Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Уральский государственный педагогический университет»
Институт математики, физики, информатики и технологий
Кафедра высшей математики и методики обучения математике

Логарифмическая спираль

Исполнитель:
Михайлова Сабина Артуровна
Студентка группы МиИ-1801

Екатеринбург 2021

Историческая справка

- Впервые логарифмическая спираль упоминается в письме Декарта к Мерсену в 1638г., в котором Декарт определяет новую спираль как линию, отношение длины дуги которой к радиусу-вектору является постоянным.

- Примерно в то же время Э. Торричелли независимо от Декарта и гораздо более подробно изучил свойства «геометрической спирали»так он назвал линию.

- Особенно много внимания логарифмической спирали уделил Я. Бернулли, называвший ее spira mirabilis – дивная спираль.
- Название логарифмической спирали было предложено Вариньоном.

- Кинематическое свойство логарифмической спирали найдено Э. Ш. Каталаном в 1856 г.

Определение

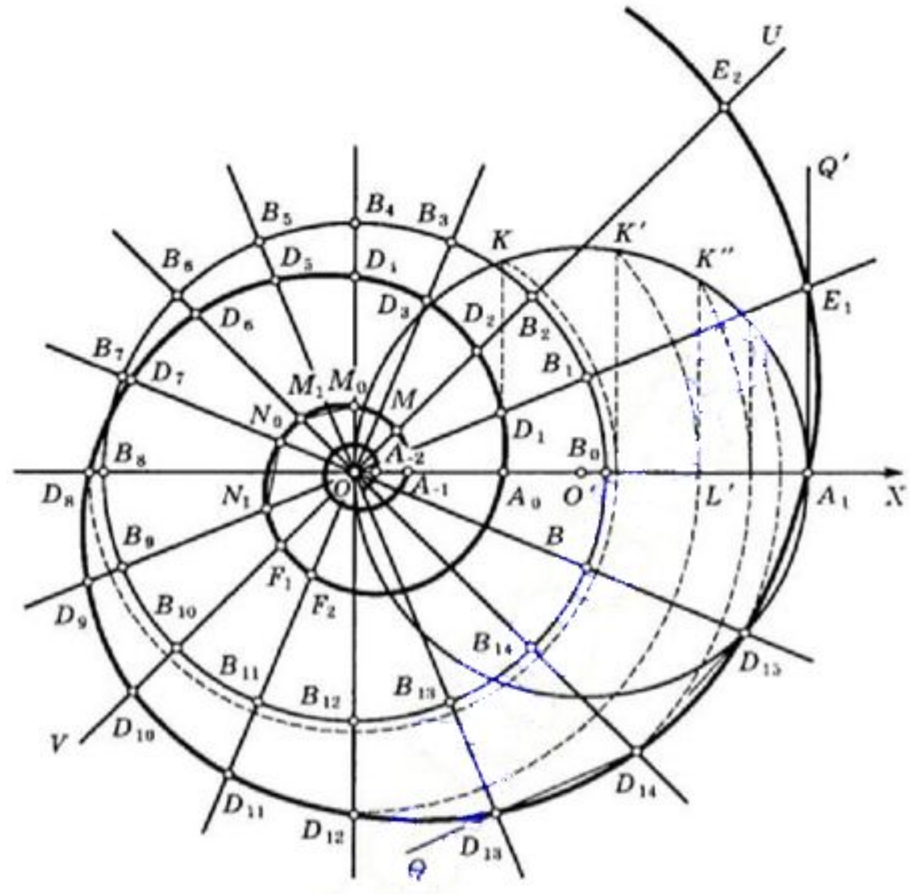
Логарифмической спиралью называется кривая, выражаемая в полярной системе уравнением:

$$\rho = \alpha^{\varphi}$$

где p – расстояние от произвольной точки М на спирали до выбранной точки О,

φ - угол между лучом ОМ и выбранным лучом Ох,

a - константа

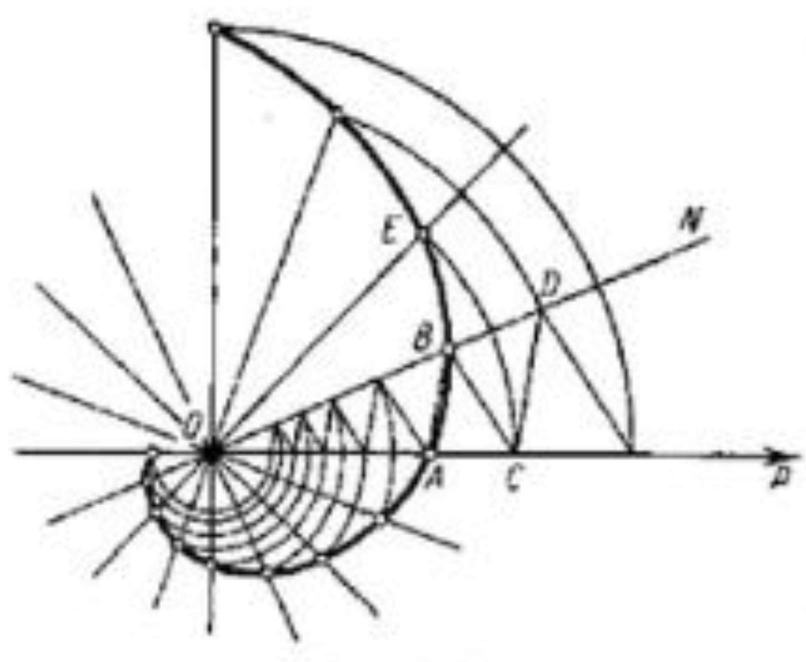


Построение

Построение логарифмической спирали может быть осуществлено по точкам и с помощью специального прибора.

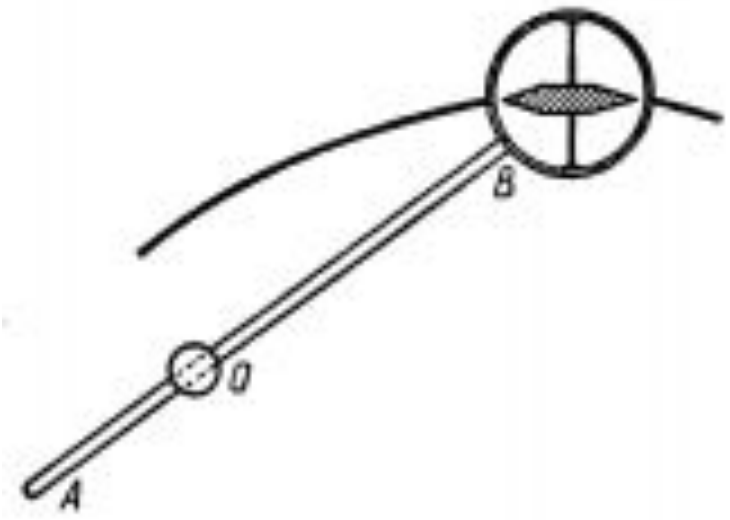
<u>Построение по точкам</u>

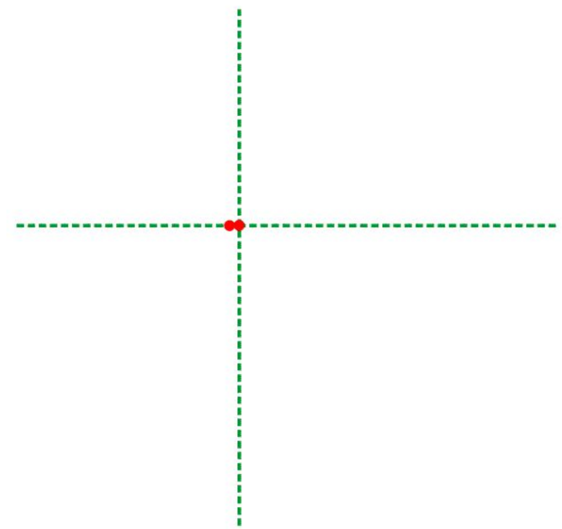
1. Проводим из полюса лучи под углом, равным α^{ϕ} друг другу;
2. Выражаем число α^{ϕ} соответствующим масштабу отрезком OB;
3. Откладываем этот отрезок на луче ON и получаем точку B спирали;
4. Находим величину радиус-вектора $((\alpha^{\phi})^2=OB^2$, построив треугольник OBC, подобный треугольнику OAB;
5. Аналогично находим величину следующего радиус-вектора, построив треугольник ODC, подобный треугольнику OAB;
6. итд .



Построение с помощью специального прибора

Прибор для вычерчивания логарифмической спирали состоит из стержня AB, к одному из концов которого прикрепляется рама в виде окружности. Один из диаметров этой окружности является осью диска с заостренными краями, плоскость которого перпендикулярна к плоскости рамы. Другим концом стержень AB может свободно проходить через шайбу O, а эта последняя может свободно вращаться вокруг оси, перпендикулярной к плоскости рисунка, и закрепленной на нем в некоторой точке. Если взять рукой за раму и перемещать ее, прижимая к плоскости чертежа, то диск, вращаясь, будет оставлять на бумаге след в виде линии, составляющей с направлением стержня один и тот же угол.





Уравнения

Уравнение в полярных координатах (полюс совпадает с полюсом спирали; полярная ось проведена через произвольно взятую точку M_o спирали):

$$\rho = \rho_0 q^{\frac{\varphi}{2\pi}}$$

где $\rho_0 = OM_0 -$ *полярный радиус точки* M_0*, а* $q -$ *коэффициент роста.*

Натуральное уравнение:

$$S = kR, \text{где } k = \frac{1}{\ln a}$$

Свойства

1. Угол μ, составляемый касательной в произвольной точке логарифмической спирали с радиусом-вектором точки касания за висит лишь от параметра a и, следовательно, для каждой спирали является величиной постоянной.

2. Полярная касательная, полярная нормаль, подкасательная и поднормаль пропорциональны радиусу-вектору точки касания.

$$S_t = \frac{1}{\ln a}\rho \qquad T = \sqrt{1 + \frac{1}{(\ln a)^2}} \cdot \rho$$

$$S_n = \ln a \cdot \rho \qquad N = \sqrt{1 + (\ln a)^2} \cdot \rho$$

Свойства

3. Радиус кривизны в произвольной точке логарифмической спирали пропорционален радиусу-вектору этой точки.

$$R = \rho\sqrt{1 + (\ln a)^2}$$

4. Длина дуги логарифмической спирали равняется разности полярных касательных, проведенных в конце и начале дуги.

$$S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{a^{2\varphi} + a^{2\varphi}(\ln a)^2}\, d\varphi = \frac{\sqrt{1 + (\ln a)^2}}{\ln a} \cdot (a^{\varphi_2} - a^{\varphi_1}) = \frac{\sqrt{1 + (\ln a)^2}}{\ln a} \cdot (\rho_2 - \rho_1)$$

$$S = \rho_2 \cdot \frac{\sqrt{1 + (\ln a)^2}}{\ln a} - \rho_1 \cdot \frac{\sqrt{1 + (\ln a)^2}}{\ln a}$$

Свойства

5. Длина дуги логарифмической спирали от полюса до произвольной точки ее равна длине полярной касательной; про· веденной к спирали в этой точке.

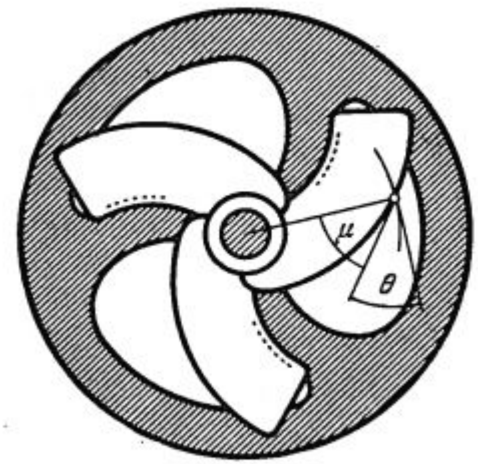
$$S = \rho \cdot \frac{\sqrt{1 + (\ln a)^2}}{\ln a} = T$$

6. Длина дуги логарифмической спирали, отсчитываемая от полюса до некоторой точки, пропорциональна радиусу-вектору этой точки.

7. Длина дуги логарифмической спирали, отсчитываемая от полюса, пропорциональна радиусу кривизны конца этой дуги.

8. Если логарифмическая спираль катится по прямой *MD*, то геометрическое место центров кривизны, соответствующих точках касания, является прямой линией, проходящей через полюс.

Логарифмическая спираль в технике и природе



Нож соломорезки

Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Уральский государственный педагогический университет»
Институт математики, физики, информатики и технологий
Кафедра высшей математики и методики обучения математике

Логарифмическая спираль

Исполнитель:
Михайлова Сабина Артуровна
Студентка группы МиИ-1801

Екатеринбург 2021