МЕХАНИКА
Лекция 4
Закон сохранения импульса
Движение тел с переменной массой

- ***Импульс (количество движения)***
- ***Закон сохранения импульса***
- ***Импульс силы***
- ***Движение тел с переменной массой***
- ***Уравнение Мещерского***
- ***Формула Циолковского***

Импульс

Замкнутая (изолированная) система – система тел, настолько удаленных от всех остальных тел, что они практически не оказывают никакого действия на рассматриваемую систему.
Замкнутая система - на каждую из материальных точек действуют лишь силы со стороны других точек, входящих в систему (нет внешних сил).

Импульс
количество движения

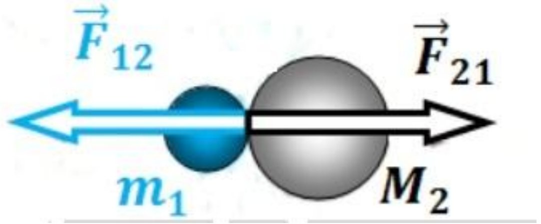
$$\vec{p} = m\vec{v},\ [p] = 1\,\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$$

Второй закон Ньютона

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Закон сохранения импульса для двух взаимодействующих тел



$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

По 2-му закону Ньютона $\overrightarrow{F_{12}} = \frac{d\overrightarrow{p_1}}{dt}, \quad \overrightarrow{F_{21}} = \frac{d\overrightarrow{p_2}}{dt}$

По 3-му закону Ньютона $\overrightarrow{F_{21}} = -\overrightarrow{F_{12}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\overrightarrow{p_1}}{dt} = -\frac{d\overrightarrow{p_2}}{dt}$

$$\frac{d\overrightarrow{p_1}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{p_2}}{dt} = 0 \ \Rightarrow \frac{d}{dt}(\overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2}) = 0 \Rightarrow \qquad \boxed{\overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} = \mathrm{const}}$$

Импульс замкнутой системы двух материальных точек сохраняется

Закон сохранения импульса для замкнутой системы из n материальных точек

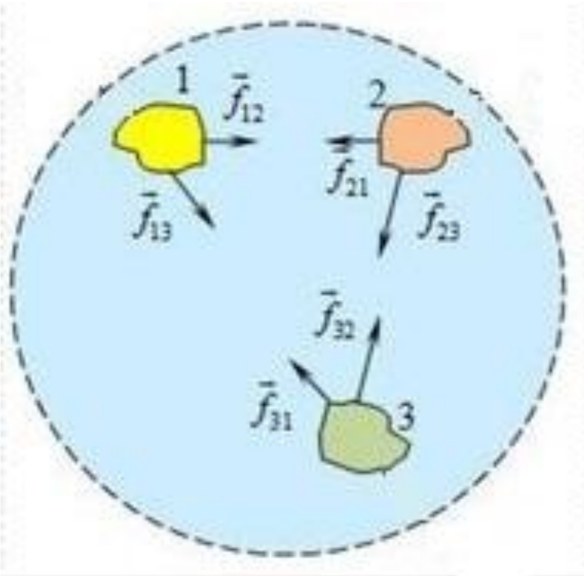
Замкнутая система - на каждую из материальных точек действуют лишь силы со стороны других точек, входящих в систему (нет внешних сил).

$$\frac{d\overrightarrow{p_1}}{dt} = \overrightarrow{f_{12}} + \overrightarrow{f_{13}} + \cdots \overrightarrow{f_{1n}}$$

$$\frac{d\overrightarrow{p_2}}{dt} = \overrightarrow{f_{21}} + \overrightarrow{f_{23}} + \cdots \overrightarrow{f_{2n}}$$

… … … … … … … … … … …

$$\frac{d\overrightarrow{p_n}}{dt} = \overrightarrow{f_{n1}} + \overrightarrow{f_{n2}} + \cdots \overrightarrow{f_{n,n-1}}$$



$$\frac{d\overrightarrow{p_1}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{p_2}}{dt} + \cdots \frac{d\overrightarrow{p_n}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\overrightarrow{p_i}}{dt}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d\overrightarrow{p_i}}{dt} = \left(\overrightarrow{f_{12}} + \overrightarrow{f_{21}}\right) + \cdots \left(\overrightarrow{f_{n-1,n}} + \overrightarrow{f_{n,n-1}}\right)$$

Закон сохранения импульса для замкнутой системы из n материальных точек

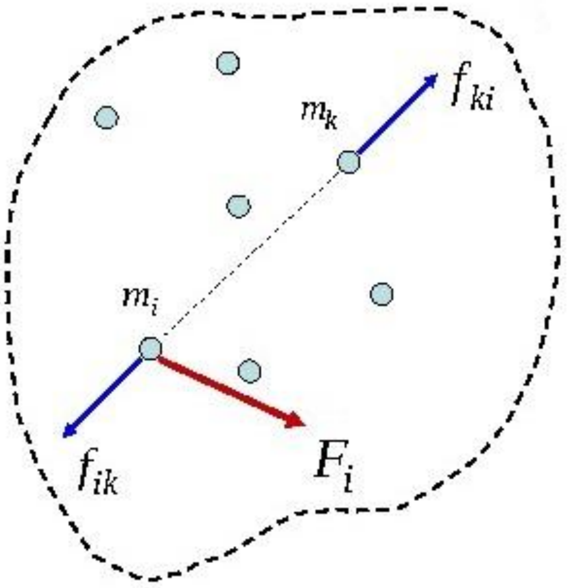
По 3-му закону Ньютона $\overrightarrow{F_{21}} = -\overrightarrow{F_{12}} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{d\overrightarrow{p_i}}{dt} = 0$

Импульс замкнутой системы, состоящей из n материальных точек сохраняется

$$\boldsymbol{\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{p_i} = const}$$

Изменение полного импульса для незамкнутой системы

Если система незамкнута, то на любую ее точку действуют и внутренние, и внешние силы



$\overrightarrow{f_{ik}}$ $-$ внутренняя сила, действующая на $i-$ точку со стороны $k-$й точки

$\overrightarrow{F_i}$ - результирующая всех внешних сил, действующих на i-ю точку

По 3-му закону Ньютона $\overrightarrow{f_{ik}} = -\overrightarrow{f_{ki}}$

Т.к. сумма всех внутренних сил равна нулю, следовательно, $\sum_{i=1}^{n} \frac{d\overrightarrow{p_i}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i}$

Изменение полного импульса незамкнутой системы

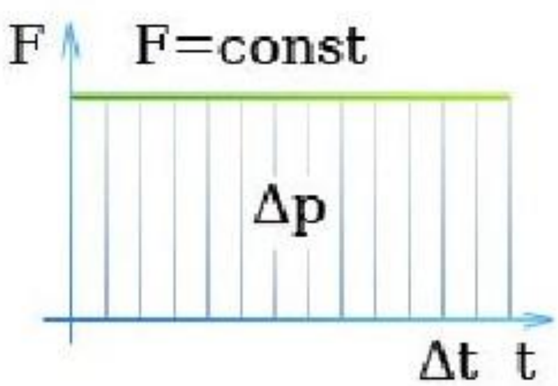
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \overrightarrow{F^{\text{вн}}}, \quad \overrightarrow{F^{\text{вн}}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i^{\text{вн}}}$$

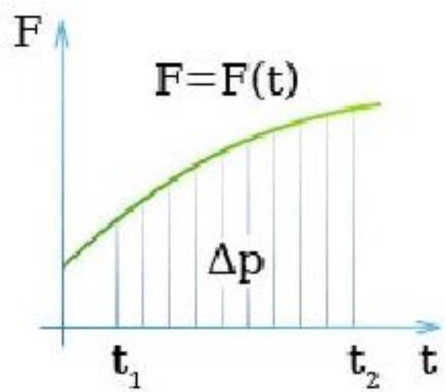
Импульс силы

Импульс силы – произведение силы на время ее действия

$\vec{F}dt = d\vec{p}$ или $\Delta p = F \cdot \Delta t$

$d(m\vec{v}) = \vec{F}dt$ – еще одна форма записи 2-го закона Ньютона





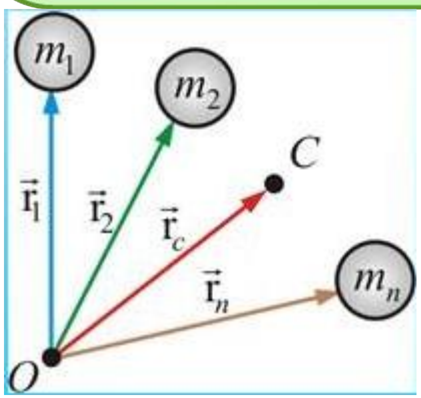
Импульс силы (изменение импульса тела) численно равен площади фигуры под графиком зависимости силы от времени ее действия

Центр масс системы

Центр масс системы (центр инерции) – это такая воображаемая точка, радиус-вектор которой $\vec{r_c}$ выражается через радиус-векторы $\vec{r_1}$, $\vec{r_2}$, …по формуле:

$$\vec{r_c} = \frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2} + \cdots m_n\vec{r_n}}{M} = \frac{1}{M}\sum m_i\vec{r_i}$$

где $M = m_1 + m_1 + \cdots m_n$ - общая масса всей системы



Скорость центра масс

$$\vec{v_c} = \frac{m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} + \cdots m_n\vec{v_n}}{M} = \frac{1}{M}\sum m_i\vec{v_i}$$

Теорема о движении центра масс

Центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна суммарной массе всей системы, а равнодействующая сила – сумме всех сил, действующих на систему.

$$M\frac{d^2\vec{r_c}}{dt} = \vec{F}$$

Движения центра масс системы тел

https://www.youtube.com/watch?v=NHo-ICzb-YQ

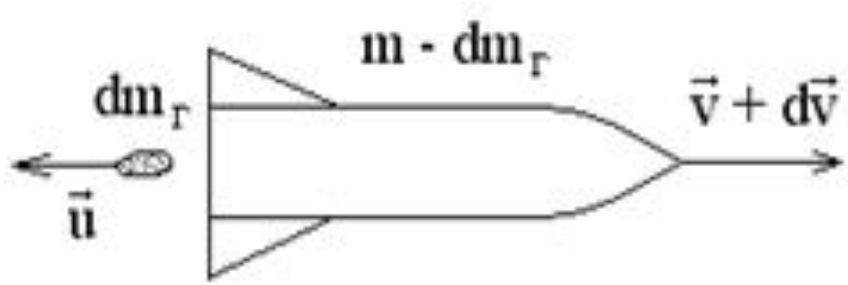
Движение тел с переменной массой

называется ***реактивным движением***

Реактивное движение возникает при отделении от тела некоторой его части с определенной скоростью

- Рассмотрим реактивное движение ракеты с учетом изменения ее массы из-за сгорания топлива. Пусть в момент $t = 0$ масса ракеты равна m_0, а скорость $\overrightarrow{v_0} = 0$. В момент t скорость ракеты равна $\vec{v}$, а масса – m. На рис. представлены величины для ракеты и продуктов сгорания (индекс “г”) в момент времени $t + dt$.

$$d(m\vec{v}) = \vec{F}dt$$



Тогда для ракеты можно записать

$$\vec{F}dt = (m - dm_{\text{г}})(\vec{v} + d\vec{v}) + dm_{\text{г}}\vec{u} - m\vec{v}$$

Преобразуя, получим

Уравнение Мещерского

$$\vec{F}dt = m\vec{v} + md\vec{v} - dm_г\vec{v} - dm_г\overrightarrow{dv} + dm_г\vec{u} - m\vec{v}$$

- Т.к. $dt \to 0 \Rightarrow dm \to 0$ и $d\vec{v} \to 0$, то

$$\vec{F}dt = md\vec{v} - dm_г\vec{v} + dm_г\vec{u}$$

$$\vec{F}dt = md\vec{v} + dm_г(\vec{u} - \vec{v})$$

$$\vec{F}dt = md\vec{v} + dm_г\overrightarrow{v_{отн}}$$

$\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{v_{отн}}$ - скорость истечения газов относительно ракеты

Поделим на dt:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \overrightarrow{v_{отн}}\frac{dm_г}{dt}$$

$dm_г + dm = 0$ – закон сохранения масс

$dm_г = -dm$

Уравнение Мещерского

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \overrightarrow{v_{отн}}\frac{dm}{dt}$$

$\overrightarrow{v_{отн}}\frac{dm}{dt}$ – реактивная сила

И.В. Мещерский (1859-1935)

Формула Циолковского

Пусть на ракету не действуют внешние силы $\vec{F} = 0$.

- $$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \overrightarrow{v_{\text{отн}}}\frac{dm}{dt} \text{ или } md\vec{v} = \overrightarrow{v_{\text{отн}}}\,dm$$

Т.к. ракета движется в направлении противоположном направлению струи, то в проекциях на оси: $\boldsymbol{mdv = -v_{\text{отн}}dm}$. Будем считать, что $v_{\text{отн}} = const$.

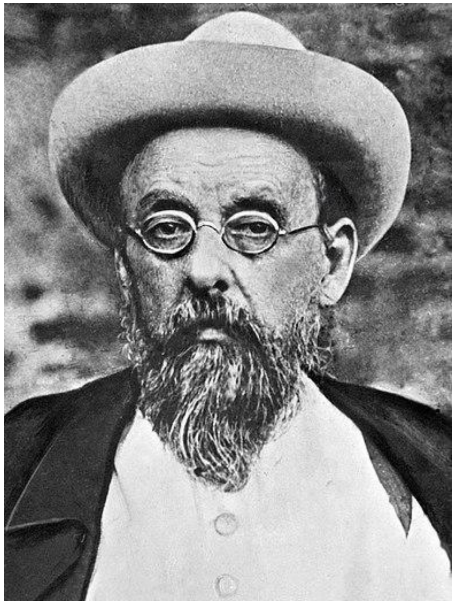
$$dv = -v_{\text{отн}}\frac{dm}{m} \Longrightarrow v = -v_{\text{отн}}\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m} = -v_{\text{отн}}lnm + v_{\text{отн}}lnm_0 = v_{\text{отн}}ln\frac{m_0}{m}$$

$$v = v_{\text{отн}}ln\frac{m_0}{m}$$

Формула Циолковского

$$\frac{m_0}{m} = e^{\frac{v}{v_{\text{отн}}}}$$

Формула Циолковского



Циолковский К.Э.
(1857-1935)

Формула позволяет оценить количество топлива необходимого для космических полетов

Проведем такую оценку для полета вокруг Земли. Минимальное значение скорости, которую должна в этом случае развить ракета равно $v_1 = \sqrt{gR} \approx 8$ км/с (первая космическая скорость).

Скорость газовой струи $v_{\text{отн}} = 1$ км/с

$$\frac{m_0}{m} = e^{\frac{v_1}{v_{\text{отн}}}} \cong 2980$$ – вся масса ракеты приходится на топливо

$$v_{\text{отн}} = 2 \text{ км/с} \quad \Longrightarrow \frac{m_0}{m} \cong 54{,}6\,; \; v_{\text{отн}} = 4 \text{ км/с} \quad \Longrightarrow \frac{m_0}{m} \cong 7{,}4$$

Относительная полезная масса ракеты быстро увеличивается с увеличением скорости газовой струи

Формула Циолковского

Проведем такую оценку для полета за пределы Солнечной системы

Минимальное значение скорости, которую должна в этом случае развить ракета равно $v_3 = 16{,}7$ км/с (третья космическая скорость).

$$v_{\text{отн}} = 4\ \text{км/с} \quad \Longrightarrow \frac{m_0}{m} = e^{\frac{v_3}{v_{\text{отн}}}} \cong 64$$

Для полета туда и обратно необходимо значение: $\frac{m_0}{m} \cong 3600$

Для осуществления межпланетных полетов запас топлива должен превышать массу космического корабля в 3600 раз!

Для полета к α –Центавре (расстояние – 4 световых года) при $v_{\text{отн}} = 10$ км/с и $v = 0{,}25c$ получим: $\frac{m_0}{m} = 1{,}6 \cdot 10^{3257}$

Масса всей нашей галактики $\cong 3 \cdot 10^{41}$ кг

выстрел назад с движущейся тележки
https://www.youtube.com/watch?v=HzHAj62yn5o