Система счисления - это знаковая система, в которой числа записываются по определенным правилам с помощью символов некоторого алфавита, называемых цифрами.

ПОЗИЦИОННЫЕ

Количественное значение каждой цифры числа зависит от того, в каком месте (позиции или разряде) записана та или иная цифра. Пример: **7; 70**

НЕПОЗИЦИОННЫЕ

Количественное значение цифры числа не зависит от того, в каком месте (позиции или разряде) записана та или иная цифра. Пример: **XIX**

.

Позиционные системы счисления

Система счисления	Основание	Алфавит цифр
Десятичная	10	0,1,2,3,4,5,6,7,8,9
Двоичная	2	0,1
Восьмеричная	8	0,1,2,3,4,5,6,7
Шестнадцатеричная	16	0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A(10),B(11), C(12),D(13),E(14),F(15)

Позиционные системы счисления

В общем виде в q-ичной системе запись числа A_q, которое содержит n целых разрядов числа и m дробных разрядов числа, производится следующим образом (развернутая форма числа)

$$A_q = a_{n-1} \cdot q^{n-1} + \ldots + a_0 \cdot q^0 + a_{-1} \cdot q^{-1} + \ldots + a_{-m} \cdot q^{-m}.$$

или в сокращенном виде:

$$A_q = a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_0, a_{-1} \ldots a_{-m}.$$

Позиционные системы счисления

Например:

$$357{,}01_{10} = 3\cdot 10^{2}+5\cdot 10^{1}+7\cdot 10^{0}+0\cdot 10^{-1} + 1\cdot 10^{-2}$$

$$1B_{16} = 1\cdot 16^{1}+11\cdot 16^{0} = 16_{10}+11_{10} = 37_{10}$$

$$101101_{2} = 1\cdot 2^{5} + 0\cdot 2^{4} + 1\cdot 2^{3} + 1\cdot 2^{2} + 0\cdot 2^{1} + 1\cdot 2^{0} =$$
$$= 32_{10}+0_{10}+8_{10}+4_{10}+0_{10}+1_{10} = 45_{10}.$$

Соответствие чисел, записанных в различных системах счисления

Десятичная	Двоичная	Восьмеричная	Шестнадцатеричная
1	001	1	1
2	010	2	2
3	011	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10

Правила перевода чисел из одной системы счисления в другую

Перевод в десятичную систему счисления

Примеры:

$$257{,}31_8 = 2\cdot8^2+5\cdot8^1+7\cdot8^0+3\cdot8^{-1} + 1\cdot8^{-2}=$$
$$=128+40+7+3/8+1/64=175+25/64=175{,}390625_{10}$$

$$2C{,}8_{16} = 2\cdot16^1+12\cdot16^0+ 8\cdot16^{-1} =$$
$$= 32_{10}+12_{10}+0{,}5_{10}=44{,}5_{10}$$

$$111011{,}01_2 = 1\cdot2^5 + 1\cdot2^4 + 1\cdot2^3 + 0\cdot2^2 + 1\cdot2^1 +$$
$$+ 1\cdot2^0 + 0\cdot2^{-1} + 1\cdot2^{-2} = 32+16+8+2+1+1/4=59{,}25_{10}$$

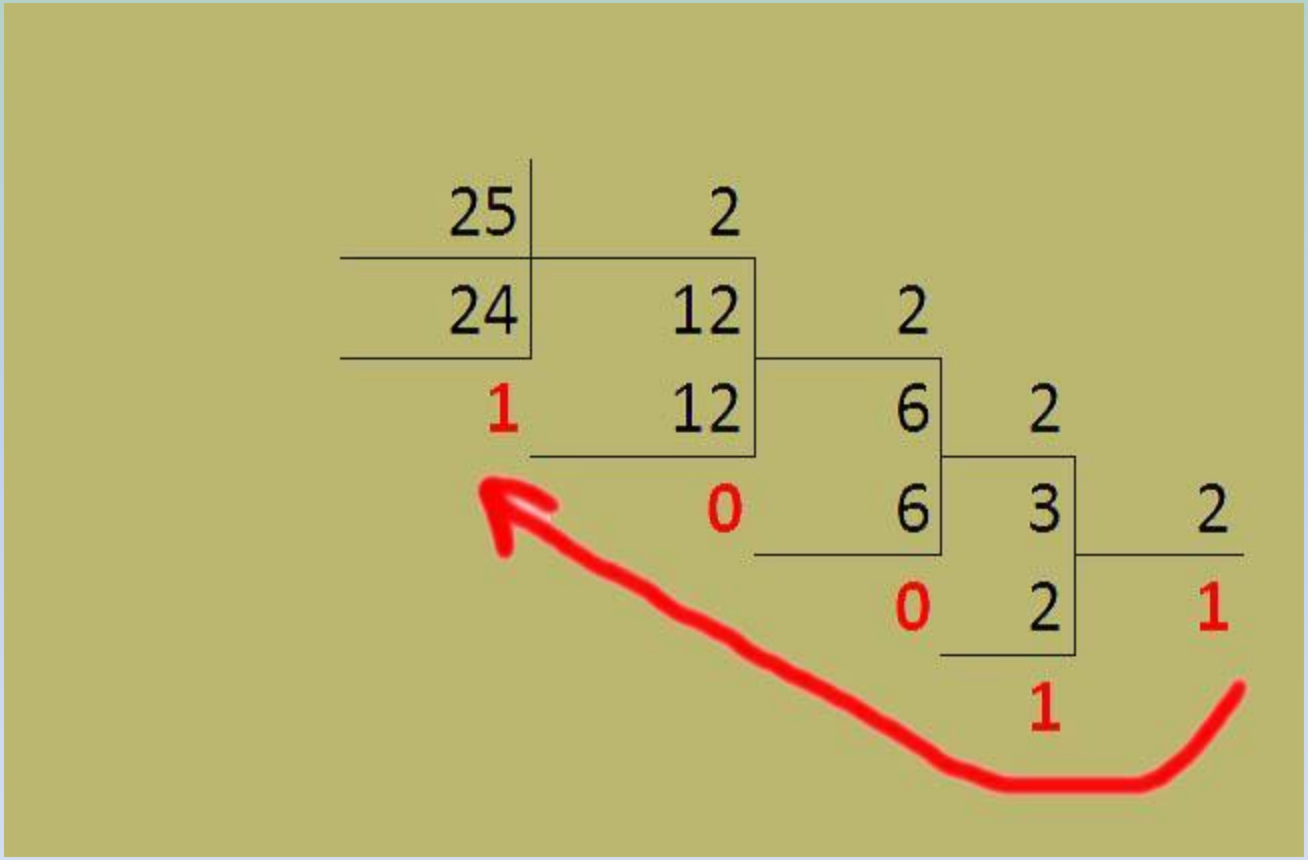
При переводе в десятичную систему счисления удобно пользоваться таблицей степеней двойки, восьмерки и числа 16

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

n	0	1	2	3	4	5	6
8^n	1	8	64	512	4096	32768	262144

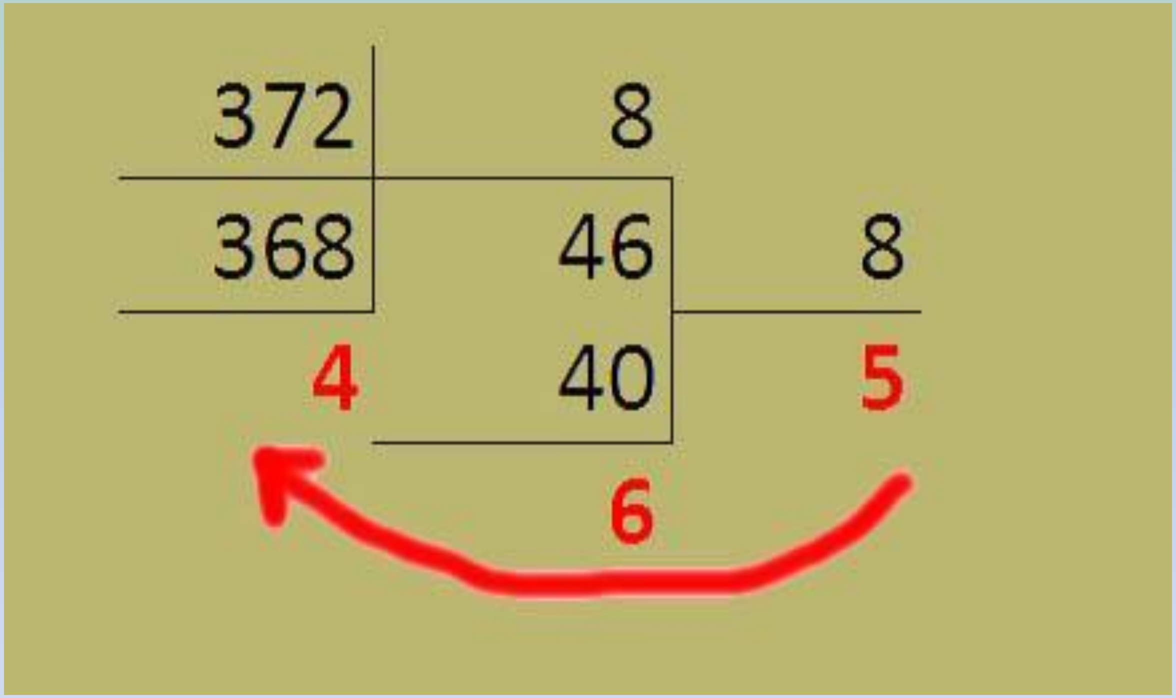
n	0	1	2	3	4	5
16^n	1	16	256	4096	65536	1048576

Пример перевода десятичного числа 25 в двоичную систему счисления



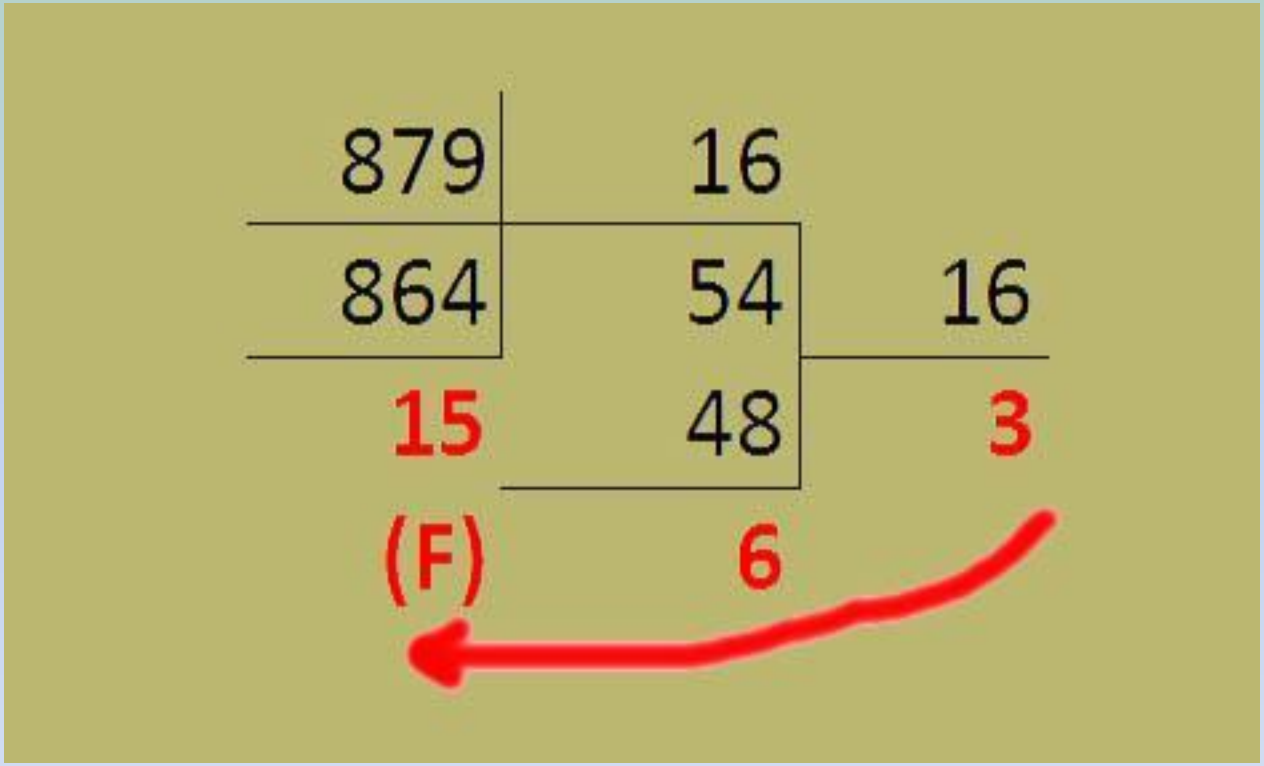
$$25_{10} = 11001_2$$

Пример перевода десятичного числа 372 в восьмеричную систему счисления



$$372_{10} = 564_8$$

Пример перевода десятичного числа 879 в шестнадцатеричную систему счисления



$$879_{10} = 36F_{16}$$

Иногда более удобно записать алгоритм перевода в форме таблицы. Переведем десятичное число 363_{10} в двоичное число.

Делимое	363	181	90	45	22	11	5	2	1
Делитель	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Остаток	1	1	0	1	0	1	1	0	1

Получаем: $363_{10}=101101011_2$

Правила перевода чисел из одной системы счисления в другую

Правило 5. Перевод десятичных дробей в двоичную дробь

1. Последовательно выполнять умножение исходной десятичной дроби и получаемых дробей на основание системы до тех пор, пока не получим нулевую дробную часть или не будет достигнута требуемая точность вычислений.

2. Получить искомую двоичную дробь, записав полученные целые части произведения в последовательности.

Пример перевода десятичной дроби 0,6875 в двоичную систему счисления

$$
\begin{array}{r}
\times\ 0{,}6875 \\
2 \\
\hline
\boxed{1}{,}3750 \\
\times\ \qquad 2 \\
\hline
\boxed{0}{,}750 \\
\times\ \qquad 2 \\
\hline
\boxed{1}{,}50 \\
\times\ \qquad 2 \\
\hline
\boxed{1}{,}0
\end{array}
$$

$$0{,}6875_{10} = 0{,}1011_2$$

Пример перевода десятичной дроби

Пример 2.17. Перевести число $0{,}65625_{10}$ в восьмеричную систему счисления.

0,	65625
	x 8
5	25000
	x 8
2	00000

Получаем: $0{,}65625_{10}=0{,}52_8$

Пример 2.17. Перевести число $0{,}65625_{10}$ в шестнадцатеричную систему счисления.

0,	65625
	x 16
10	50000
(A)	x 16
8	00000

Получаем: $0{,}65625_{10}=0{,}A8_1$

Пример 2.18. Перевести десятичную дробь $0{,}5625_{10}$ в двоичную систему счисления.

0,	5625
	x 2
1	1250
	x 2
0	2500
	x 2
0	5000
	x 2
1	0000

Получаем: $0{,}5625_{10}=0{,}1001_2$

Правила перевода чисел из одной системы счисления в другую

Правило 6 (правило триад). Перевод чисел из двоичной в восьмеричную и обратно

1. Чтобы перевести число из двоичной системы в восьмеричную, его нужно разбить на триады (тройки цифр), начиная с младшего разряда, в случае необходимости дополнив старшую триаду нулями, и каждую триаду заменить соответствующей восьмеричной цифрой

2. Для перевода восьмеричного числа в двоичное необходимо каждую цифру заменить эквивалентной ей двоичной триадой

Таблица перевода с помощью триад

Двоичные триады	000	001	010	011	100	101	110	111
Восьмеричные триады	0	1	2	3	4	5	6	7

Примеры:

$$1001010_2 = 001\ \ 001\ \ 010_2 = 112_8$$

$$273_8 = 010\ \ 111\ \ 011_2 = 10111011_2$$

Правила перевода чисел из одной системы счисления в другую

Правило 7 (правило тетрад). Перевод чисел из двоичной в шестнадцатеричную и обратно

1. Чтобы перевести число из двоичной системы в шестнадцатеричную, его нужно разбить на тетрады (четверки цифр), начиная с младшего разряда, в случае необходимости дополнив старшую тетраду нулями, и каждую тетраду заменить соответствующей шестнадцатеричной цифрой

2. Для перевода шестнадцатеричного числа в двоичное необходимо каждую цифру заменить эквивалентной ей двоичной тетрадой

Таблица перевода с помощью тетрад

Двоичные тетрады	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
Шестнадцатеричные тетрады	0	1	2	3	4	5	6	7
Двоичные тетрады	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
Шестнадцатеричные тетрады	8	9	A	B	C	D	E	F

Примеры:

$$1001010_2 = 0100\ 1010_2 = 4A_{16}$$

$$2B3_{16} = 0010\ \ 1011\ \ 0011_2 = 1010110011_2$$

Правила перевода чисел из одной системы счисления в другую

Правило 8. Перевод чисел из восьмеричной в шестнадцатеричную и обратно

При переходе из восьмеричной системы счисления в шестнадцатеричную и обратно, необходим промежуточный перевод чисел в двоичную систему.

Пример.

Число перевести FEA_{16} в восьмеричную систему счисления.

$$FEA_{16} = 1111\ 1110\ 1010_2$$

$$1111\ 1110\ 1010_2 = 111\ 111\ 101\ 010_2 = 7752_8$$

Пример.

Число перевести 6635_8 в шестнадцатеричную систему счисления.

$$6635_8 = 110\ 110\ 011\ 101_2$$

$$110\ 110\ 011\ 101_2 = 1101\ 1001\ 1101_2 = D9D_{16}$$

Двоичная арифметика

Арифметические операции во всех позиционных системах счисления выполняются по одним и тем же правилам:

- Переполнение разряда наступает тогда, когда значение числа в нем становится равным или большим основания

- Сложение многоразрядных чисел происходит с учетом возможных переносов из младших разрядов в старшие

- Вычитание многоразрядных чисел происходит с учетом возможных заемов в старших разрядах

Арифметические операции во всех позиционных системах счисления выполняются по одним и тем же правилам:

- Умножение многоразрядных чисел происходит с последовательным умножением множимого на очередную цифру множителя

- Перенос в следующий разряд при сложении и заем из старшего разряда при вычитании определяется величиной основания системы счисления

- Для проведения арифметических операций над числами, представленными в различных системах счисления, необходимо предварительно перевести их в одну систему

Сложение в двоичной системе

В основе сложения двоичной системы счисления лежит таблица сложения одноразрядных двоичных чисел

$0 + 0 = 00$
$0 + 1 = 01$
$1 + 0 = 01$
$1 + 1 = 10$

$$\begin{array}{r} 110_2 \\ +\quad 11_2 \\ \hline 1001_2 \end{array}$$

Вычитание в двоичной системе

В основе лежит таблица вычитания однозначных двоичных чисел.
При вычитании из меньшего числа (0) большего (1) производится заем из старшего разряда (в таблице заем обозначен 1 с верхней чертой):

$0 - 0 = 0$

$0 - 1 = \overline{1}1$

$1 - 0 = 01$

$1 - 1 = 00$

$$\begin{array}{r} -\;110_2 \\ 11_2 \\ \hline 11_2 \end{array}$$

Умножение и деление в двоичной системе

В основе умножения и деления лежит таблица умножения однозначных чисел

$0 \cdot 0 = 0$

$0 \cdot 1 = 0$

$1 \cdot 0 = 0$

$1 \cdot 1 = 1$

$$
\begin{array}{r}
\times \; 110_2 \\
11_2 \\
\hline
110 \\
110 \\
\hline
10010_2
\end{array}
$$

Пример деления двоичных чисел

$$
\begin{array}{rl}
-\,110001.1 & \big|\ 1001 \\
\underline{1001} & \big|\ \overline{101.1} \\
-\,1101 & \\
\underline{1001} & \\
-\,1001 & \\
\underline{1001} & \\
0 &
\end{array}
$$

$$110001.1_2 \,/\, 1001_2 = 101.1_2$$