Методы интегрирования

Интегрирование подстановкой и по частям

1. Непосредственное интегрирование

Суть метода: с помощью простых преобразований (выполнение каких-либо арифметических действий, применение стандартных формул алгебра и геометрии и т.д.) подинтегральная функция записывается в виде суммы функций, первообразные для которых известны (говорят: «записывается в виде суммы табличных интегралов»).

ПРИМЕР. Найти интегралы

$$a) \int \left(x - \frac{1}{x^2} \right)^2 dx, \qquad b) \int \frac{x^2 + x + \sqrt[3]{x} + 4}{\sqrt{x}} dx$$

Основные формулы интегрирования

1. $\int 0 \cdot dx = C$
2. $\int dx = \int 1 \cdot dx = x + C$
3. $\int x^n \cdot dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,$
   $n \neq -1,\ x > 0$
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int e^x dx = e^x + C$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
8. $\int \cos x dx = \sin x + C$
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$
10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$
11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,\ |x| < |a|$
12. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C$
13. «Высокий» логарифм:
    $$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C,\ |x| \neq a$$
14. «Длинный» логарифм:
    $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

1. $\int 7x^2 dx$

2. $\int \cos u du$

3. $\int (x^3 - 3x) dx$

4. $\int \frac{x^4 - x}{x^2} dx$

5. $\int \sqrt[3]{u}^2 du$

1. $\int 4x^7 dx$

2. $\int 2\sin u du$

3. $\int (6x^5 + 3) dx$

4. $\int \frac{x^2 + 2}{x} dx$

5. $\int \sqrt[4]{y}^3 dy$

Интегрирование заменой переменной

Метод замены переменной (метод подстановки) состоит в преобразовании интеграла $\int f(x)dx$ в другой интеграл

$$\int f(u)du,$$

который вычисляется проще, чем исходный.

Примеры интегрирования методом замены переменной.

При применении метода замены переменной следует в последней выкладке перейти к исходной переменной.

Пример.6. Найдем неопределенный интеграл $\int \sin^2 x \cos x \, dx$.

$dt=t'dx=(\sin x)'dx=\cos x dx$

Выражаем отсюда dx и подставляем в пример

$$\int \sin^2 x \cos x \, dx = \left| \begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \end{matrix} \right| = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3} \sin^3 x + C.$$

Пример 7. Найдем неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{x \ln x}$.

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \left| \begin{matrix} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\ln x| + C.$$

№2. Найдите неопределенный интеграл

$$1)\int \cos 3x\,dx$$

$$2)\int (x-3)^4\,dx$$

$$3)\int \sqrt{x+4}\,dx$$

$$4)\int \sin x \cos x\,dx$$

$$5)\int tgx\,dx$$

$$6)\int \sin\frac{x}{2}\,dx$$

$$7)\int (\cos^2 x - \sin^2 x)\,dx$$

$$8)\int \frac{x^3-2x+4}{x}\,dx$$

$$9)\int \frac{2-3x-x^5}{x^3}\,dx$$

Выделенный элемент функции обозначаем за t

К №5 и 7 – применяем тригонометрические формулы для преобразования, см. след слайд

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$