УФИМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НЕФТЯНОЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ОПОРНЫЙ ВУЗ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Динамика твердого тела. Момент силы и импульса относительно точки и оси. Момент инерции. Основное уравнение динамики вращательного движения. Закон сохранения момента импульса.

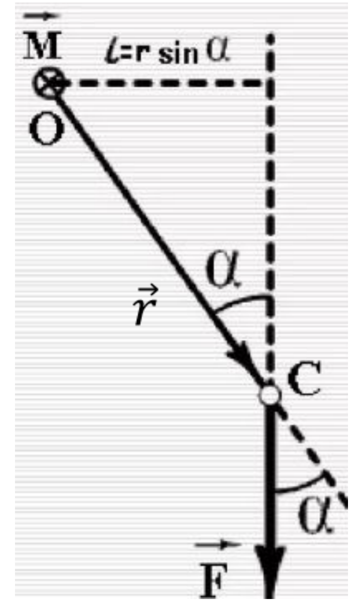
Лекция 2

Ст. преп., к. ф.-м. н. Бачурина Ольга Владимировна

Темы для СРС

1.1 Момент силы

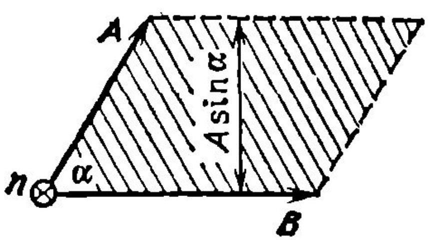
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$



- **Моментом силы** относительно точки О называется вектор $\vec{M}$, модуль которого равен произведению модуля силы $\vec{F}$ на ее плечо l: $$M = F\, r \sin\alpha$$
- **Плечом силы *l*** называют длину перпендикуляра, опущенного из т. *O* на прямую, вдоль которой действует сила.

Вектор $\vec{M}$ направлен перпендикулярно к плоскости, в которой лежит сила и точка *O*, причем так, что направление вращения, обусловленного силой, и направление вектора $\vec{M}$ образуют правовинтовую систему.

- Векторным произведением векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ называют вектор, обозначаемый символом $[\vec{A}, \vec{B}]$ и определяемый формулой: $[\vec{A}, \vec{B}] = AB\sin\alpha * \vec{n}$



где А и В – модули перемножаемых векторов, α – угол между векторами, $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к плоскости, в которой лежат векторы $\vec{A}$ и $\vec{B}$

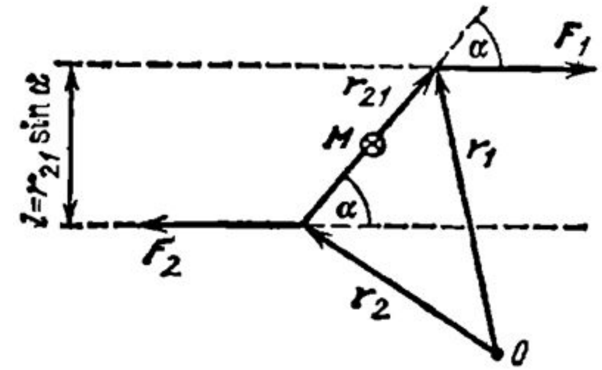
Поворот правого винта в направлении от $\vec{A}$ к $\vec{B}$ вызвал бы его перемещение в направлении $\vec{n}$.

$$[\text{M}] = \text{Н} \cdot \text{м} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}$$

1.1 Момент силы

- Можно написать, что $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки приложения силы, проведенный из точки, относительно которой определяется момент.
- Проекция вектора $\vec{M}$ на произвольную ось z, проходящую через точку О, называется моментом силы относительно этой оси:

$$M_z = [\vec{r}, \vec{F}]_z$$



- Две равные по модулю противоположно направленные силы, не действующие вдоль одной прямой называются *парой сил.*
- Расстояние l между прямыми, вдоль которых действует силы, называется плечом пары.

Суммарный момент сил относительно точки *O* равен $\vec{M} = [\vec{r}_1, \vec{F}_1] + [\vec{r}_2, \vec{F}_2]$

- Учтя, что $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$, можно записать: $\vec{M} = [\vec{r}_1, \vec{F}_1] - [\vec{r}_2, \vec{F}_1] = [\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{F}_1]$

где $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}_{21}$.Полученное выражение не зависит от положения точки *O*.

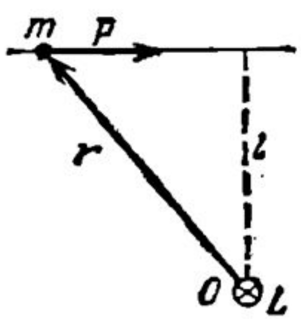
- Следовательно, *момент пары сил относительно любой точки будет одним и тем же. Вектор $\vec{M}$ направлен к плоскости, в которой лежат силы, а его модуль равен произведению модуля любой из этих сил на плечо*.

Направление момента силы определяется по правилу правой руки

1.2 Момент импульса

- **Моментом импульса** материальной точки относительно точки *O* называется векторная величина: $\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{v}]$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор, определяющий положение частицы относительно точки *O*.
- *Частица обладает моментом импульса, независимо от формы траектории, по которой она движется.* Рассмотрим два случая:

1.Частица движется вдоль прямолинейной траектории. Модуль импульса $L = mvl$



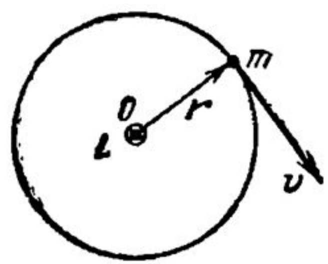
может изменяться только за счет изменения модуля скорости.

$$[L] = Дж \cdot с = \frac{кг \cdot м^2}{с}$$

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

2. Частица движется по окружности радиуса r. Модуль момента импульса относительно центра окружности равен

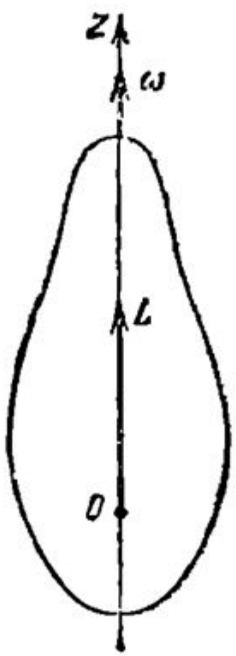
$$L = mvr$$



может изменяться только за счет изменения модуля скорости.

- Несмотря на непрерывное изменение направление вектора $\vec{p}$, направление вектора $\vec{L}$ остается постоянным.

1.3 Момент инерции



- Найдем момент импульса твердого тела относительно оси вращения z, то есть проекцию вектора $\vec{L}$ на ось z. На рис. видно, что проекция L_{zi} момента $\vec{L}_i$ на ось z равна его модулю L_i, умноженному на косинус угла φ_i: $L_{zi} = L_i \cos\varphi_i$. Поскольку угол между векторами r_i и v_i прямой, $L_i = \Delta m_i r_i v_i$. Следовательно,

$$L_{zi} = \Delta m_i r_i v_i \cos\varphi_i = \Delta m_i R_i v_i$$

где R_i расстояние массы Δm_i от оси вращения (рис.). Вспомним, что $v_i = \omega R_i$. С учетом этого: $L_{zi} = \omega R_i^2 \Delta m_i$

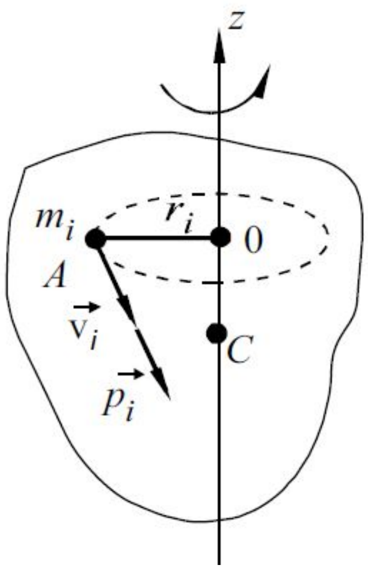
- Проекция момента импульса тела L_z равна сумме проекций L_{zi}: $L_z = \sum L_{zi} = \sum \omega R_i^2 \Delta m_i = \omega \sum R_i^2 \Delta m_i$.Полученное выражение не зависит от положения на оси вращения точки O, относительно которой определяется момент импульса тела $\vec{L}$. $\boldsymbol{L_z = \omega I}$

Моментом инерции тела относительно некоторой оси называется величина, равная сумме произведений элементарных масс на квадрат расстояний от этой оси:

$$I = \sum R_i^2 \Delta m_i$$

Всякое тело, независимо от того, вращается оно или покоится, обладает моментом инерции относительно любой оси, подобно тому как тело обладает массой независимо от того, движется оно или находится в покое.

1.3 Момент инерции



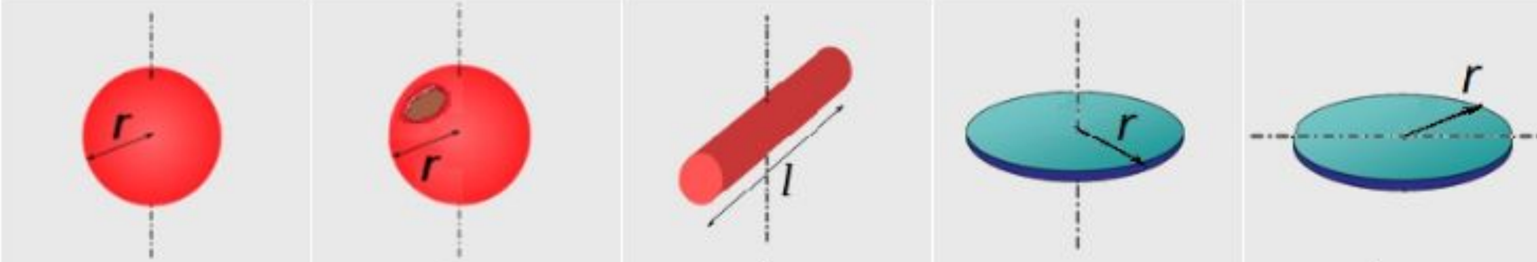
- Рассмотрим тело массой *m*, вращающееся вокруг неподвижной
 оси *z*. Мысленно разобьем его на систему материальных точек.
- Пусть материальная точка *A* массой *mi* отстоит от оси вращения
на расстоянии *ri*. Скалярная физическая величина *Ii*, равная произ ведению массы материальной точки на квадрат расстояния от нее до оси вращения, называется *моментом инерции материальной точки:* $I_i = m_i r_i^2$
- При непрерывном распределении массы в теле данная сумма сводится к интегралу:

$$J = \int\limits_{(m)} r^2 dm = \int\limits_{(V)} \rho r^2 dV$$

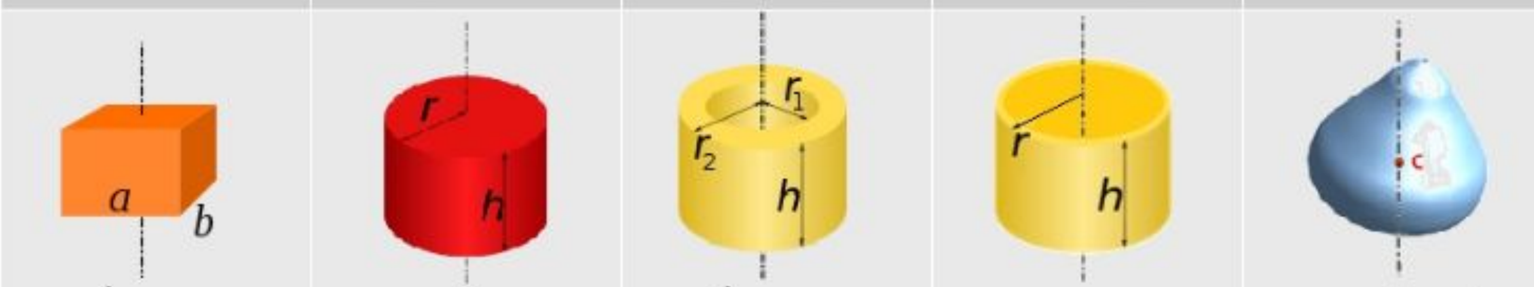
- **В СИ момент инерции измеряется в килограммах на метр в квадрате (кг*м2).**

1.3 Момент инерции тел

Моменты инерции некоторых тел

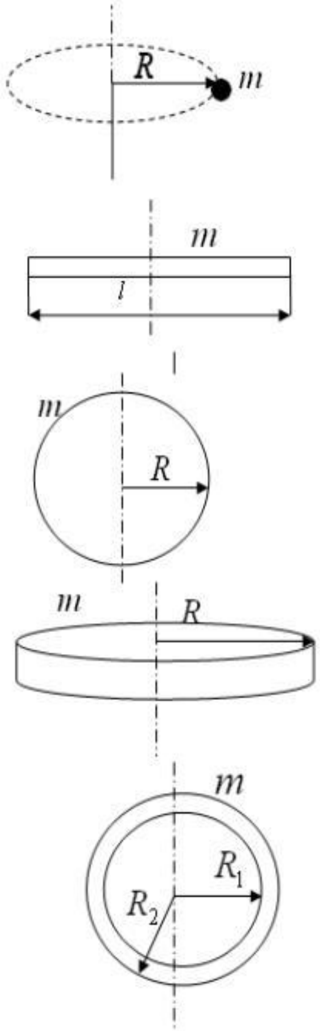


Шар	Тонкостенная сфера	Однородный стержень	Диск	Диск
$I = \frac{2}{5}mr^2$	$I = \frac{2}{3}mr^2$	$I = \frac{1}{12}ml^2$	$I = \frac{1}{2}mr^2$	$I = \frac{1}{4}mr^2$



Однородная пластинка	Сплошной цилиндр	Толстостенный цилиндр	Тонкостенный цилиндр	Произвольное тело
$I = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$	$I = \frac{1}{2}mr^2$	$I = \frac{1}{2}m(r_1^2 + r_2^2)$	$I = mr^2$	$I = \Sigma m_i r_i^2$

1.3 Момент инерции тел



Тело	Момент инерции
Материальная точка	$I = mR^2$
Стержень	$I_{ст} = \frac{ml^2}{12}$
Шар	$I_{ш} = \frac{2}{5}mR^2$
Диск	$I_{д} = \frac{mR^2}{2}$
Кольцо	$I_{к} = m\frac{R_1^2 + R_2^2}{2} \approx mR^2$ $R_1 \approx R_2 \approx R$

1.5 Закон сохранения момента импульса

- Рассмотрим систему частиц, на которые действуют как внутренние, так и внешние силы. Моментом импульса $\vec{L}$ системы относительно точки *O*. называется сумма моментов импульса $\vec{L}_i$ отдельных частиц: $\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum[\vec{r}_i, \vec{p}_i]$

Дифференцирование по времени дает, что: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \frac{d\vec{L}_i}{dt}$

- В соответствии с $I = \sum R_i^2 \Delta m_i$ для каждой из частиц можно написать:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M}_{i\text{внутр}} + \sum \vec{M}_{i\text{внеш}}$$

Каждое из слагаемых в этих суммах представляет собой сумму моментов сил, действующих на *i*-ю частицу. Суммирование осуществляется по частицам. Если перейти к суммированию по отдельным силам, независимо от того, к какой из частиц они приложены, индекс *i* в суммах можно опустить.

- Сумма моментов всех внутренних сил для любой системы частиц равна нулю.

Поэтому окончательно получаем: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M}_{i\text{внеш}}$

Если система замкнута, правая часть (3) равна нулю и, следовательно, вектор $\vec{L}$ не со временем. Отсюда вытекает **закон сохранения момента импульса: момент импульса замкнутой системы материальных точек остается постоянным**

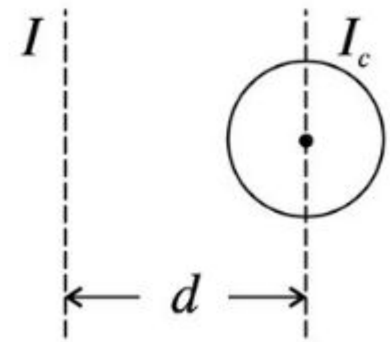
$$\boldsymbol{\vec{L} = const}$$

1.4 Теорема Штейнера

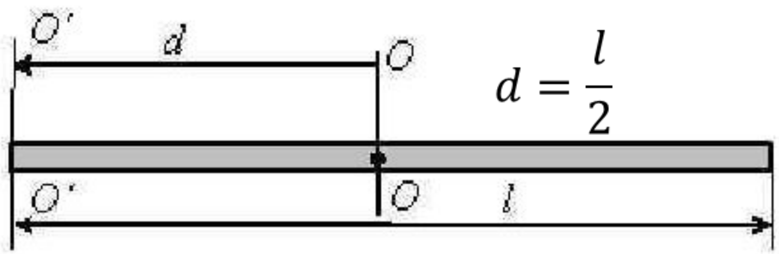
- Если известен момент инерции относительно оси, проходящей через центр инерции тела I_C, то можно вычислить момент инерции относительно параллельной оси :

$$I = I_C + md^2$$

m – масса тела, d – расстояние между осями



Пример: момент инерции однородного стержня относительно оси, проходящей через конец стержня



$$d = \frac{l}{2}$$

$$I_{o'o'} = I_{oo} + md^2 = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ml^2$$

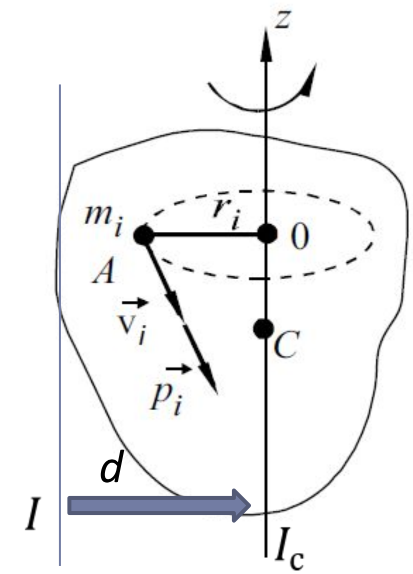
Основные понятия лекции 2

- 1.Момент силы $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ $M = F\,r\sin\alpha$ [M]=Н*м
- 2. Момент импульса $\vec{L} = [\vec{r},\vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{v}]$ $[\mathrm{L}] = \text{Дж}\cdot\text{с} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}}$

  $L = \omega I$
- *Частица обладает моментом импульса, независимо от формы траектории, по которой она движется.*
- 3. Момент инерции м.т.: $I_i = m_i r_i^2$ *тела:* $I = \sum I_i$

  $[I]$=кг · м^2
- 4. Теорема Штейнера: $\mathrm{I} = \mathrm{I_C} + \mathrm{md}^2$
- 5. Закон сохранения момента импульса $\vec{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{const}$; $\boldsymbol{I}\ \boldsymbol{\omega} = \text{const}$

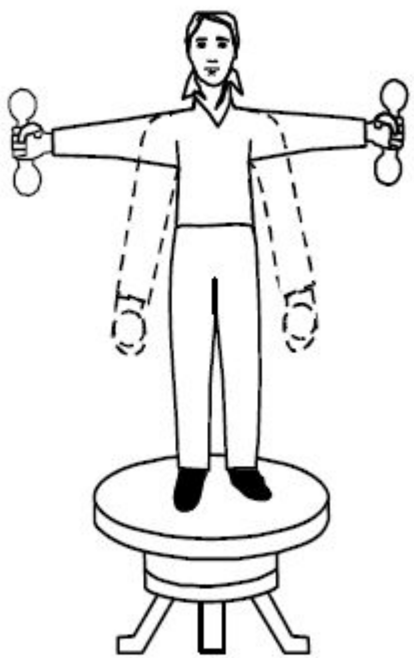
  или $\boldsymbol{I_1\omega_1 = I_2\omega_2}$



Момент импульса замкнутой системы со временем не изменяется

1.5 Закон сохранения момента импульса

- **Если у тела, совершающего вращательное движение, под действием внутренних сил увеличивается момент инерции, то это приводит к уменьшению его угловой скорости вращения, и на**



Законы сохранения момента импульса можно иллюстрировать с помощью *скамьи Жуковского* (см. рис.). На платформу, которая может вращаться вокруг вертикальной оси, встает человек и вытягивает в стороны руки. Платформа приводится во вращательное движение. При опускании рук вниз уменьшается момент инерции человека ($J2 < J1$), а следовательно, увеличивается угловая скорость вращения ($\omega 2 > \omega$)

1.6 Основное уравнение динамики вращательного движения

- Выясним, от чего зависит изменение момента импульса частицы.

Продифференцируем $\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{v}]$ по времени:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{r}, m\vec{v}] = [\vec{r}, m\dot{\vec{v}}] + [\dot{\vec{r}}, m\vec{v}]$$

- Согласно второму закону Ньютона $m\dot{\vec{v}} = \vec{F}$ а векторное произведение $[\dot{\vec{r}}, m\vec{v}] = [\vec{v}, m\vec{v}]$ коллинеарных векторов равно нулю. Тогда $[\vec{r}, m\dot{\vec{v}}] = \vec{M}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \qquad \vec{L} = \vec{\omega} I = \frac{d(\vec{\omega} I)}{dt}$$

- **Скорость изменения момента импульса со временем равна суммарному моменту сил, действующих на частицу.**

$$\boxed{\vec{M} = I \cdot \vec{\varepsilon}}$$

Момент силы, действующей на тело, равен произведению момента инерции тела на угловое ускорение

1.7 Кинетическая энергия вращательного движения тела

- Когда тело вращается вокруг неподвижной оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$, элементарная масса Δm_i, отстоящая от оси вращения на расстояние R_i, обладает скоростью $v_i = \omega R_i$. Следовательно, кинетическая энергия равна:

$$(\Delta E_k)_i = \frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\Delta m_i \omega^2 R_i^2$$

- Сумма энергий $(\Delta E_k)_i$ даст кинетическую энергию всего тела:

$$E_k = \sum (\Delta E_k)_i = \frac{1}{2}\omega^2 \sum R_i^2 \, \Delta m_i$$

- Т.к. $I = \sum R_i^2 \Delta m_i$, то $\boldsymbol{E_k = \frac{1}{2} I \omega^2}$**.** Это выражение аналогично выражению для кинетической энергии материальной точки. Роль массы играет момент инерции, а роль линейной скорости – угловая скорость.
- **В случае, когда тело совершает одновременно поступательное и вращательное движение (например, шар катится по плоскости), его кинетическая энергия равна сумме кинетических энергий поступательного и вращательного движений:**

$$E_k = E_k^{\text{пост}} + E_k^{\text{вращ}} = \frac{m\mathrm{v}^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$$

1.7 Кинетическая энергия вращательного движения

- Когда тело вращается вокруг неподвижной оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$, элементарная масса Δm_i, отстоящая от оси вращения на расстояние R_i, обладает скоростью $v_i = \omega R_i$. Следовательно, кинетическая энергия равна:

$$(\Delta E_k)_i = \frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\Delta m_i \omega^2 R_i^2$$

- Сумма энергий $(\Delta E_k)_i$ даст кинетическую энергию всего тела:

$$E_k = \sum (\Delta E_k)_i = \frac{1}{2}\omega^2 \sum R_i^2 \, \Delta m_i$$

- Т.к. $I = \sum R_i^2 \Delta m_i$, то $\boldsymbol{E_k = \frac{1}{2} I \omega^2}$**.** Это выражение аналогично выражению для кинетической энергии материальной точки. Роль массы играет момент инерции, а роль линейной скорости – угловая скорость.
- *Найдем работу, совершаемую внешней силой при вращении твердого тела*. Рассмотрим частный случай, когда сила направлена по касательной к окружности, по которой движется точка приложения силы. В этом случае сила $\vec{F}$ и перемещение $d\vec{s}$ точки ее приложения коллинеарны. Элементарная работа: $dA = F_s ds = F_s R d\varphi$

1.6 Работа и мощность вращательного движения тела

- При неподвижной оси вращения потенциальная энергия вращающегося твердого тела не изменяется и работа внешних сил идет на приращение кинетической энергии тела.
- Используя $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$ для элементарной работы, запишем:

$$dA = d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = \frac{1}{2}I \cdot 2 \cdot \omega d\omega = I\omega d\omega$$

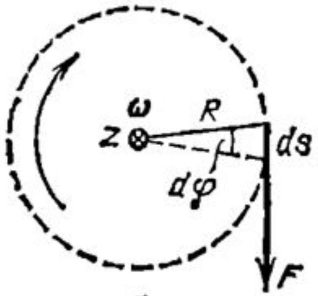
Но: $Id\omega = dL$ тогда $dA = \omega dL$. Так как $dL = Mdt$ следовательно

$dA = M\omega dt$ $[\omega dt = \mathrm{d}\varphi]$ $\longrightarrow$ $\boldsymbol{dA = M\,\mathrm{d}\varphi}$

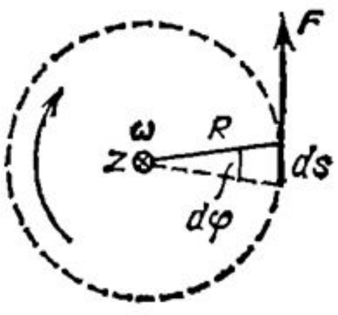
- Отсюда находится работа при вращательном движении: $\boldsymbol{A = \int M\, d\varphi}$
- Мощность: $N = \dfrac{dA}{dt} = M\dfrac{d\varphi}{dt} = M\omega$

- *Мощность при вращательном движении равна произведению момента внешних сил на угловую скорость вращения*

1.7 Кинетическая энергия вращательного движения



а



б

- В случае *а* на рис. сила действует в направлении перемещения, поэтому F_s равна модулю силы F и $dA = FRd\varphi$. В случае б сила и перемещение направлены противоположно, поэтому $F_s = -F$ и $dA = -FRd\varphi$. Оба выражения для работы можно представить одной формулой:

$$dA = M_z d\varphi$$

- Поскольку направления оси z и вектора $\vec{\omega}$ совпадают, последнюю формулу можно представить в виде:

$$\boldsymbol{dA = M_\omega d\varphi}$$

где M_ω проекция $\vec{M}$ на направление вектора $\vec{\omega}$.

Формула сходна с формулой $dA = F_s ds$.

В случае, когда тело совершает одновременно поступательное и вращательное движение (например, шар катится по плоскости), его кинетическая энергия равна сумме кинетических энергий поступательного и вращательного движени

$$E_k = E_k^{\text{пост}} + E_k^{\text{вращ}} = \frac{m\text{v}^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$$

Таблица сопоставления формул механики поступательного движения и вращения вокруг неподвижной оси

Поступательное движение			***Вращательное движение***		
Кинематические характеристики движения					
Путь	S	м	Угол поворота	φ, j	рад
Время	t	с	Период	T	с
Скорость	V	м/с	Угловая скорость	w	рад/с
Ускорение	a	м/с^2	Угловое ускорение	e	рад/с^2
Динамические характеристики движения					
Масса	m	кг	Момент инерции	J	кг × м^2
Сила	F	Н	Момент силы	M	Н × м
Импульс	p	кг × м/с	Момент импульса	$L = J \times w$	кг × м^2 /с
Второй закон Ньютона	$F = ma;\ F = dp/dt$		Уравнение динамики вращательного движения	$M = J \times e;\ M = dL/dt$	
Работа	$dA = F \times dS$	Дж	Работа	$dA = M \times dj$	Дж
Кинетическая энергия	$E_K = (mV^2)/2$	Дж	Кинетическая энергия	$E_{KBP} = (Jw^2)/2$	Дж
Мощность	$N = FV$	Вт	Мощность	$N = M \times w$	Вт

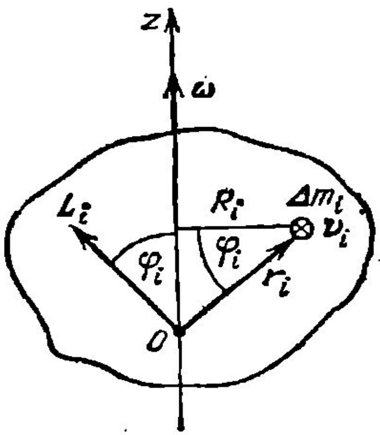
Таблица сопоставления формул механики поступательного движения и вращения вокруг неподвижной оси

Поступательное движение	Вращательное движение
$\vec{v}$ — линейная скорость	$\vec{\omega}$ — угловая скорость
$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ — линейное ускорение	$\vec{\varepsilon} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$ — угловое ускорение
m — масса	I — момент инерции
$\vec{p} = m\vec{v}$ — импульс	$\vec{L} = I\vec{\omega}$ — момент импульса
$\vec{F}$ — сила	M — момент силы
$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$ -уравнение движения	$M = \frac{\Delta L}{\Delta t}$ -уравнение движения
$\vec{F} = m\vec{a}$ -уравнение движения	$M = I\varepsilon$ -уравнение движения
$E_к = \frac{mv^2}{2}$ - кинетическая энергия	$E_к = \frac{I\omega^2}{2}$ - кинетическая энергия
$A = F_s s$ - работа	$A = M\varphi$ - работа

Сводная таблица

Поступательное	Вращательное
Равномерное	
$s = v \cdot t$	$\varphi = \omega \cdot t$
$v = const$	$\omega = const$
$a = 0$	$\varepsilon = 0$
Равнопеременное	
$s = v_0 t \pm \frac{at^2}{2}$	$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}$
$v = v_0 \pm a \cdot t$	$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon \cdot t$
$a = const$	$\varepsilon = const$
Неравномерное	
$s = f(t)$	$\varphi = f(t)$
$v = \frac{ds}{dt}$	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$

1.8 Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси



- Разобьем тело, вращающееся вокруг неподвижной оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$ на элементарные массы Δm_i
- Согласно $\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$, момент импульса *i*-й элементарной массы Δm_i относительно точки *O*, лежащей на оси вращения, равен $\vec{L}_i = \Delta m_i[\vec{r}_i, \vec{v}_i]$
- Здесь $\vec{r}_i$ – радиус-вектор, определяющий положение массы Δm_i относительно точки O, v_i – скорость *i*-й элементарной массы.
- Момент импульса $\vec{L}$ равен сумме моментов импульса элементарных масс: $\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum \Delta m_i[\vec{r}_i, \vec{v}_i]$.

Из сделанного рисунка следует, что в случае несимметричного тела векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{L}$ неколлинеарны. Поэтому при равномерном вращении момент импульса описывает конус оси вращения (рис.). При неравномерном вращении тела вектор $\vec{L}$, поворачиваясь вместе с телом, изменяет свою «длину».