ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

I. Преобразование Лапласа

2018

ОРИГИНАЛ

комплекснозначная функция действительного переменного

$$f(t) = f_1(t) + if_2(t)$$

ТЕОРЕМА 1

Условия существования «оригинала»

Вводится класс функций f(t), называемых «*преобразуемые по Лапласу*» или «*оригиналы*», которые удовлетворяют следующим условиям:

1. $f(t)=0$ при $t<0$
2. Функция удовлетворяет условиям Дирихле при $t>0$
3. При $t>0$ функция по абсолютному значению ограничена верхним пределом

$$\left|f(t)\right| = \mu \cdot e^{S_0 t}$$

S_0 - Показатель роста

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

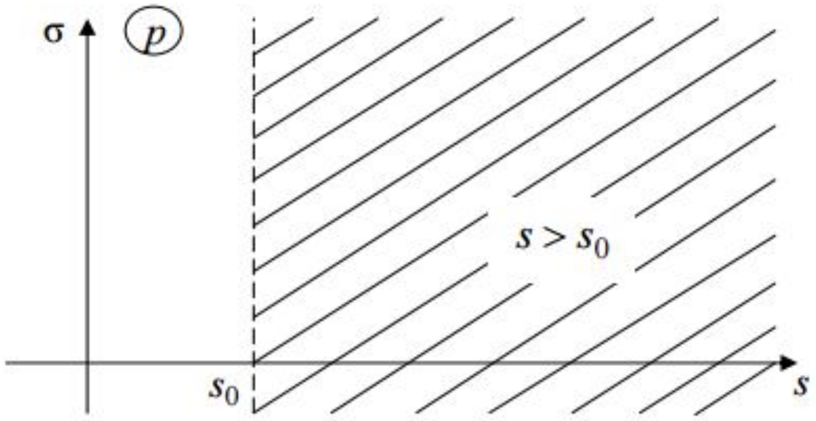
Пусть $f(t)$ *– оригинал.* ***Изображением функции*** $\boldsymbol{f(t)}$ (***преобразованием Лапласа функции*** $\boldsymbol{f(t)}$) *называется фкп* $F(p)$, *определяемая равенством*

$$F(p)=\int_{0}^{+\infty} f(t)\cdot e^{-pt}\,dt.$$

ЗАПИСЫВАЮТ: $F(p)=\mathrm{L}[f(t)]$, $F(p)\risingdotseq f(t)$, $f(t)\risingdotseq F(p)$.

ТЕОРЕМА 2.

Если $f(t)$ *– оригинал с показателем роста* s_0, *то его изображение* $F(p)$ *является аналитической функцией в полуплоскости* $\mathrm{Re}\,p>s_0$.



ТЕОРЕМА 3 (обращения).

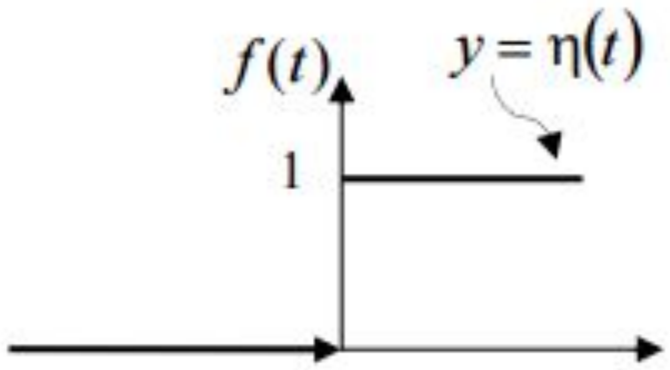
Пусть $f(t)$ *– оригинал,* $f(t) \risingdotseq F(p)$. *Тогда в любой точке непрерывности функции* $f(t)$ *имеет место равенство*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C} F(p) \cdot e^{pt} \, dp \qquad (1)$$

где C *– любая прямая* $\mathrm{Re}\, p = a > s_0$.

Единичная функция Хевисайда

$$\eta(t) = \sigma_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$



$$\mathrm{L}(1) = \mathrm{L}(\eta(t)) = \frac{1}{\mathrm{p}}$$

Замечание.

Если для функции $\varphi(t)$ выполняются условия 1 и 3 определения 1, то функция $\varphi(t)\cdot\eta(t)$ будет являться оригиналом.

В дальнейшем будем писать $\sin t$, $\cos t$ и т. д. подразумевая $\sin t\cdot\eta(t)$, $\cos t\cdot\eta(t)$ и т. д.

Пример1

Найти изображение по определению e^{2t}

Пример 1

Основные свойства

1) Линейность изображения.

Если $f(t)$, $g(t)$ – оригиналы, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, то $\alpha f(t) + \beta g(t)$ – оригинал и

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \risingdotseq \alpha F(p) + \beta G(p)$$

2) Теорема подобия.

Справедливо утверждение: $f(\alpha t) \risingdotseq \dfrac{1}{\alpha} F\left(\dfrac{p}{\alpha}\right), \quad \forall \alpha > 0$

3) Теорема запаздывания (оригинала)

Справедливо утверждение: $f(t - \alpha) \risingdotseq e^{-\alpha p} \cdot F(p)$

Замечание. Напомним, что

$$f(t) = f(t)\cdot\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ f(t), & t \ge 0. \end{cases}$$

$$f(t-\alpha) = f(t-\alpha)\cdot\eta(t-\alpha) = \begin{cases} 0, & t-\alpha < 0; \\ f(t-\alpha), & t-\alpha \ge 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f(t-\alpha) = \begin{cases} 0, & t < \alpha; \\ f(t-\alpha), & t \ge \alpha. \end{cases}$$

4) Теорема смещения (запаздывания изображения).

Справедливо утверждение: $F(p-\alpha) \risingdotseq e^{\alpha t}\cdot f(t)$.

5) Дифференцирование оригинала

ТЕОРЕМА 1.

Если $f(t)$, $f'(t)$, …, $f^{(n)}(t)$ *– оригиналы, то*

$$f'(t) \risingdotseq p \cdot F(p) - f(0) \ ,$$

$$f''(t) \risingdotseq p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - f'(0) \ ,$$

$$f'''(t) \risingdotseq p^3 \cdot F(p) - p^2 \cdot f(0) - p \cdot f'(0) - f''(0) \ ,$$

…………………………………..

6) Дифференцирование изображения

Справедливо утверждение:

$$F'(p) \fallingdotseq -t \cdot f(t)\,,$$

$$F''(p) \fallingdotseq t^2 \cdot f(t)\,,$$

$$F'''(p) \fallingdotseq -t^3 \cdot f(t)\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F^{(n)}(p) \fallingdotseq (-1)^{(n)} \cdot f(t)\,.$$

7) Интегрирование оригинала

Если $f(t)$ – оригинал, то

$$g(t) = \int_0^t f(t)dt$$

тоже является оригиналом и справедливо утверждение:

$$L\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(p)}{p}$$

8) Интегрирование изображения

ТЕОРЕМА 2 (об интегрировании изображения).

Пусть $f(t) \risingdotseq F(p)$,

$$\int_p^{\infty} F(p)dp \text{ – сходится абсолютно}$$

(*путь интегрирования предполагается целиком лежащим в области аналитичности* $F(p)$)

Тогда функция $\dfrac{f(t)}{t}$ *является оригиналом и*

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_p^{\infty} F(p)dp$$

9) Умножение изображений

ТЕОРЕМА 3 (Бореля, об умножении изображений).

Пусть $f(t)$, $g(t)$ – *оригиналы,*

$$f(t) \risingdotseq F(p)\,,\ g(t) \risingdotseq G(p)\,.$$

Тогда функция $$\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

тоже является оригиналом и $\varphi(t) \risingdotseq F(p)\cdot G(p)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $f(t)$ и $g(t)$ – оригиналы. *Интеграл*

$$\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

называется ***сверткой функций*** $f(t)$ и $g(t)$.

ОБОЗНАЧАЮТ: $f(t) * g(t)$.

Очевидно, что $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$.

СЛЕДСТВИЕ 4 (формула Дюамеля).

Справедлива формула: $f'(t) * g(t) + f(0) \cdot g(t) \risingdotseq p \cdot F(p) \cdot G(p)$.

Т.е.

$$\int_0^t f'(\tau) g(t-\tau) d\tau + f(0) \cdot g(t) \risingdotseq p \cdot F(p) \cdot G(p) .$$

№ п/п	Изображение: $F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$	$\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\to}}$	Оригинал: $f(t)\quad (t\geq 0)$
1	$\frac{1}{p}$	$\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\to}}$	$1=\eta(t)$
2	$\frac{1}{p^2}$	$\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\to}}$	t
3	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\to}}$	$t^n \quad (n\in N)$
4	$\frac{1}{p+\alpha}$	$\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\to}}$	$e^{-\alpha t}$
5	$\frac{a}{p^2+a^2}$	$\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\to}}$	$\sin at$
6	$\frac{p}{p^2+a^2}$	$\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\to}}$	$\cos at$

7	$\dfrac{a}{p^2-a^2}$	$\risingdotseq$	$\operatorname{sh} at$
8	$\dfrac{p}{p^2-a^2}$	$\risingdotseq$	$\operatorname{ch} at$
9	$\dfrac{a}{(p+\alpha)^2+a^2}$	$\risingdotseq$	$e^{-\alpha t}\sin at$
10	$\dfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+a^2}$	$\risingdotseq$	$e^{-\alpha t}\cos at$
11	$\dfrac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}$	$\risingdotseq$	$t^n e^{-\alpha t} \quad (n \in N)$
12	$\dfrac{2pa}{\left(p^2+a^2\right)^2}$	$\risingdotseq$	$t\sin at$
13	$\dfrac{p^2-a^2}{\left(p^2+a^2\right)^2}$	$\risingdotseq$	$t\cos at$
14	$\dfrac{1}{\left(p^2+a^2\right)^2}$	$\risingdotseq$	$\dfrac{1}{2a^3}(\sin at - at\cos at)$
15	1	$\risingdotseq$	$\delta(t)$

Примеры

II. Отыскание оригинала по изображению

1. Теорема запаздывания
2. Теорема о свертке
3. Изображение – правильная дробь, вида

$$\frac{Q_m(p)}{R_n(p)}$$

1. Разложить в сумму простейших дробей изображение
2. Перейти к оригиналам от полученных дробей

Оригиналы простейших дробей

$$(\mathrm{I})\quad \frac{A}{p+\alpha} \mathrel{\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\longrightarrow}}} Ae^{-\alpha t};$$

$$(\mathrm{II})\quad \frac{A}{(p+\alpha)^k} \mathrel{\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\longrightarrow}}} A\frac{1}{(k-1)!}t^{k-1}e^{-\alpha t}$$

Оригиналы простейших дробей

$$(\text{III})\ \frac{Ap+B}{p^2+a_1p+a_2}=\frac{Ap+B}{(p+\alpha)^2+\beta^2}=\frac{A(p+\alpha)+B-A\alpha}{(p+\alpha)^2+\beta^2}.$$

(Это тот случай, когда корни знаменателя – комплексные.)

Выделив в знаменателе полный квадрат, разобьем на две дроби:

$$A\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\beta^2}+\frac{B-A\alpha}{\beta}\frac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}\ \dot{\to}\ Ae^{-\alpha t}\cos\beta t+\frac{B-A\alpha}{\beta}e^{-\alpha t}\sin\beta t,$$

где $\alpha=\dfrac{a_1}{2}$, $\beta=\sqrt{a_2-\dfrac{a_1^2}{4}}$.

Пример

$$\frac{3}{p-4}$$

$$\frac{2}{(p+1)^3}$$

$$\frac{4}{(p-2)^6}$$

$$\frac{p+1}{p^2+4p-5}$$

$$\frac{p+1}{p^2+4p+5}$$

Применение операционного исчисления

1. Вычисление несобственных интегралов
2. Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами
3. Решение систем линейных дифференциальных уравнений

Пример

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$$

ЛДУ

Найти решение ДУ операторным методом при заданных начальных условиях

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f(t),$$

$$y(0) = y_0,\ y'(0) = y'_0$$

2. Алгоритм решения ЛДУ

1. Применить преобразование Лапласа к правой части по таблице изображений
2. Найти изображение левой части, используя дифференцирование оригинала (свойство 5)
3. Получаем операторное уравнение относительно $Y(p)$ – изображение решения ДУ
4. Выразить $Y(p)$
5. Восстановить оригинал $y(t)$ по полученному изображению

Пример

$$y'' + 2y' + y = e^{-t},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

Пример

Пример

3. Алгоритм решения систем ДУ

1. Применить преобразование Лапласа к обеим частям каждого уравнения
2. Решить полученную систему, как СЛАУ относительно изображений искомых решений (метод Крамера)
3. Восстановить оригиналы – решения системы ДУ по полученным изображениям