METODE NUMERICE – pregătire 23.06.2021

Exerciţii – capitolele 1, 2

✍ Exerciţiul 1

Care este rezultatul calculului: 7.625 - 7.375 + 1.875 realizat într-o aritmetică a virgulei mobile cu β = 2, t = 4, L = -2, U = 4, reprezentare cu bit ascuns, rotunjire uniformă. Se manifestă vreun fenomen de eroare? Explicaţi. Cum ar trebui efectuat calculul pentru a evita apariţia vreunui fenomen de eroare?

Rezolvare:

👉 Reprezentare cu bit ascuns ⇒ $t = 4 + 1 = 5$

bit ascuns

$x = 7.625 = (111.101)_2 = (0.111101)_2 \times 2^3$

rotunjire uniformă & ultima cifră pară → $\boxed{fl(x) = (0.11110)_2 \times 2^3}$

$y = 7.375 = (111.011)_2 = (0.111011)_2 \times 2^3$

rotunjire uniformă & ultima cifră impară → $\boxed{fl(y) = (0.11110)_2 \times 2^3}$

METODE NUMERICE – pregătire 23.06.2021

$z = 1.875 = (1.111)_2 = (0.1111)_2 \times 2^1 \longrightarrow \boxed{fl(z) = (0.11110)_2 \times 2^1}$

$fl(x - y + z) = fl(\, fl(x - y) + z)$

$fl(x - y) = \underbrace{(0.11110)_2 \times 2^3 \ - (0.11110)_2 \times 2^3}_{\text{neutralizarea termenilor}} = 0$

$fl(x - y + z) = 0 + fl(z) = fl(z) = (0.11110)_2 \times 2^1$

👉 rearanjarea calculelor pentru evitarea neutralizării termenilor:

$fl(x + z - y) = fl(\, fl(x + z) - y)$

$fl(x + z) = (0.11110)_2 \times 2^3 \ + (0.11110)_2 \times 2^1 \Rightarrow (0.11110)_2 \times 2^3 \ + (0.00111\cancel{10})_2 \times 2^3$

denormalizare

$fl(x + z) = (0.11110)_2 \times 2^3 \ + (0.00111)_2 \times 2^3 \Rightarrow (1.00101)_2 \times 2^3 \longrightarrow (0.10010) \times 2^4$

$fl(x + z - y) = fl(x+z) - fl(y) = (0.10010)_2 \times 2^4 \ - (0.11110)_2 \times 2^3 \Rightarrow (0.10010)_2 \times 2^4 \ - (0.01111)_2 \times 2^4$

denormalizare

normalizare

$fl(x - y + z) = (0.00011)_2 \times 2^4 \ = (0.11000) \times 2^1$

✍ Exercițiul 2

Care este rezultatul calculului: $6.125 + 0.125 - 5.875$ *realizat într-o aritmetică a virgulei mobile cu β = 2, t = 4, L = -2, U = 4, reprezentare cu bit ascuns, rotunjire uniformă. Se manifestă vreun fenomen de eroare? Explicaţi. Cum ar trebui efectuat calculul pentru a evita apariţia vreunui fenomen de eroare? Argumentaţi.*

Rezolvare:

☞ Reprezentare cu bit ascuns $\Rightarrow$ t = 4 + 1 = 5

bit ascuns

$x = 6.125 = (110.001)_2 = (0.110001)_2 \times 2^3$

rotunjire uniformă & ultima cifră pară $\longrightarrow$ $\boxed{fl(x) = (0.11000)_2 \times 2^3}$

$y = 0.125 = (0.001)_2 = (0.1)_2 \times 2^{-2}$ $\longrightarrow$ $\boxed{fl(y) = (0.10000)_2 \times 2^{-2}}$

$z = 5.875 = (101.111)_2 = (0.101111)_2 \times 2^3$

rotunjire uniformă & ultima cifră impară $\longrightarrow$ $\boxed{fl(z) = (0.11000)_2 \times 2^3}$

METODE NUMERICE – pregătire 23.06.2021

$$fl(x + y - z) = fl(\, fl(x + y) - z)$$

$$fl(x + y) = (0.11000)_2 \times 2^3 + (0.10000)_2 \times 2^{-2} = \underbrace{(0.11000)_2 \times 2^3 + (0.00000\cancel{1})_2 \times 2^3}_{\text{omitere catastrofală}} = (0.11000)_2 \times 2^3$$

$$fl(x + y - z) = (0.11000)_2 \times 2^3 - fl(z) = \underbrace{(0.11000)_2 \times 2^3 - (0.11000)_2 \times 2^3}_{\text{neutralizarea termenilor}} = 0$$

👉 rearanjarea calculelor pentru evitarea omiterii catastrofale:

$$fl(x - z + y) = fl(\, fl(x - z) + y)$$

$$fl(x - z) = \underbrace{(0.11000)_2 \times 2^3 - (0.11000)_2 \times 2^3}_{\text{neutralizarea termenilor}} = 0$$

$$fl(x - z + y) = 0 + (0.10000)_2 \times 2^{-2} = (0.10000)_2 \times 2^{-2}$$

✍ Exerciţiul 3

Dintr-un proces în funcţiune se achiziționează măsurători ale semnalelor care sunt apoi prelucrate într-un calculator numeric, rezultatele fiind transmise procesului. Ce tipuri de erori afectează rezultatele transmise? Argumentaţi.

Rezolvare:

- măsurătorile □ afectate de erori de măsură

- prelucrarea în calculator □ reprezentarea numerelor □ erori de reprezentare

□ algoritmi de prelucrare □ erori de metodă

Rezultatele trimise înapoi în proces vor fi afectate de:

- erori de măsură
- erori de reprezentare
- erori de metodă

METODE NUMERICE – pregătire 23.06.2021

✍ Exerciţiul 4

Calculaţi determinantul unei matrici ştiind că rezultatele factorizării sale L-U prin triangularizare cu pivotare parțială sunt:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.325 & 1 & 0 \\ -0.725 & -0.5071 & 1 \end{bmatrix};\ U = \begin{bmatrix} 4 & -5.3 & 7 \\ 0 & 4.4225 & -5.375 \\ 0 & 0 & -1.9505 \end{bmatrix};\ P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Argumentaţi.

<u>Rezolvare:</u>

✔ *calcul determinant*

$P \cdot A = L \cdot U \Rightarrow A = P^{-1} \cdot L \cdot U \Rightarrow \det(A) = \det(P^{-1}) \cdot \det(L) \cdot \det(U) = (-1)^{npl} \cdot \det(U)$

npl – număr de permutări de linii efectiv realizate $\rightarrow$ se determină din matricea P

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P$$ → a avut loc o singură permutare

☞ rezultă npl = 1 $\Rightarrow$ $\det(A) = (-1)^1 \cdot 4 \cdot 4.4225 \cdot (-1.9505)$

✍ Exerciţiul 5

Rezolvați sistemul determinat, de forma $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ *unde rezultatele factorizării L-U cu pivotare parțială ale matricii A sunt:*

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.3 & 1 & 0 \\ -0.6 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}; \quad U = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 7 \\ 0 & 3 & -5.5 \\ 0 & 0 & -1.7 \end{bmatrix}; \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

iar vectorul termenilor liberi este $\underline{b} = [-1 \quad 2 \quad 3]^T$

<u>*Rezolvare:*</u>

<u>calcul bazat pe triangularizarea cu pivotare parţială</u>:

1) factorizarea $P \cdot A = L \cdot U$;

2) rezolvare sistem: $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$

- calcul $\underline{c} = P \cdot \underline{b}$;
- substituţia înainte: $L \cdot \underline{y} = \underline{c}$;
- substituţia inversă: $U \cdot \underline{x} = \underline{y}$

METODE NUMERICE – pregătire 23.06.2021

$$\underline{c} = P \cdot \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$L \cdot \underline{y} = \underline{c} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.3 & 1 & 0 \\ -0.6 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \underline{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow y_1 = 2 \rightarrow y_2 = -1.6 \rightarrow y_3 = 1.6$$

$$U \cdot \underline{x} = \underline{y} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & -5 & 7 \\ 0 & 3 & -5.5 \\ 0 & 0 & -1.7 \end{bmatrix} \cdot \underline{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1.6 \\ 1.6 \end{bmatrix} \Rightarrow x_3 = -\frac{1.6}{1.7} \rightarrow x_2 = -\frac{1.6 \cdot 7.2}{1.7} \rightarrow x_1 \ldots$$

METODE NUMERICE – pregătire 23.06.2021

✍ Exerciţiul 6

Realizați scriptul MATLAB care rezolvă un sistem determinat de ecuații algebrice liniare, de un ordin oarecare n, cu matrice în forma inferior triunghiulară.

<u>Rezolvare:</u>

☞ structura scriptului:

① citire ordin sistem, n, cu verificarea condiţiei n > 1

② citire matrice de coeficienţi cu verificare ca e inferior triunghiulară

□

toate elementele de deasupra diagonalei principale sunt zero

③ citire vector termeni liberi

④ rezolvare sistem prin substituţie înainte (se începe cu prima ecuaţie)

⑤ afișare soluţie

✍ Exerciţiul 7

Precizaţi argumentat (toate calculele implicate) care sunt matricile Gauss de transformare utilizate în cadrul celor două iteraţii ale procedurii de triangularizare directă (simplă) aplicate matricei: $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. *Calculele se vor realiza cu rotunjire la primele două cifre zecimale.*

<u>*Rezolvare:*</u>

Iteraţia 1:

$$\underline{m}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad M_1 = I_3 - \underline{m}_1 \cdot \underline{e}_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot [1 \quad 0 \quad 0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = M_1 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 0 & 12 & 16 \\ 0 & -7 & -8 \end{bmatrix}$$

Iteraţia 2:

$$\underline{m}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{7}{12} \end{bmatrix} \qquad M_2 = I_3 - \underline{m}_2 \cdot \underline{e}_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{7}{12} \end{bmatrix} \cdot [0 \quad 1 \quad 0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{7}{12} & 1 \end{bmatrix}$$