$

$$z^n = r^n \cdot e^{i\varphi n};$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)};$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{n}}.$$

Выполните действия, результат запишите в показательной, тригонометрической, алгебраической формах:

1. $e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot 4e^{i\frac{\pi}{12}} = 1 \cdot 4 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}\right)} = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$= 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$$

2. $\dfrac{4e^{i\frac{7\pi}{9}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{9}}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{7\pi}{9}-\frac{\pi}{9}\right)} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$

$$= 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{3}i$$

Выполните действия, результат запишите в показательной, тригонометрической, алгебраической формах:

3. $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)5\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$$= 2\left(cos\frac{\pi}{6}+i\,sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot 5\left(cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\,sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 10\left(cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\,sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 10e^{-\frac{\pi}{6}i}$$

$$= 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right) = 5\sqrt{3}-5i$$

4. $\left(2e^{i\frac{7\pi}{9}}\right)^3 = 8e^{i\frac{7\pi}{3}} = 8\left(cos\frac{7\pi}{3}+i\,sin\frac{7\pi}{3}\right)$

$$= 8\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 4+4\sqrt{3}i$$

5. $\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}\right)$