СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

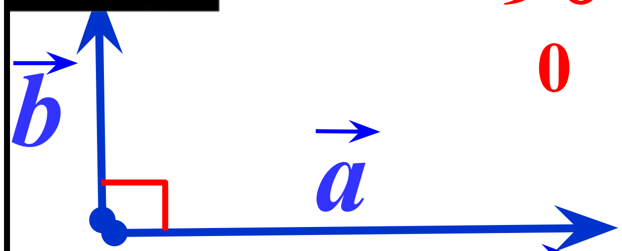
Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})$$

Если хотя бы один из векторов равен нулю, то скалярное произведение этих векторов равно нулю (по определению).

Скалярное произведение векторов – число (скаляр).

$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 90^0$



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 90^0 = 0$$

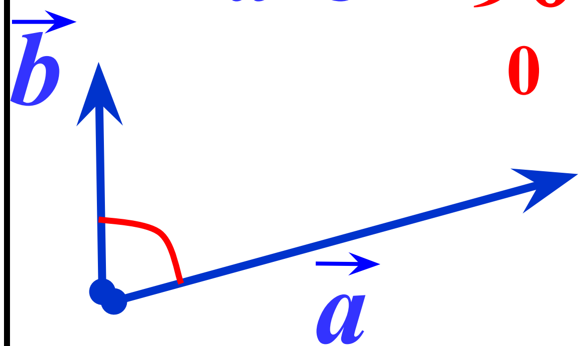
Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, то скалярное произведение векторов равно нулю.

Обратно: если $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны.

Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}\perp\vec{b}$$

$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} < 90^0$

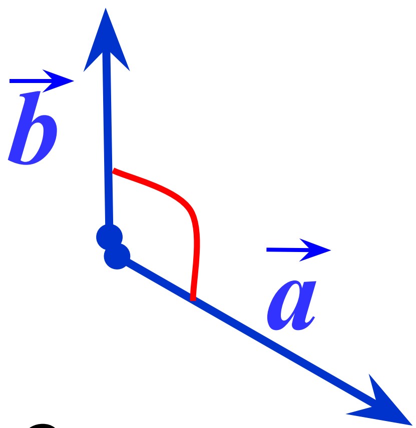


$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha > 0$$

Скалярное произведение ненулевых векторов положительно тогда и только тогда , когда угол между векторами **острый.**

$$\vec{a}\cdot\vec{b} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} < 90^0$$

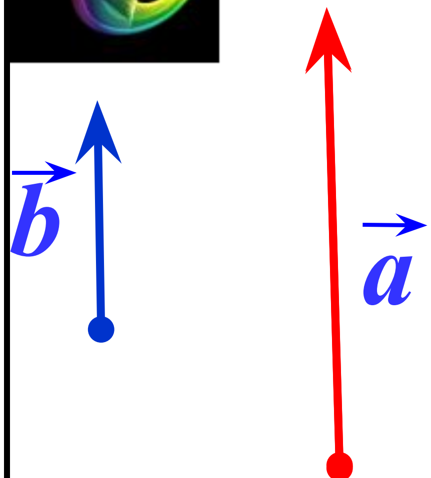
$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} > 90^0$$



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha < 0$$

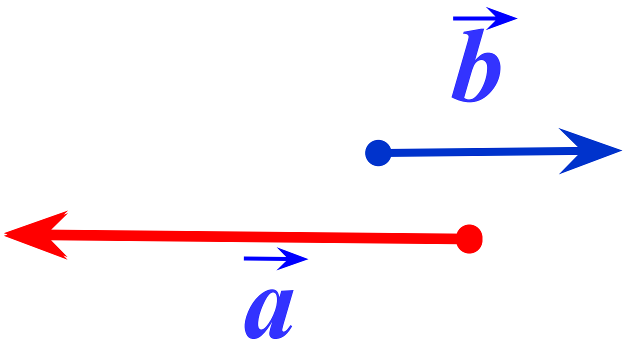
Скалярное произведение ненулевых векторов отрицательно тогда и только тогда , когда угол между векторами **тупой.**

$$\vec{a}\cdot\vec{b} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} > 90^0$$



Если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ $\quad \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 0^0$

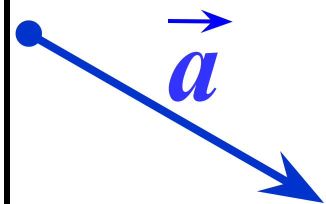
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 0^0 = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$$



Если $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ $\quad \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 180^0$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 180^0 = -|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$$

$$\widehat{\vec{a}\,\vec{a}} = 0^0$$



$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos 0^0 = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}| = |\vec{a}|^2$$

Скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{a}$ называется **скалярным квадратом** вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^{\,2}$

Таким образом, $\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$ откуда $|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}^2}$.

Длина вектора равен квадратному корню из его скалярного квадрата.

Свойства скалярного произведения

1) $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot \text{пр}_{\bar{a}}\bar{b}=|\bar{b}|\cdot \text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}.$

Действительно, $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}=|\bar{a}|\cdot\cos\left(\bar{a}\,\hat{}\,\bar{b}\right),$ тогда

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\left(\bar{a}\,\hat{}\,\bar{b}\right)=|\bar{b}|\cdot \text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}.$$

Отсюда следует **формула** для нахождения **проекции одного вектора на другой:**

$$\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|}.$$

2) Переместительное или коммутативное свойство: $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}.$

3) Сочетательное (ассоциативное) свойство: $\left(\lambda\bar{a}\right)\cdot\bar{b}=\bar{a}\cdot\left(\lambda\bar{b}\right)=\lambda\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right).$

4) Распределительное (дистрибутивное) свойство относительного сложения векторов:

$$\bar{a}\cdot\left(\bar{b}+\bar{c}\right)=\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}.$$

Скалярное произведение в координатной форме

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Скалярное произведение двух векторов позволяет решить некоторые задачи векторной алгебры:

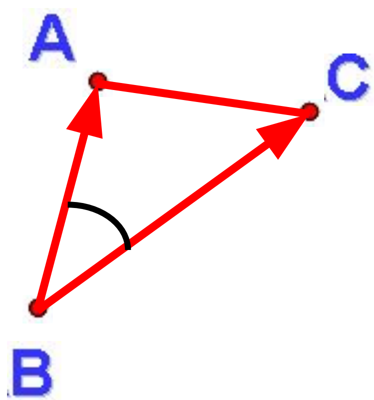
1. Нахождение косинуса угла между двумя векторами.

$$\cos\left(\overline{a}\,{}^\wedge\,\overline{b}\right)=\frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}\cdot\sqrt{b_x{}^2 + b_y{}^2 + b_z{}^2}}.$$

Отсюда следует условие ортогональности (перпендикулярности) двух векторов в координатной форме:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$$

Пример 1. Даны вершины треугольника: *A* (2; –1; 3), *B* (1; 1; 1), *C* (0; 0; 5). Найти $\angle ABC$.



$$\cos\angle ABC = \frac{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}{\left|\overline{BA}\right|\cdot\left|\overline{BC}\right|}.$$

$$\overline{BA}\{1, -2, 2\}, \quad \left|\overline{BA}\right| = \sqrt{1+4+4} = 3,$$

$$\overline{BC}\{-1, -1, 4\}, \quad \left|\overline{BC}\right| = \sqrt{1+1+16} = 3\sqrt{2},$$

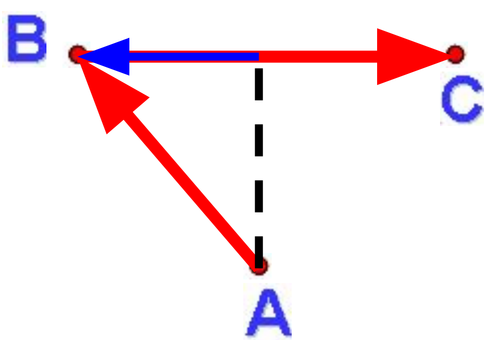
$$\overline{BA}\cdot\overline{BC} = -1+2+8 = 9,$$

$$\cos\angle ABC = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \angle ABC = 45^o.$$

2. Нахождение проекции одного вектора на направление другого.

Пример 2. Даны три точки $A(2;\,3;\,5)$, $B(1;\,2;\,2)$, $C(3;\,5;\,4)$. Найти $\text{пр}_{\overline{BC}}\,\overline{AB}$.

Решение



$$\overline{BC}\{2,\,3,\,2\},\qquad \left|\overline{BC}\right| = \sqrt{4+9+4} = \sqrt{17},$$

$$\overline{AB}\{-1,-1,-3\},\qquad \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11},$$

$$\overline{AB}\cdot\overline{BC} = -2-3-6 = -11,$$

$$\text{пр}_{\overline{BC}}\,\overline{AB} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{\left|\overline{BC}\right|} = -\frac{11}{\sqrt{17}}.$$

3. Нахождение длины вектора.

Пример 3. Дан вектор $\overline{a} = \overline{m} + \overline{n}, \; \left|\overline{m}\right| = \left|\overline{n}\right| = 2, \left(\overline{m} \wedge \overline{n}\right) = \dfrac{\pi}{3}.$

Найти длину вектора $\overline{a}$.

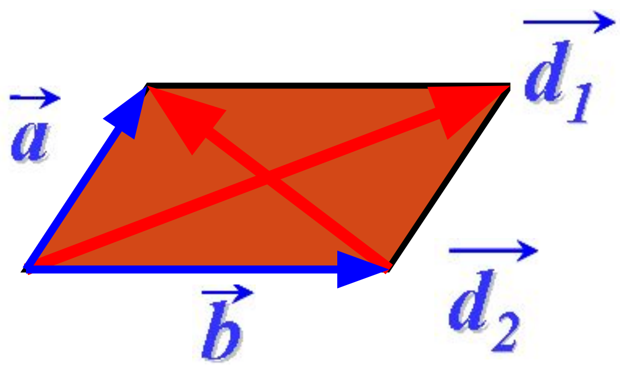
$\left|\overline{a}\right| = \sqrt{\overline{a}^2}.$ Найдем скалярный квадрат вектора $\overline{a}$.

$$\overline{a}^2 = (\overline{m} + \overline{n}) \cdot (\overline{m} + \overline{n}) = \overline{m}^2 + 2\overline{m} \cdot \overline{n} + \overline{n}^2 =$$

$$= \left|\overline{m}\right|^2 + 2\left|\overline{m}\right| \cdot \left|\overline{n}\right| \cos\left(\overline{m} \wedge \overline{n}\right) + \left|\overline{n}\right|^2 = 4 + 2 \cdot 2 \cdot 2\cos\frac{\pi}{3} + 4 = 8 + 8 \cdot \frac{1}{2} = 12.$$

$$\left|\overline{a}\right| = \sqrt{\overline{a}^2} = 2\sqrt{3}.$$

Определить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} = 2\overline{m} + \overline{n}$ и $\overline{b} = \overline{m} - 2\overline{n}$, где $\overline{m}$, $\overline{n}$ – единичные векторы, угол между которыми равен 60°.



$$\vec{d_1} = \vec{a} + \vec{b} \qquad \vec{d_1} = 3\vec{m} - \vec{n}$$

$$\vec{d_2} = \vec{a} - \vec{b} \qquad \vec{d_2} = \vec{m} + 3\vec{n}$$

$$\overline{d_1}^2 = (3\overline{m} - \overline{n}) \cdot (3\overline{m} - \overline{n}) = 9\overline{m}^2 - 6\overline{m} \cdot \overline{n} + \overline{n}^2 =$$

$$= 9|\overline{m}|^2 - 6|\overline{m}| \cdot |\overline{n}| \cos\left(\overline{m} \hat{\ } \overline{n}\right) + |\overline{n}|^2 = 9 - 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos\frac{\pi}{3} + 1 = 7.$$

$$\left|\vec{d_1}\right| = \sqrt{7}$$

$$\overline{d_2}^2 = (\overline{m} + 3\overline{n}) \cdot (\overline{m} + 3\overline{n}) = |\overline{m}|^2 + 6|\overline{m}| \cdot |\overline{n}| \cos\left(\overline{m} \hat{\ } \overline{n}\right) + 9|\overline{n}|^2 = 13.$$

$$\left|\vec{d_2}\right| = \sqrt{13}$$