Устойчивость нелинейных АСУ

Рассматривая нелинейные системы, вводят понятия устойчивости "в малом", "в большом" и "в целом":

- – система устойчива "в малом", если лишь констатируется факт наличия области устойчивости, но границы ее не определены;
- – система устойчива "в большом", когда определены границы области устойчивости, т.е. определены границы области начальных отклонений, при которых система возвращается в исходное состояние;
- – система, которая возвращается в исходное состояние при любых начальных отклонениях, называется устойчивой "в целом". Для некоторого класса систем устойчивость "в целом" называется абсолютной устойчивостью.

Понятие устойчивости движения

ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ БЫЛА СОЗДАНА ВЕЛИКИМ РУССКИМ МАТЕМАТИКОМ АЛЕКСАНДРОМ МИХАЙЛОВИЧЕМ ЛЯПУНОВЫМ (1857 – 1918) В СВЯЗИ С ЗАДАЧАМИ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ.

ЛЮБАЯ СИСТЕМА, БУДЬ ОНА ИДЕАЛЬНОЙ (ЕСЛИ НА НЕЕ НЕ ДЕЙСТВУЮТ НИКАКИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ) ИЛИ РЕАЛЬНОЙ, ОПИСЫВАЕТСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ, РЕШЕНИЕ КОТОРЫХ ОПРЕДЕЛЯЕТ ТРАЕКТОРИЮ ЕЕ ДВИЖЕНИЯ.

ДВИЖЕНИЕ НАЗЫВАЕТСЯ *НЕВОЗМУЩЕННЫМ*, ЕСЛИ ОНО ПОЛУЧЕНО В РЕЗУЛЬТАТЕ РАССМОТРЕНИЯ ИДЕАЛИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ.

ДВИЖЕНИЕ С УЧЕТОМ ВОЗМУЩЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В РЕАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ, НАЗЫВАЕТСЯ *ВОЗМУЩЕННЫМ*.

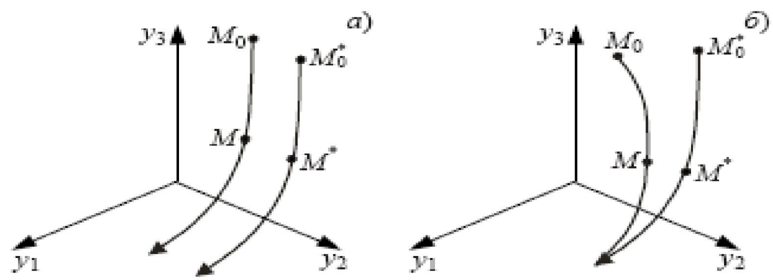
Невозмущенное движение называется *устойчивым*, если достаточно малые возмущения сколь угодно мало отклоняют возмущенное движение от невозмущенного. Если же возмущенное движение заметно отклоняется от невозмущенного при сколь угодно слабых возмущениях, то оно называется *неустойчивым*.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЛЯПУНОВУ

Движение называется устойчивым по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать число $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства $\|y_0 - y_0'\| < \eta(\varepsilon)$ при $t = t_0$ следует неравенство $\|y - y'\| < \varepsilon$ для всех $t > t_0$.

Смысл понятия устойчивости по Ляпунову состоит в том, что движение устойчиво, если при достаточно малом начальном сдвиге M_0' от M_0 точка M' в последующем движении достаточно близка к M

Если же подобрать такое $\eta(\varepsilon)$ нельзя, то движение неустойчиво



АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

Если при движении в пространстве точки M и M' неограниченно сближаются и разности их координат $(y_i - y_i') \to 0$, то возмущенное движение постепенно возвращается к невозмущенному. Такое движение называется асимптотически устойчивым.

Движение называется асимптотически устойчивым, если можно подобрать такое η, что, если $\|y_0 - y_0'\| < \eta$, то выполняется условие $\|y - y'\| \to 0$ при $t \to \infty$.

Понятие асимптотической устойчивости более узко, чем понятие устойчивости по Ляпунову. Если движение асимптотически устойчиво, то оно наверняка устойчиво по Ляпунову. Но обратное утверждение, вообще говоря, несправедливо. Движение может быть устойчивым по Ляпунову, но не являться асимптотически устойчивым.

Первый метод Ляпунова

- **Теорема 1.** Если линейная система первого приближения устойчива, то соответствующее состояние равновесия нелинейной системы также устойчиво по Ляпунову.

- **Теорема 2.** Если линейная система первого приближения неустойчива, то соответствующее состояние равновесия нелинейной системы также неустойчиво по Ляпунову.

- **Теорема 3.** Если линейная система первого приближения находится на границе устойчивости, то судить об устойчивости исходной нелинейной системы по уравнениям первого приближения нельзя. В этом случае необходимо рассматривать исходную нелинейную систему.

Эти теоремы позволяют судить по результатам исследования уравнений первого приближения об устойчивости в "малом" состояния равновесия исходной нелинейной системы (при учете только первых членов разложения в ряд Тейлора нелинейной зависимости) .

Второй метод Ляпунова

Ляпунов вводит в рассмотрение специальную функцию **V(y1,y2,....,yn)**, со следующими свойствами:

1. Функция **V(y1,y2,....,yn)** непрерывна со всеми своими частными производными первого порядка в области, содержащей начало координат.
2. В начале координат функция **V(y1,y2,....,yn)** принимает нулевое значение, т.е. при y1 =0, y2 =0, ..., yn= 0 , **V(y1,y2,....,yn) =0.**
3. Всюду внутри рассматриваемой области функция **V(y1,y2,....,yn)** является **знакоопределенной**, т.е. либо

V > 0 , либо **V < 0** .

Полная производная от **V(y1,y2,....,yn)** по времени

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial V}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dt}.$$

ЗНАКООПРЕДЕЛЕННЫЕ ФУНКЦИИ

- Функция **V** - **знакоопределенная**, если во всех точках вокруг начала координат она сохраняет один и тот же знак и нигде, кроме начала координат, не обращается в нуль.

$$V = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$$ **- знакоопределенная положительная**, при всех вещественных значениях

y1, y2,...,yn она положительна (**V > 0**) и только, когда одновременно y1 =0 , y2 =0, ..., yn= 0, она обращается в нуль (**V = 0**).

$$V = -\left(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2\right)$$ **- знакоопределенная отрицательная**.

ЗНАКОПОСТОЯННЫЕ И ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ ФУНКЦИИ

- Функция **V - знакопостоянна**, если сохраняет один и тот же знак, но может обращаться в нуль не только в начале координат, но и в других точках.

$V = (y_1 + y_2)^2 + y_3^2$ - **знакопостоянная** функция, она равна нулю кроме начала координат, еще на прямой y2 = − y1 и y3 =0, во всех остальных точках она положительна.

- Функция **V – знакопеременная функция**, если вокруг начала координат она меняет свой знак.

V=y1+y2 - знакопеременная функция . Она положительна для всех точек справа от прямой y1 = − y2 и отрицательна слева от этой прямой.

Теоремы Ляпунова

В основе второго метода Ляпунова лежит теорема Дирихле:

равновесие устойчиво, если в положении равновесия потенциальная энергия системы имеет минимум.

Теорема 1. Если существует знакоопределенная функция $V(y_1, y_2, ..., y_n)$ производная которой по времени **dV/dt,** тоже знакоопределенная (или знакопостоянная), но имеет знак, противоположный знаку **V**, или тождественно равна нулю **($V<0$, $dV/dt \geq 0$)**, то нелинейная система **устойчива**.

Теорема 2. Если существует знакоопределенная функция $V(y_1, y_2, ..., y_n)$, производная которой по времени, представляет знакоопределенную функцию противоположного с **V** знака,**($V>0$, $dV/dt <0$)** то нелинейная система **асимптотически устойчива**.

Теорема 3. Если существует функция $V(y_1, y_2, ..., y_n)$, производная которой по времени **dV/ dt**, представляет знакоопределенную функцию, причем в сколь угодно малой окрестности начала координат есть область, где знак функции **V** совпадает со знаком производной **dV/ dt**, **($V>0$, $dV/dt >0$),** то состояние системы **$y1=y2=y3=....=yn=0$** **неустойчиво**.

Построение функции Ляпунова

ПРИ ПРАКТИЧЕСКОМ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ВТОРОГО МЕТОДА ЛЯПУНОВА ОДНОЙ ИЗ ОСНОВНЫХ ПРОБЛЕМ ЯВЛЯЕТСЯ **ВЫБОР ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА - $V(y_1,y_2,....y_n)$**.

ОБЩЕГО МЕТОДА ЕЕ ВЫБОРА НЕ СУЩЕСТВУЕТ, НО ИМЕЮТСЯ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО СОСТАВЛЕНИЮ ФУНКЦИИ $V(y_1,y_2,....y_n)$ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО КЛАССА СИСТЕМ.

ЧАЩЕ ВСЕГО ЭТУ ФУНКЦИЮ ВЫБИРАЮТ В ВИДЕ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ.

Пример. **Исследовать**

заданной уравнениями:

$$\frac{dx_1}{dt} = -(x_1 - \beta\ x_2)(1 - ax_1^2 - bx_2^2);$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -(x_2 + \alpha\ x_1)(1 - ax_1^2 - bx_2^2),$$

где α, β, a, b - положительные постоянные числа.

Р е ш е н и е. Выбираем положительно-определенную функцию Ляпунова

$$V = \alpha x_1^2 + \beta x_2^2.$$

Находим производную от функции Ляпунова по времени

$$W = \frac{dV}{dt} = 2\alpha x_1 \frac{dx_1}{dt} + 2\beta x_2 \frac{dx_2}{dt} =$$

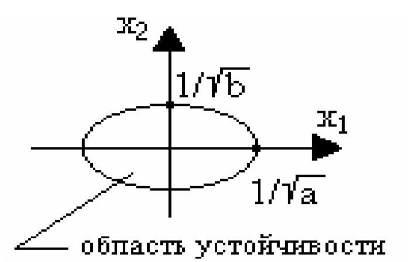
$$= -2\alpha x_1 (x_1 - \beta x_2)(1 - ax_1^2 - bx_2^2) - 2\beta x_2 (x_2 + \alpha x_1)(1 - ax_1^2 - bx_2^2) =$$

$$= -2(1 - ax_1^2 - bx_2^2)(\alpha x_1^2 + \beta x_2^2).$$

Тогда $W < 0$ при $(1 - ax_1^2 - bx_2^2) > 0$ или $ax_1^2 + bx_2^2 < 1$.

$ax_1^2 + bx_2^2 = 1.$

Это достаточное условие устойчивости исследуемой нелинейной системы. Границей устойчивости системы на плоскости ее координат является эллипс



Область устойчивости нелинейной системы

Частотный критерий абсолютной устойчивости В.М.Попова

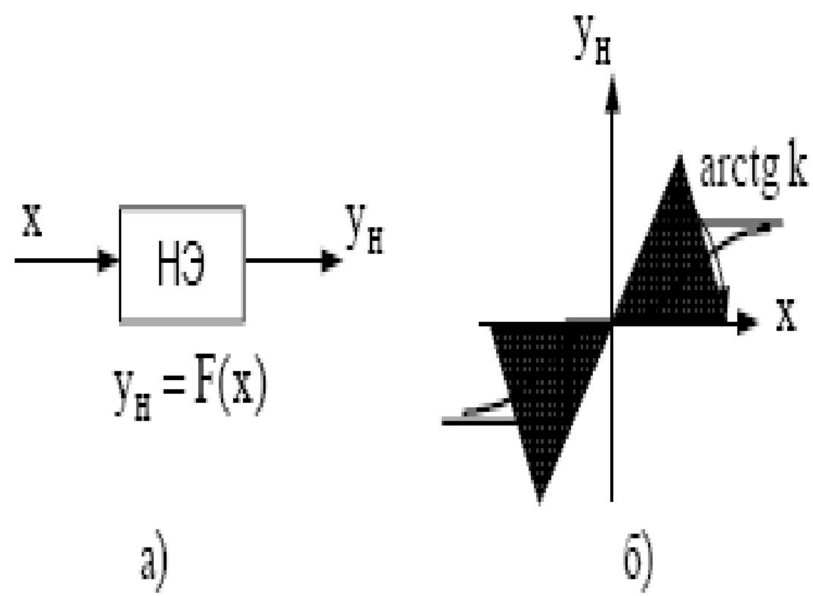
Частотный метод В.М. Попова решает задачу об **абсолютной устойчивости системы** с одной однозначной нелинейностью, заданной предельным значением коэффициента передачи ***k*** нелинейного элемента. Если в системе управления имеется лишь одна однозначная нелинейность Yн = F(x),то, объединив вместе все остальные звенья системы в линейную часть, можно получить ее передаточную функцию

Wлч (p) .

Yн = F(x) имеет любое очертание, не выходящее за пределы заданного угла arctg ***k* ,** т.е. при любом x

$$\mathbf{0 \le F(x) \le} \boldsymbol{k}\ \mathbf{x.}$$

Yн = F(x) – нелинейность подкласса (0;k)



а) нелинейный элемент;
б) статические характеристики

Теорема В.М. Попова

Для установления абсолютной устойчивости нелинейной системы достаточно подобрать такое конечное действительное число *q*, при котором для всех частот $\omega \geq 0$

$$\mathrm{Re}\,[(1+ j\,\omega\, q)W_{лч}(j\,\omega)] + 1/k > 0\ ,$$

где: k -предельное значение коэффициента передачи нелинейного элемента;

$W_{лч}(j\,\omega)$ - амплитудно-фазочастотная характеристика линейной части системы.

Все полюсы передаточной функции линейной части системы должны быть с отрицательными вещественными частями или же кроме них имеется еще не более двух нулевых.

При наличии одного нулевого полюса **требуется еще,**

чтобы $\mathrm{Im}\,W_{лч}(j\,\omega) \to -\infty$ при $\omega \to 0$,

а при двух нулевых полюсах

$\mathrm{Re}\,W_{лч}(j\,\omega) \to -\infty$ при $\omega \to 0$, а $\mathrm{Im}\,W_{лч}(j\,\omega) < 0$ при малых ω.

Введем **видоизмененную частотную характеристику линейной части системы W*(j ω)** , которая определяется :

$$\begin{cases} U^*(j\omega) = \mathrm{Re}\ W^*(j\omega) = \mathrm{Re}\ W_{лч}(j\omega), \\ V^*(j\omega) = \mathrm{Im}\ W^*(j\omega) = \omega T_0 \mathrm{Im}\ W_{лч}(j\omega), \end{cases}$$

где: T_0 = 1 с - нормирующий множитель.

Преобразуем левую часть неравенства

$$\mathrm{Re}[(1+j\omega q)W_{лч}(j\omega)] + \frac{1}{k} = \mathrm{Re}\, W_{лч}(j\omega) - \omega q\, \mathrm{Im}\, W_{лч}(j\omega)] + \frac{1}{k}$$

Для теоремы В.М. Попова при всех ω ≥ 0 получим условие:

$$U^*(\omega) - \frac{q}{T_0} V^*(\omega) + \frac{1}{k} > 0$$

.

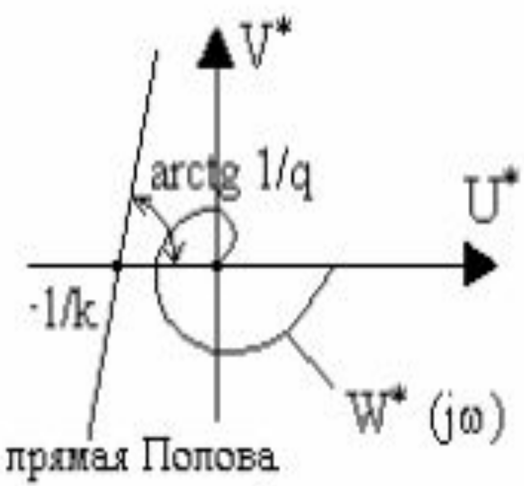
Равенство:

$$U^*(\omega) - \frac{q}{T_0} V^*(\omega) + \frac{1}{k} = 0$$

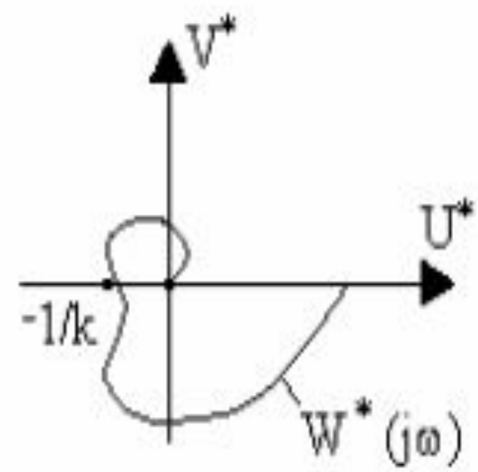
является уравнением прямой на плоскости W*(j ω), называемой **прямой Попова,** она проходит через точку с координатами **[−1/k, j0]** и имеет угловой коэффициент наклона к оси абсцисс **1/q.**

Графическая интерпретация теоремы В.М.Попова

Для установления абсолютной устойчивости нелинейной системы достаточно подобрать такую прямую на комплексной плоскости, проходящую через точку (− 1/ *k* , j0), чтобы вся кривая W*(j ω) лежала справа от этой прямой. Условия выполнения теоремы показаны на рисунке



а)



б)

Абсолютная устойчивость – это устойчивость для любой нелинейности внутри заданного сектора (0;k).

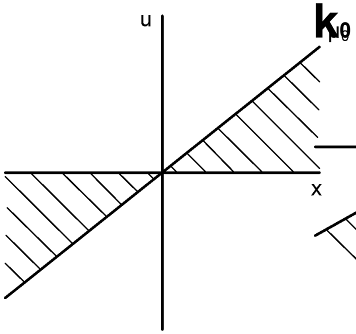
а -абсолютно устойчивая система;

б -система не имеет абсолютной устойчивости

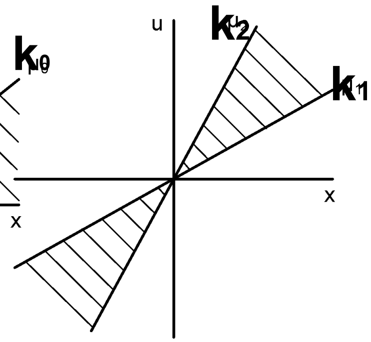
Правило применения критерия Попова

1. На комплексной плоскости строим модифицированный годограф **$W^*(j\ \omega)$**.
2. Отмечаем точку **$(-\ 1/\ k\ ,\ j0)$**, определяемую сектором нелинейности.
3. Пытаемся провести через эту точку какую-нибудь прямую с наклоном **q** так, чтобы годограф **$W^*(j\ \omega)$**. оказался правее. Система будет абсолютно устойчивой, если это возможно.
4. Учитываем, что критерий Попова – только достаточное условие.

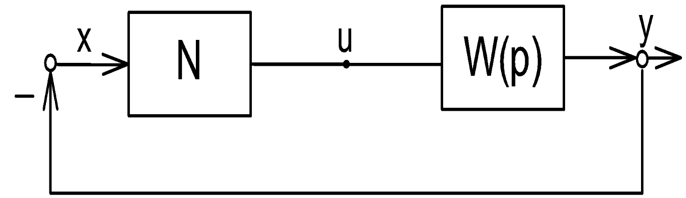
Критерий Попова для систем с неустойчивой линейной частью

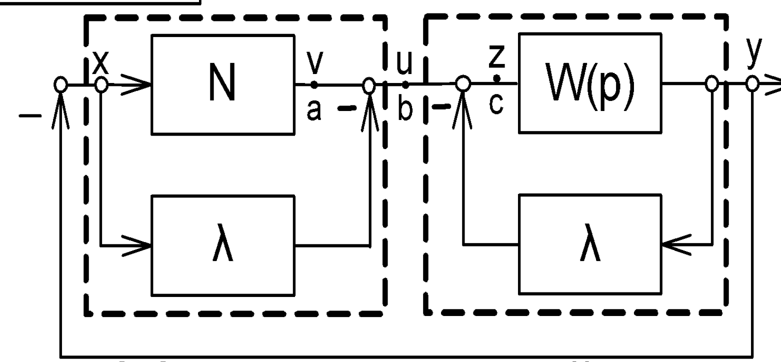


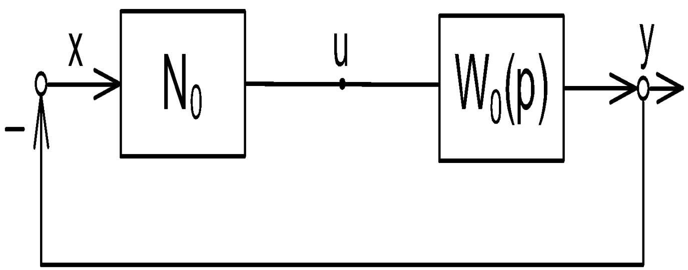
Базовый случай (A)
Сектор S[μ_0]
$\mu_1=0$, $\mu_2=\mu_0$



Общий случай (B)
Сектор S[μ_1,μ_2]







$$N_0(x) = N(x) - \lambda x; \quad W_0(p) = \frac{W(p)}{1 + \lambda W(p)}$$

Охватываем блок W(p) отрицательной обратной связью с коэффициентом λ; блок N охватываем прямой отрицательной связью с коэффициентом λ. Непосредственно по схеме записываем соотношение: $x = -y$; $v + y\lambda - y\lambda = z$. Следовательно, $v = z$. Схемы эквивалентны.

Если положить $\lambda = k_1$, то нелинейность в блоке N_0 ,

Пример: **Определить предельное значение коэффициента передачи *k* нелинейного элемента из условия обеспечения абсолютной устойчивости нелинейной** $W_{лч}(s) = \frac{10}{s(s+1)}$ **ная функция линейной части которой**

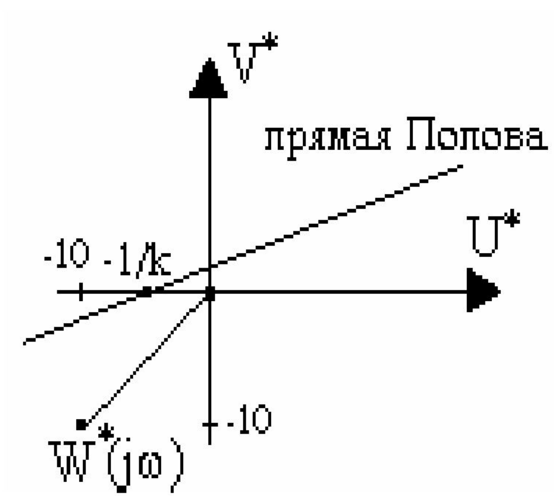
Р е ш е н и е. Находим АФЧХ линейной части системы

$$W_{лч}(j\omega) = \frac{10}{j\omega(j\omega+1)} = -\frac{10}{\omega^2+1} - j\frac{10}{\omega(\omega^2+1)},$$

откуда получаем видоизмененную частотную характеристику

$$W^*(j\omega) = -\frac{10}{\omega^2+1} - j\frac{10}{\omega^2+1}$$

и строим ее на комплексной плоскости, изменяя частоту ω от 0 до ∞



Видоизмененная частотная характеристика

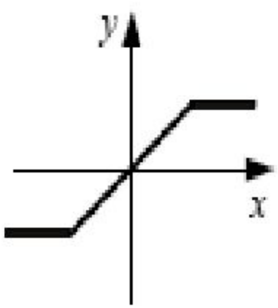
Прямая Попова может быть проведена для любого положительного значения коэффициента передачи **k** нелинейного элемента так, что вся характеристика **W*(j ω)** будет лежать справа от этой прямой.

Таким образом, исследуемая нелинейная система абсолютно устойчива при k > 0.

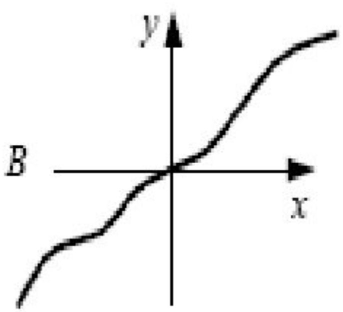
Тренировочное задание

8 Критерий абсолютной устойчивости Попова используется для исследования устойчивости нелинейных систем со статическими характеристиками вида

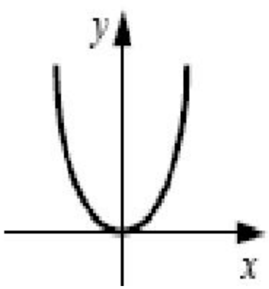
A



B



C



Тренировочное задание

A. Какое движение называется возмущенным движением и какое движение называется **невозмущенным** движением?

B. Какой смысл имеет понятие **устойчивости движения системы по Ляпунову** и чем оно отличается от **асимптотической устойчивости**?

C. Какие **теоремы** были доказаны Ляпуновым в первом методе исследования устойчивости в "малом" состояния равновесия нелинейной системы.

Тренировочное задание

A. Какая теорема физики лежит в основе второго метода Ляпунова?

B. Какими свойствами должна обладать функция Ляпунова и ее производная по времени, чтобы нелинейная система была устойчива ?

C. Как Вы объясните, что второй метод Ляпунова дает устойчивость нелинейной системы в "большом"?

Тренировочное задание

A. Как Вы понимаете абсолютную устойчивость?

B. Что представляет собой видоизмененная амплитудно-фазовая характеристика линейной части, и как последняя связана с исходной?

C. Дайте геометрическую трактовку критерия абсолютной устойчивости.

Тренировочное задание

4 Знакоопределенной функцией является функция вида

A $V = y_1 + y_2 + ... + y_n$.

B $V = y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2$.

C $V = (y_1^2 + y_2^2) + (y_2^2 + y_3^2) ... + y_4^2$.

5 Функция Ляпунова при $y_1 = y_2 = ... = y_n = 0$ принимает значение

A $V(y_1, y_2, ..., y_n) = \infty$.

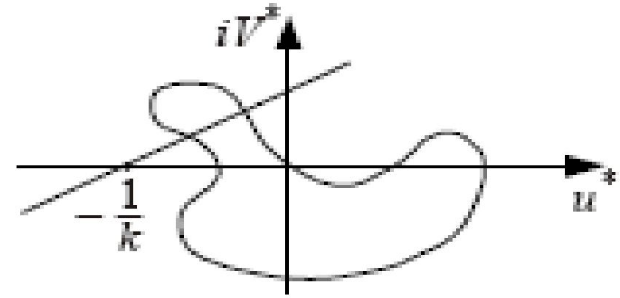
B $V(y_1, y_2, ..., y_n) = 0$.

C $V(y_1, y_2, ..., y_n) = \text{const}$.

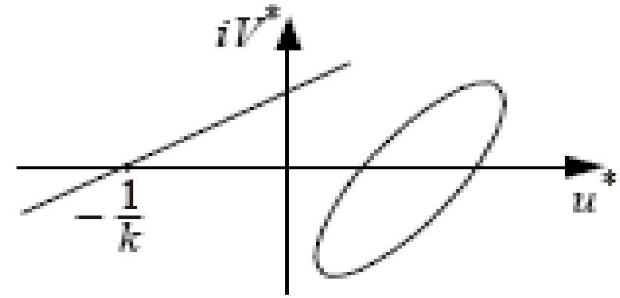
Тренировочное задание

Состояние равновесия нелинейной системы будет устойчиво, если на комплексной плоскости видоизмененная АФЧХ **W*(i ω)** линейной части и прямая, проведенная через точку **(-1/k; i0)** , расположены следующим образом

A



B



C