ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «БАЛТИЙСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ИММАНУИЛА КАНТА»
ИНСТИТУТ ПРИРОДОПОЛЬЗОВАНИЯ, ТЕРРИТОРИАЛЬНОГО РАЗВИТИЯ И ГРАДОСТРОИТЕЛЬСТВА

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

ТЕМА «РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ГАУССА И КРАМЕРА»

СПЕЦИАЛЬНОСТЬ: 07.02.01 АРХИТЕКТУРА

Работала студентка
Группы А11
___________Дедук А.О.

Руководитель
___________Тавгер Е.Х.

Консультанты:
___________Сидоренко И.О.

Калининград
2020 г.

Оглавление

Введение

Система линейных уравнений- это объединение из n линейных уравнений, каждое из которых содержит k переменных.

Решение системы линейных уравнений-это последовательность чисел (*k1, k2,…, kn*), которая является решением каждого уравнения системы, т.е. при подстановке в это уравнение вместо переменных *x1,x2,…,xn* дает верное числовое равенство.

Соответственно, решить систему уравнений — значит найти множество всех ее решений или доказать, что это множество пусто. Поскольку число уравнений и число неизвестных может не совпадать, возможны три случая:

1. Система несовместна, т.е. множество всех решений пусто. Достаточно редкий случай, который легко обнаруживается независимо от того, каким методом решать систему.
2. Система совместна и определена, т.е. имеет ровно одно решение. Классический вариант, хорошо известный еще со школьной скамьи.
3. Система совместна и не определена, т.е. имеет бесконечно много решений. Это самый жесткий вариант. Недостаточно указать, что «система имеет бесконечное множество решений» — надо описать, как устроено это множество

Существует несколько методов решения систем линейных уравнений. Рассмотрим методы Карла Фридриха Гаусса и Габриэля Крамера.

1 Карл Фридрих Гаусс(1777-1855)

Родился Карл Гаусс 30 апреля 1777 года в немецком герцогстве Брауншвейг в семье бедного смотрителя каналов. Примечательно, что точной даты появления на свет его родители не помнили – Карл сам вывел ее в будущем.

Уже в 2 года родственники мальчика признали его гением. В 3 года он читал, писал и исправлял счетные ошибки отца. Позже Гаусс вспоминал, что считать научился раньше, чем разговаривать.

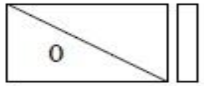
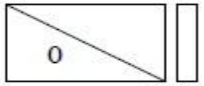
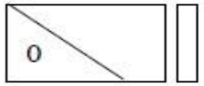
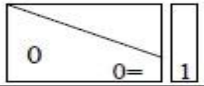
Карл Гаусс сделал фундаментальные открытия почти во всех областях алгебры и геометрии. Самым плодотворным периодом считается время его обучения в Гёттингенском университете.

Карл Гаусс предложил свой метод решения систем линейных уравнений, который является одним из наиболее универсальных методов решения.

1.1 Принцип метода Гаусса.

Метод Гаусса включает в себя прямой и обратный ходы. Прямой ход и называется методом Гаусса, обратный - методом Гаусса-Жордана, который отличается от первого только последовательностью исключения переменных.

Метод Гаусса идеально подходит для решения систем содержащих больше трех линейных уравнений, для решения систем уравнений, которые не являются квадратными. То есть метод Гаусса - наиболее универсальный метод для нахождения решения любой системы линейных уравнений, он работает в случае, когда система имеет бесконечно много решений или несовместна.

Метод решения	П р и м е р
Решение СЛАУ методом Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных) ($m \neq m$)	$\begin{cases} x+2y+3z=6, \\ 4x+5y+6z=9, \\ 7x+8y=-6. \end{cases}$
Расширенную матрицу системы (матрица, составленная из коэффициентов системы с добавлением столбца свободных членов) $A^*=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$	$A^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 9 \\ 7 & 8 & 0 & -6 \end{pmatrix} \sim$
с помощью элементарных преобразований, проводимых только над строками, приводят к ступенчатому виду $\begin{pmatrix} a'_{11} & \ldots & a'_{1k_2} & \ldots & a'_{1k_r} & \ldots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & \ldots & a'_{2k_2} & \ldots & a'_{2k_r} & \ldots & a'_{2n} & b'_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & a'_{rk_r} & \ldots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & b'_{r+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & b'_m \end{pmatrix}$	$\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -15 \\ 0 & -6 & -21 & -48 \end{pmatrix} \sim$ $\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -9 & -18 \end{pmatrix}$
После выполнения элементарных преобразований можно получить эквивалентную матрицу следующего типа:	Получена СЛАУ вида 
 Система совместна и определенна (имеет единственное решение).	Эквивалентная СЛАУ: $\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ y+2z=5 \\ 9z=18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}$
 Система совместна и неопределенна (имеет множество решений).	Ответ: $x=-2$; $y=1$; $z=2$
 Система несовместна (решений нет)	

2 Габриэль Крамер (1704–1752)

Крамер швейцарский математик, ученик Иоганна Бернулли, один из основателей линейной алгебры.

Габриэль Крамер родился в Женеве в семье врача. С раннего возраста показал большие способности в области математики. В 18 лет защитил диссертацию. В 20-летнем возрасте Крамер выставил свою кандидатуру на вакантную должность преподавателя на кафедре философии Женевского университета. Позже он создал еще один метод решения систем линейных уравнений.

2.2 Принцип метода Крамера.

Метод Крамера применяется для решения систем линейных алгебраических уравнений, в которой число неизвестны переменных равно числу уравнений и определитель основной матрицы отличен от нуля.
Теорема Крамера: Если определитель системы отличен от нуля, то система линейных уравнений имеет одно единственное решение, причём неизвестное равно отношению определителей. В знаменателе – определитель системы, а в числителе – определитель, полученный из определителя системы путём замены коэффициентов при этом неизвестном свободными членами. Эта теорема имеет место для системы линейных уравнений любого порядка.

Система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Определители

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Решение $\quad x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$

Заключение

Тема моего проекта: «Решение линейных уравнений методом Гаусса и Крамера». Мы рассмотрели эти методы. Они имеют определенные алгоритмы решения, основанные на действиях с определителями. Данные методы применимы только к тем системам линейных уравнений, в которых число неизвестных равняется числу уравнений. С увеличением числа уравнений системы повышается трудоемкость ее решения. Метод Гаусса основан на преобразовании расширенной матрицы системы. Данный метод имеет более универсальное применение и используется для систем с произвольным числом линейных уравнений и неизвестных. Он менее трудоемкий по сравнению с методом Крамера. Выбор метода решения систем линейных уравнений в задачах зависит от их сложности.

Список использованной литературы.

- Столяр А.А., Лельчук М.П. Математика. – Минск, 1975.
- Матрицы и системы линейных уравнений, Лизунова Н.А., Шкроба С.П.,2007
- Л. Андреева. Реферат по математике «Системы линейных уравнений» Анжеро-Судженск 1999г.
- Соловейчик И.Л., Лисичкин В.Т. Математика в задачах с решениями: учебное пособие — СПб.: Лань, 2014.