ГАЗ ВАН-ДЕР-ВААЛЬСА

Домашнее задание

2.56 $p = CV$; $pV^{-1} = C$, $n = -1$, б) $C = C_V - \frac{R}{n-1} = C_V + \frac{R}{2}$

6.45 $\frac{p}{8} \cdot (4V)^n = pV$, $\frac{4^n}{8} = 1$, $2^{2n-3} = 2^0$, $n = 1.5$

6.50 $T \sim V^{\alpha} \Rightarrow TV^{-\alpha} = C$, $n = 1 - \alpha$, $C = C_V + R/\alpha$

$$A = (C_V + R/\alpha)\Delta T - C_V \Delta T = \frac{R\Delta T}{\alpha} = \frac{R}{\alpha} \cdot \frac{\Delta U}{C_V} = \frac{(\gamma - 1)\Delta U}{\alpha R}$$

Еще об адиабатном процессе

$$\delta Q \equiv 0 = \nu C_v\, dT + p\, dV = \nu C_v\, dT + \frac{\nu R T}{V}\, dV \;\Big|\; \frac{1}{\nu C_v T}$$

$$\frac{dT}{T} + \frac{\cancel{\nu} R}{C_v}\frac{dV}{V} = 0 \Rightarrow d(\ln T) + \frac{C_p - C_v}{C_v}\, d(\ln V) = 0$$

$$T V^{\frac{C_p - C_v}{C_v}} = C \Leftrightarrow T V^{\gamma - 1} = C$$

$$\delta Q \equiv 0 = \nu c_v \, dT + p \, dV$$

$$V = \frac{\nu R T}{p} \Rightarrow dV = \nu R \left(\frac{dT}{p} - \frac{T}{p^2} dp \right)$$

$$\nu c_v \, dT + p \nu R \left(\frac{dT}{p} - \frac{T}{p^2} dp \right) = 0$$

$$c_v \, dT + R \left(dT - \frac{T}{p} dp \right) = 0$$

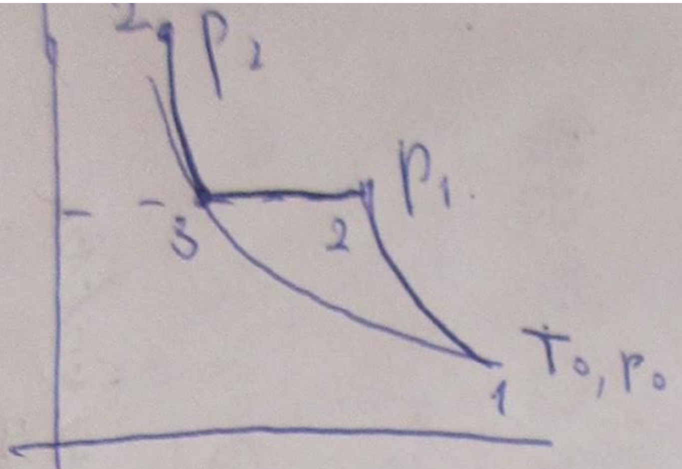
$$(c_v + R) \, dT - \frac{TR}{p} dp = 0 \quad \Big| \; \frac{1}{(c_v + R) T}$$

$$\frac{dT}{T} + \frac{R}{c_p} \frac{dp}{p} = 0$$

$$T p^{R/c_p} = 0 \Rightarrow T p^{\alpha} = C$$

Проверочная работа

131. Двухступенчатый компрессор адиабатически и квазистатически сжимает некоторое количество идеального газа, теплоемкости которого C_P и C_V не зависят от температуры. Сначала газ сжимается от давления P_0 до промежуточного давления P_1. Затем сжатый газ при постоянном давлении P_1 охлаждается до начальной температуры T_0. Наконец, газ сжимается до окончательного давления P_2. При каком значении промежуточного давления P_1 полная работа компрессора минимальна и чему она равна? Давления P_0 и P_1, а также начальный объем газа V_0 считаются заданными. Как связана минимальная работа $A_{\text{мин}}$ с работой A_1, которую надо было бы затратить на сжатие газа до того же давления P_2, применяя одноступенчатый компрессор? Найти эту связь для гелия и воздуха, если $P_0 = 1$ атм, $P_2 = 200$ атм.



$$A = A_{01} + A_{32} = C_V(T_1 - T_0) + C_V(T_2 - T_3)$$

$$A = C_V(T_1 + T_2 - 2T_0)$$

$$T p^{\alpha} = C \Rightarrow T_1 = \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\alpha} T_0$$

$$T_2 = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\alpha} T_0$$

$$A = C_V T_0 \left[\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\alpha} + \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\alpha} - 2 \right]$$

$$A_{min} = \min_{p_1} A$$

$$\frac{\partial A}{\partial (p_0^{\alpha})} = C_V T_0 \left[-\left(\frac{p_0}{p_1^2}\right)^{\alpha} + \frac{1}{p_2^{\alpha}} \right] = 0$$

$$p_1^{2\alpha} = p_2^{\alpha} p_0^{\alpha} \Rightarrow p_1 = \sqrt{p_0 p_2}$$

$$A_{min} = C_V T_0 \left[\left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\alpha/2} + \left(\frac{p_0}{p_2}\right)^{\alpha/2} - 2 \right] =$$

$$= C_V T_0 \left[\left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\alpha/4} - \left(\frac{p_0}{p_2}\right)^{\alpha/4} \right]^2$$

$$A_1 = C_V T_0 \left[\left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\alpha} - 1 \right] = C_V T_0 \left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\alpha/2} \left[\left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\alpha/2} - \left(\frac{p_0}{p_2}\right)^{\alpha/2} \right]$$

$$\frac{A_{min}}{A_1} = \frac{(p_2/p_0)^{\alpha/4} - (p_0/p_2)^{\alpha/4}}{(p_2/p_0)^{\alpha/2} \left[\left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\alpha/4} + \left(\frac{p_0}{p_2}\right)^{\alpha/4} \right]} = \frac{p_2^{\alpha/2} - p_0^{\alpha/2}}{\left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\alpha/2} \left[p_2^{\alpha/2} + p_0^{\alpha/2} \right]}$$

Газ Ван-дер-Ваальса

$$\left(p + \frac{a}{v_\mu^2}\right)(v_\mu - b) = RT$$

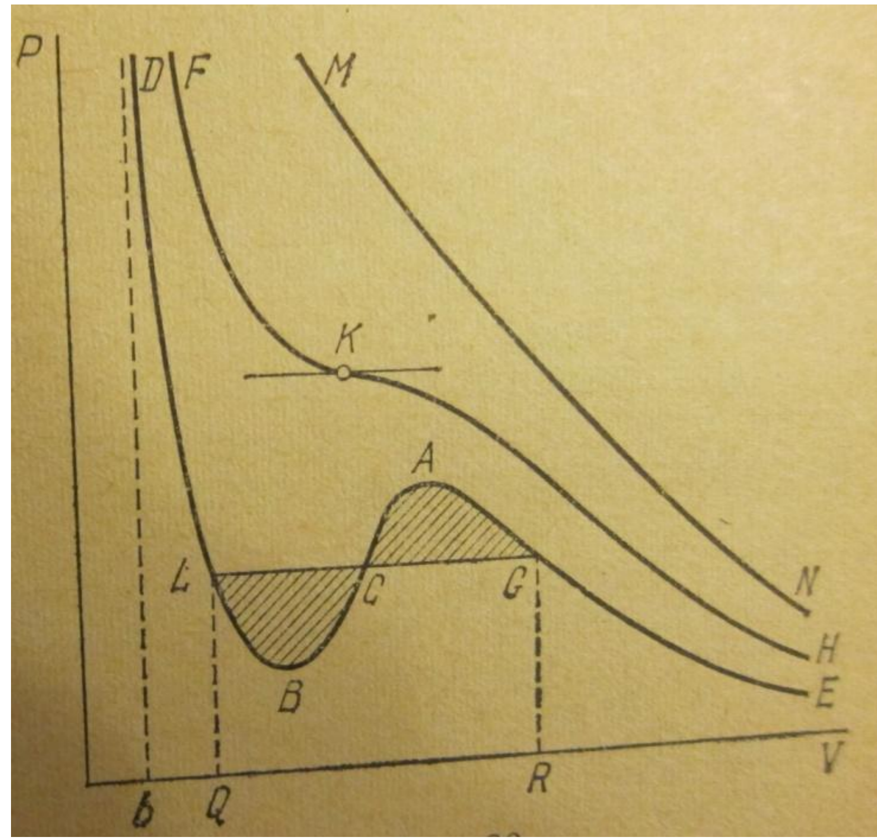
$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT$$

$$p v_\mu^3 - (pb + RT) v_\mu^2 + a v_\mu = ab$$

$$U_\mu = C_V T - \frac{a}{v_\mu}$$

$$U = \nu c_V T - \frac{\nu^2 a}{V}$$

$$dU = \nu c_V\, dT + \frac{\nu^2 a}{V^2} dV$$



2.166. Два моля водорода расширяются в пустоту, в результате чего объем газа увеличивается от значения $V_1=2{,}00$ л до $V_2=10{,}0$ л. Какое количество теплоты Q нужно сообщить газу, чтобы температура его не изменилась?

2.166. Два моля водорода расширяются в пустоту, в результате чего объем газа увеличивается от значения $V_1 = 2{,}00$ л до $V_2 = 10{,}0$ л. Какое количество теплоты Q нужно сообщить газу, чтобы температура его не изменилась?

$$dQ = dU + p\,dV$$

$$p = 0$$

$$dQ = \nu C_V\,dT + \frac{\nu^2 a}{V^2}\,dV$$

$$Q\Big|_T = \nu^2 a \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^2} = \nu^2 a\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right)$$

2.169. Получить для ван-дер-ваальсовского газа уравнение адиабаты в переменных V и T, а также в переменных V и p. Сравнить полученные уравнения с аналогичными уравнениями для идеального газа.

2.169. Получить для ван-дер-ваальсовского газа уравнение адиабаты в переменных V и T, а также в переменных V и p. Сравнить полученные уравнения с аналогичными уравнениями для идеального газа.

$$dQ \equiv 0 = dU + p\,dV = \nu C_V\,dT + \frac{\nu^2 a}{V^2}\,dV + p\,dV =$$

$$= \nu C_V\,dT + \left(p + \frac{a\nu^2}{V^2}\right)dV = \nu C_V\,dT + \frac{\nu R T}{V-\nu b}\,dV \quad \Big|\ \frac{1}{\nu C_V T}$$

$$\frac{dT}{T} + \frac{C_p - C_V}{C_V}\,\frac{dV}{V-\nu b} = 0$$

$$d(\ln T) + \frac{C_p - C_V}{C_V}\,d\big(\ln(V-\nu b)\big) = 0$$

$$T(V-\nu b)^{\frac{C_p - C_V}{C_V}} = C$$

$$\nu RT = \left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V - \nu b)$$

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V - \nu b)(V - \nu b)^{\frac{c_p - c_v}{c_v}} = C'$$

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V - \nu b)^{\frac{c_p}{c_v}} = C'$$

6.60. Определить для ван-дер-ваальсовского газа разность молярных теплоемкостей $C_p - C_V$.

6.60. Определить для ван-дер-ваальсовского газа разность молярных теплоемкостей $C_p - C_V$.

$$\nu C_p dT = dU + p\,dV, \quad dU = \nu C_V dT + \frac{\nu^2 a}{V^2} dV$$

$$(\nu C_p dT - \nu C_V dT) = \frac{\nu^2 a}{V^2} dV + p\,dV$$

$$\nu (C_p - C_V) dT = \frac{\nu R T}{V - \nu b} dV$$

$$C_p - C_V = \frac{R T}{V - \nu b}\left(\frac{dV}{dT}\right)_p$$

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu R T \,\Big|\, d_{\,p = const}$$

$$\left[-\frac{2\nu^2 a}{V^3}(V-\nu b)+\left(p+\frac{\nu^2 a}{V^2}\right)\right] dV = \nu R\, dT$$

$$\left(-\frac{2\nu^2 a}{V^3}(V-\nu b)+\frac{\nu RT}{V-\nu b}\right)\frac{\partial V}{\partial T}\Big|_p = \nu R$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{R}{\frac{RT}{V-\nu b}-\frac{2\nu a(V-\nu b)}{V^3}}$$

$$c_p-c_v=\frac{RT}{V-\nu b}\left[\frac{R}{\frac{RT}{V-\nu b}-\frac{2\nu a(V-\nu b)}{V^3}}\right]=\frac{R}{1-\frac{2a\nu(V-\nu b)^2}{RTV^3}}$$