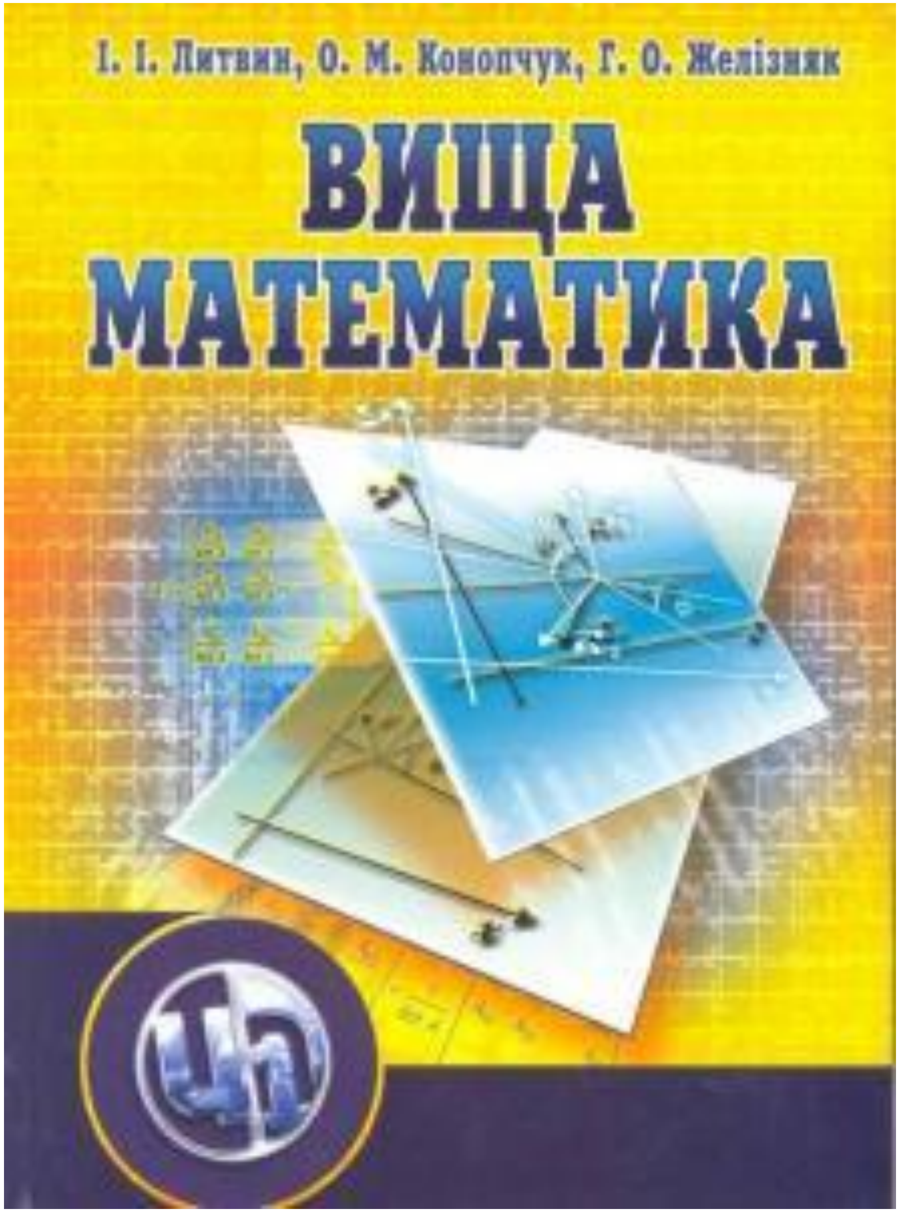
Вища математика: Математичний аналіз

Базова література

[Литвин, І. І.]

Вища математика І.І. Литвин, О.М. Конончук, Г.О. Желізняк. - Львів 2002. - 272 с. -



Барковський В.В., Барковська Н.В. Б25 Вища математика для економістів: 5-те вид. Навч. посіб. — К.: Центр учбової літератури, 2010. — 448 с

Функції

- **Функція та її основні властивості**
- Задання функції

Функція та її основні властивості

У повсякденному житті нам часто доводиться спостерігати процеси, у яких зміна однієї величини (незалежної змінної) призводить до зміни іншої величини (залежної змінної). Вивчення цих процесів потребує створення їх математичних моделей. Однією з таких найважливіших моделей є функція.

Нехай *X — множина значень незалежної змінної, Y — множина значень залежної змінної. Функція — це правило, за допомогою якого за кожним значенням незалежної змінної з множини X можна знайти єдине значення залежної змінної з множини Y.*

Зазвичай незалежну змінну позначають буквою x, залежну — буквою y, функцію (правило) — буквою f. Кажуть, що змінна y функціонально залежить від змінної x. Цей факт позначають так: y = f (x).

Незалежну змінну ще називають аргументом функції.

Функція та її основні властивості

Множину значень, яких набуває аргумент, тобто множину X, називають областю визначення функції і позначають D (f) або D (y).

Наприклад, областю визначення фу $y = \frac{1}{x^2 - 1}$ ***є множина*** $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

Множину значень, яких набуває залежна змінна y, тобто множину Y, називають областю значень функції і позначають E (f) або E (y).

Наприклад, областю значень функції $y = x^2 + 1$ ***є множина*** $E(y) = [1; +\infty)$.

Функція та її основні властивості

Елементами множин D (f) і E (f) можуть бути об'єкти найрізноманітнішої природи.

Так, якщо кожному многокутнику поставити у відповідність його площу, то можна говорити про функцію, область визначення якої — множина многокутників, а область значень — множина додатних чисел.

Якщо кожній людині поставити у відповідність день тижня, у який вона народилася, то можна говорити про функцію, область визначення якої — множина людей, а область значень — множина днів тижня.

Коли $D(f) \subset R$ і $E(f) \subset R$, функцію f називають числовою.

Функцію вважають заданою, якщо вказано її область визначення і правило, за яким за кожним значенням незалежної змінної з області визначення можна знайти значення залежної змінної з області

2.Що таке функція?

Змінну y називають функцією від змінної x

якщо кожному значенню змінної x

відповідає одне певне значення змінної y.

$$y=f(x)$$

залежна змінна

y

$$P=4a$$

$$S=a^2$$

$$C=2\Pi R$$

незалежна змінна

x

Функція - залежність між двома змінними

x

незалежна змінна,

аргумент функції

Усі значення, яких набуває незалежна змінна , утворюють

область визначення функції

$D(y)$

y

залежна змінна,

значення функції

Усі значення, яких набуває залежна змінна, утворюють

область значень функції

$E(y)$

4. Область визначення та область значень функції

Область визначення функції $D(y)$ – це множина всіх значень змінної x, при яких **функція має зміст.**

$y=f(x)$	$D(y)$	Приклад
Многочлен	$D(y)$: X – будь-яке число	$y=3x^2-4x+5$ – многочлен $D(y)$: $x \in R$
Дробовий вираз $y=\dfrac{1}{f(x)}$	$D(y)$: $f(x) \neq 0$	$y=\dfrac{5}{2x+6}$ $D(y)$: $2x+6\neq 0$ $x\neq -3$ $D(y)$: $x \in R$, крім $x=-3$.

Задання функції

Функцію можна задати одним з таких способів:

- **описово;**
- **за допомогою формули;**
- **за допомогою таблиці;**
- **графічно.**

Найчастіше функцію задають за допомогою формули. **Якщо при цьому не вказано область визначення, то вважають, що областю визначення функції є область визначення виразу, який входить до формули**. Наприклад, як $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ функція *f задана формулою* *то її областю* $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ *начення є область визначення виразу*

, тобто проміжок (1; +∞).

3. Способи задання функції.

Табличний

функція задається за допомогою ***таблиці***

x	1	2	3	4	5	6	7
y	1	4	9	16	25	36	49

Аналітичний

функція задається за допомогою ***математичної формули***

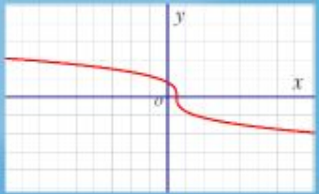
$P=4a$ $V=a^3$ $S=2\Pi R$

$y=-0{,}5x+1$ $y=7x-3$

$y=x^2+3$

Графічний

функція задається за допомогою ***графіка***



Описовий

функція задається ***словесним описом***

- *Кожному натуральному числу поставимо у відповідність число йому протилежне.*
- *Функція Дирихле:*
  f(x)=1 для всіх раціональних x,
  f(x)=0 для всіх ірраціональних x.

Табличний

*функція задається за допомогою **таблиці***

x	1	2	3	4	5	6	7
y	1	4	9	16	25	36	49

Аналітичний

функція задається за допомогою ***математичної формули***

$P=4a$ $V=a^3$ $S=2\Pi R$

$y=-0{,}5x+1$ $y=7x-3$

$y=x^2+3$

Описовий

функція задається

словесним описом

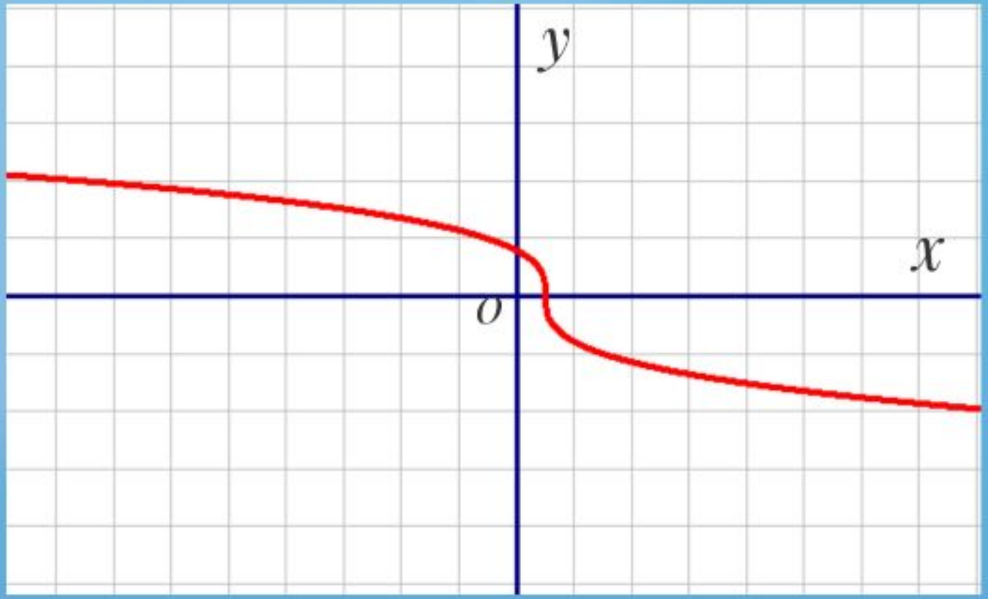
- *Кожному натуральному числу поставимо у відповідність число йому протилежне.*
- *Функція Дирихле:*

  $f(x)=1$ для всіх раціональних x,

  $f(x)=0$ для всіх ірраціональних x.

Графічний

функція задається за допомогою ***графіка***



Графік функції

Означення. Графіком числової функції f називають геометричну фігуру, яка складається з усіх тих і тільки тих точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції f.

Сказане означає, що коли якась фігура є графіком функції f, то виконуються дві умови:

1) *якщо x_0 — деяке значення аргументу, а $f(x_0)$ — відповідне значення функції, то точка з координатами $(x_0; f(x_0))$ належить графіку;*
2) *якщо $(x_0; y_0)$ — координати довільної точки графіка, то x_0 і y_0 — відповідні значення незалежної і залежної змінних функції f, тобто $y_0 = f(x_0)$.*

Фігура на координатній площині може бути графіком деякої числової функції, якщо будь-яка пряма, перпендикулярна до осі абсцис, має з цією фігурою не більше однієї спільної точки. Наприклад, коло не може слугувати графіком жодної функції: т... значенням аргументу x не завжди однозначно зна... ння змінної y (рис. 7).

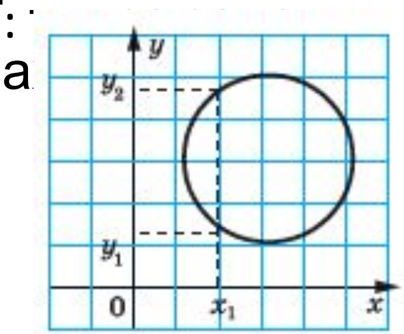
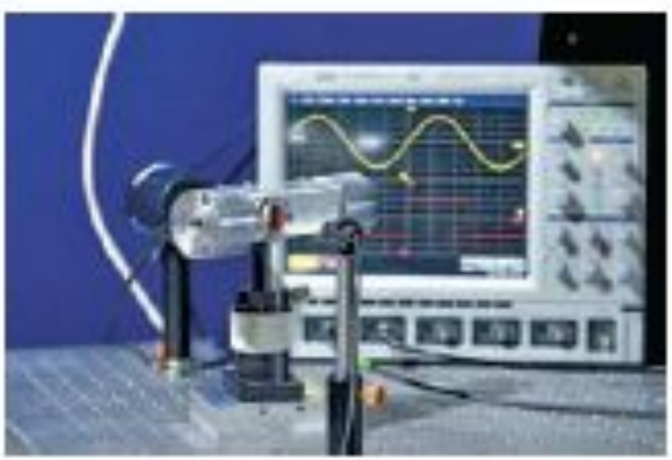


Рис. 7

Графік функції

Графічний спосіб задання функції широко застосовується при дослідженні реальних процесів. Існують прилади, які видають оброблену інформацію у вигляді графіків. Так, у медицині використовують електрокардіограф. Цей прилад рисує криві, які характеризують роботу серця



Осцилограф

Електрокардіограф

Графік функції

На рисунку 8 зображено графік деякої функції *y = f (x)*

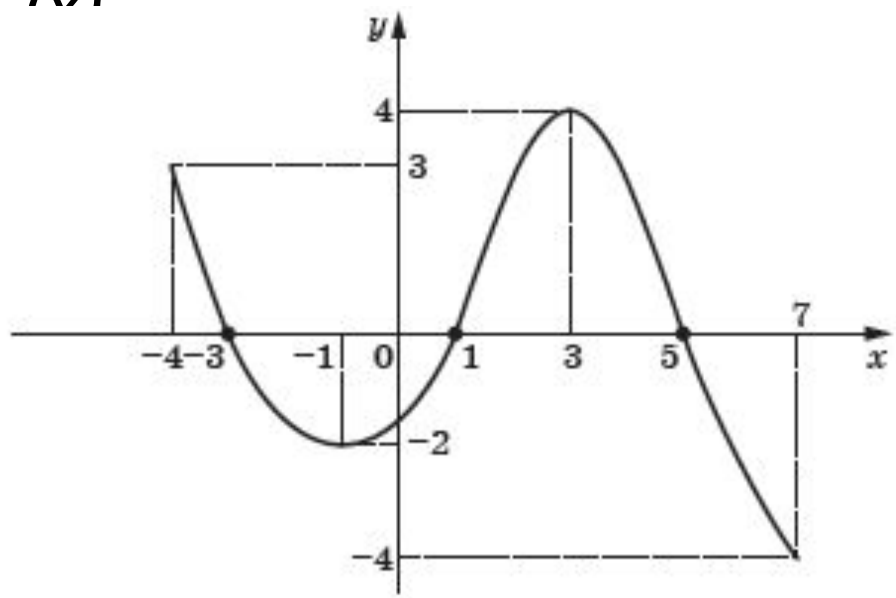


Рис. 8

Її областю визначення є проміжок [–4; 7], а областю значень — проміжок [–4; 4]. При *x = –3, x = 1, x = 5 значення функції дорівнює нулю.*

Нулі функції

Означення. Значення аргументу, при якому значення функції дорівнює нулю, називають нулем функції.

Так, числа –3, 1, 5 є нулями даної функції.

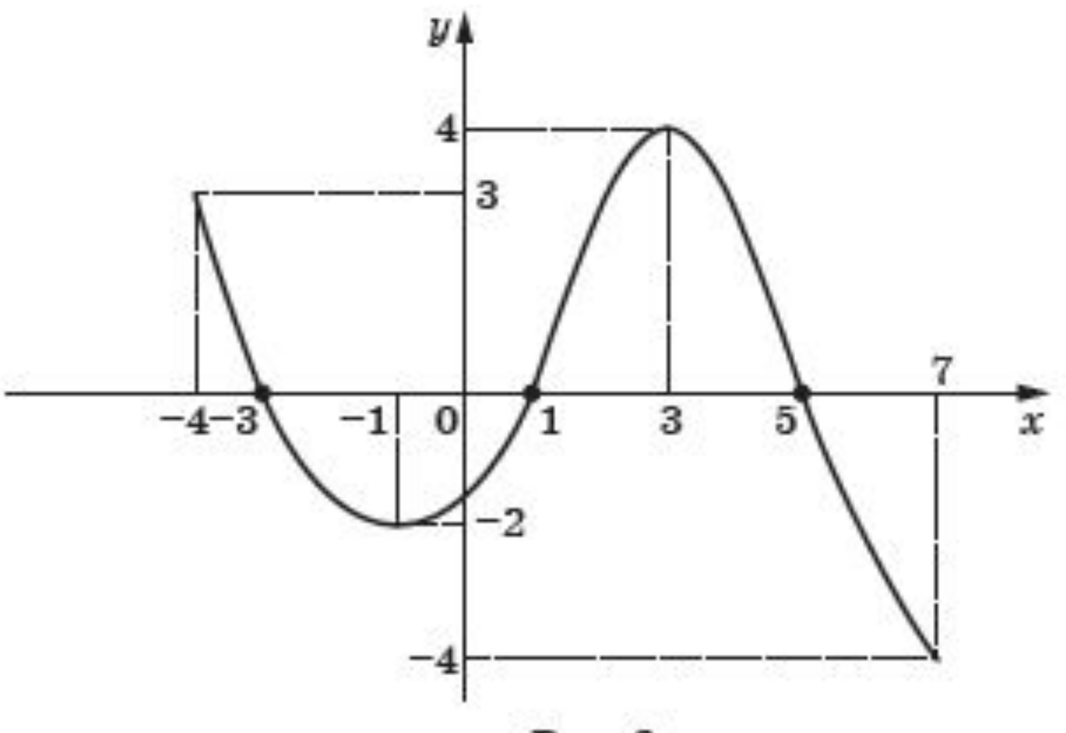


Рис. 8

Проміжки знакосталості

Зауважимо, що на проміжках [–4; –3) і (1; 5) графік функції f розташований над віссю абсцис, а на проміжках (–3; 1) і (5; 7] — під віссю абсцис Це означає, що на проміжках [–4; –3) і (1; 5) функція набуває додатних значень, а на проміжках (–3; 1) і (5; 7] — від'ємних.

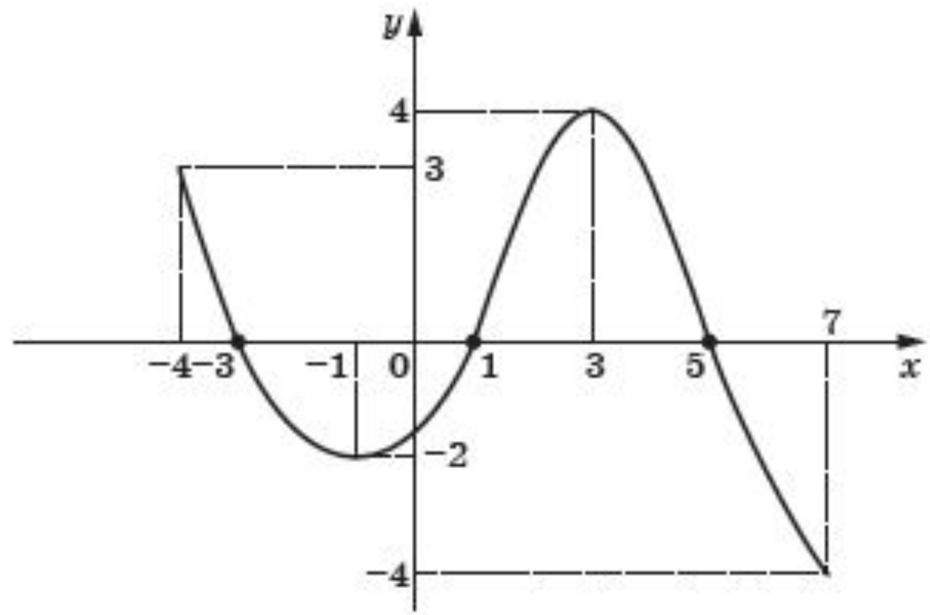


Рис. 8

Означення. Проміжок, на якому функція набуває значень однакового знака, називають проміжком знакосталості функції.

Проміжки знакосталості

Наприклад, проміжки $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ є проміжками знакосталості функції $y = x^2$.

Зауваження. Під час пошуку проміжків знакосталості функції прийнято вказувати проміжки максимальної довжини. Наприклад, проміжок $(-2; -1)$ є проміжком знакосталості функції f (рис. 8), але до відповіді увійде проміжок $(-3; 1)$, який містить проміжок $(-2; -1)$.

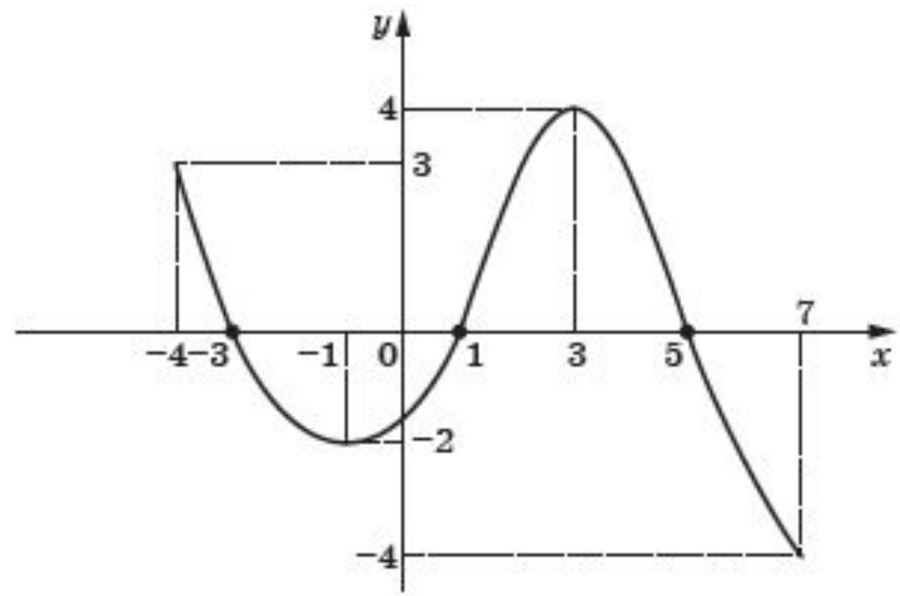


Рис. 8

Зростання функції

Якщо переміщатися по осі абсцис від –4 до –1, то можна помітити, що графік функції йде вниз, тобто значення функції зменшуються. Кажуть, що на проміжку [–4; –1] функція спадає. Із збільшенням x від –1 до 3 графік функції йде вгору, тобто значення функції збільшуються. Кажуть, що на проміжку [–1; 3] функція зростає.

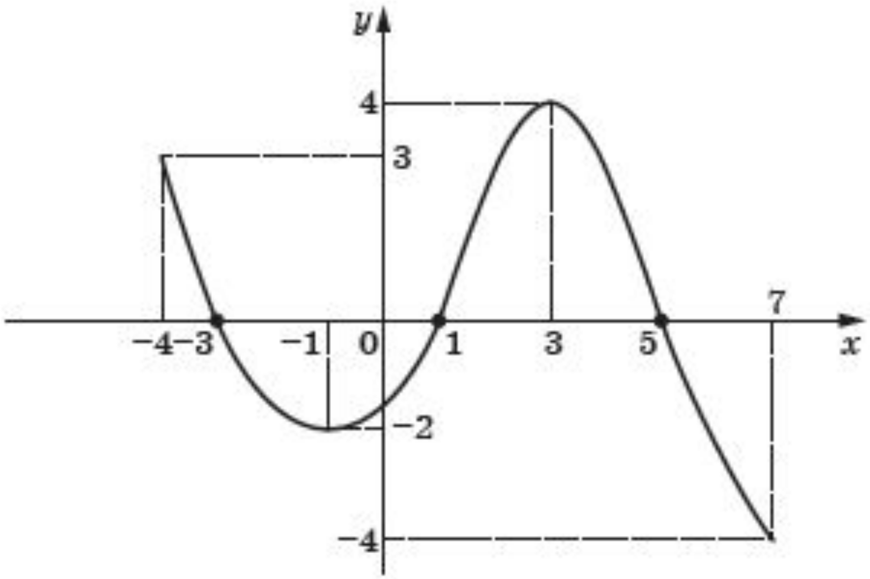


Рис. 8

Означення. Функцію f називають зростаючою на множині M ⊂ D (f), якщо для будь-яких двох значень аргументу x_1 і x_2, які належать множині M, таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$.

Спадання функції

Означення. Функцію f називають спадною на множині $M \subset D(f)$, якщо для будь-яких двох значень аргументу x_1 і x_2, які належать множині M, таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$.

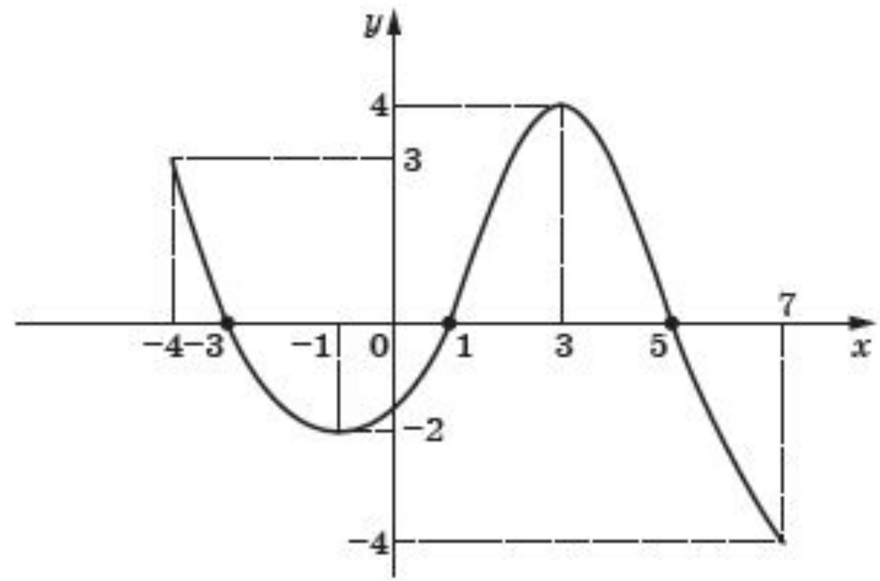


Рис. 8

Часто використовують коротше формулювання.

Зростання та спадання функції

Означення. Функцію f називають зростаючою (спадною) на множині М, якщо для будь-яких значень аргументу з цієї множини більшому значенню аргументу відповідає більше (менше) значення функції.

Наприклад, функція $y = x^2 - 2x$ (рис. 9) спадає на множині $(-\infty; 1]$ і зростає на множині $[1; +\infty)$.

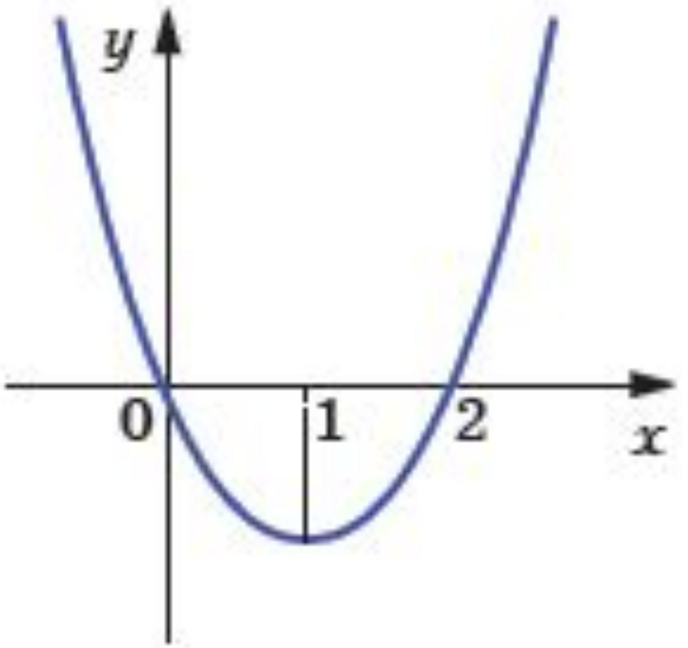


Рис. 9

Зростання та спадання функції

Також кажуть, що проміжок (–∞; 1] є проміжком спадання, а проміжок [1; +∞) є проміжком зростання функції $y = x^2 - 2x$.

У задачах на пошук проміжків зростання і спадання функції прийнято вказувати проміжки максимальної довжини.

Якщо функція зростає на всій області визначення, то її називають зростаючою.

Якщо функція спадає на всій області визначення, то її називають спадною.

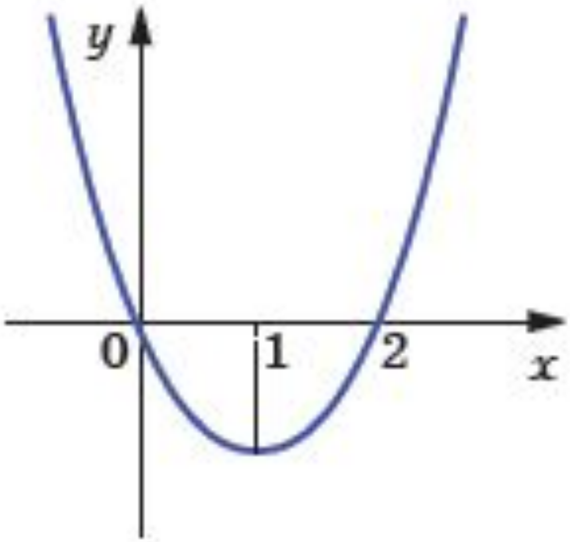


Рис. 9

Приклади зростаючої та спадної функції

Зростаюча: $y = \sqrt{x}$

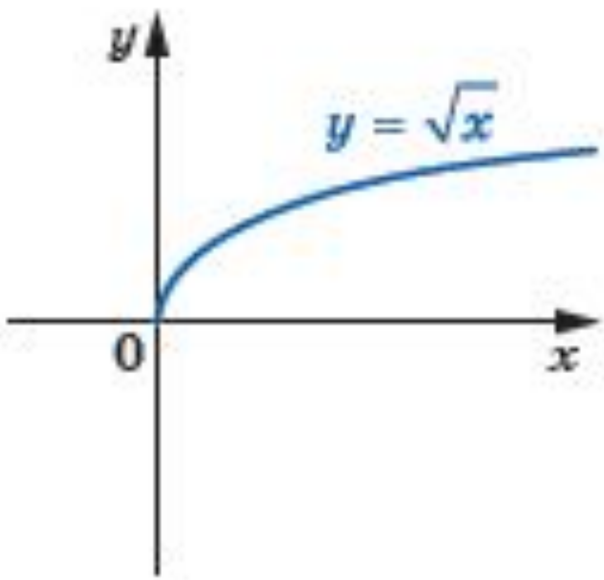


Рис. 10

Спадна: $y = -x$

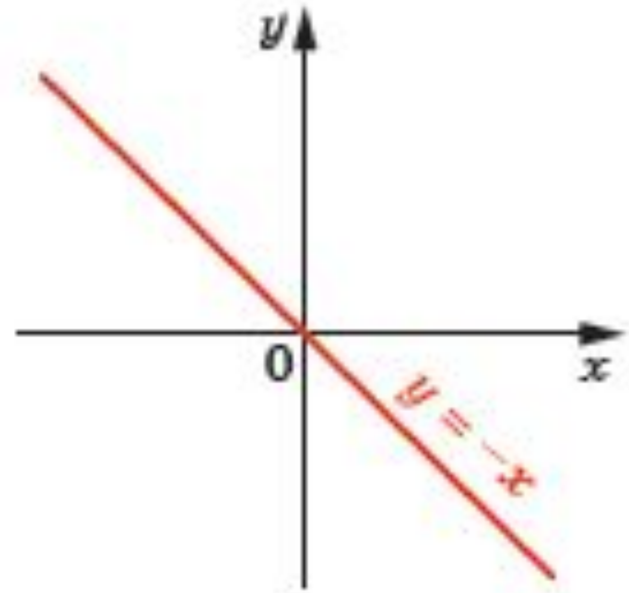
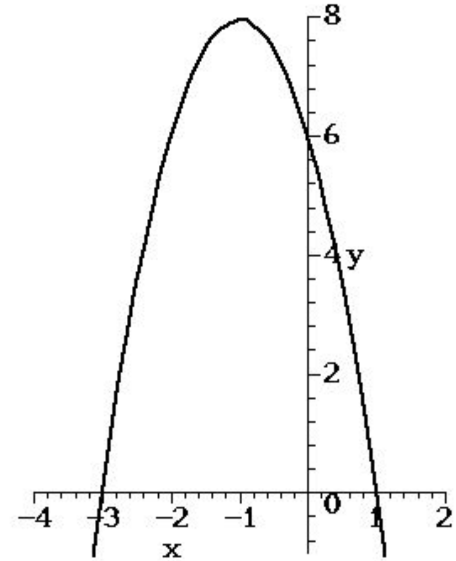


Рис. 11

Найбільше і найменше значення функції

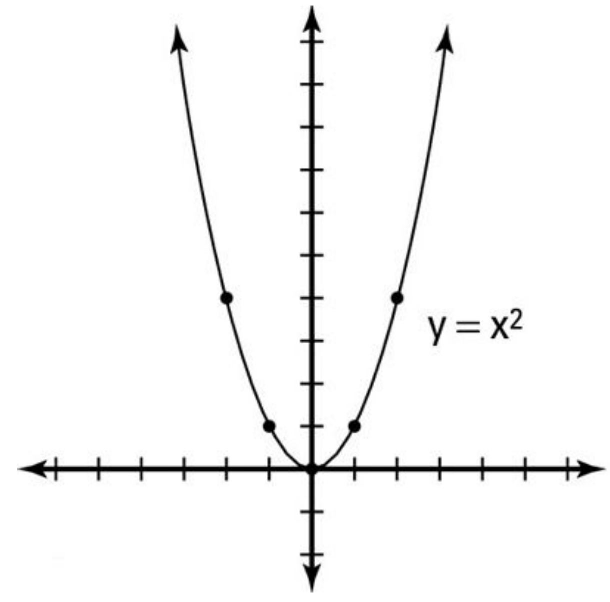
Нехай у множині $M \subset D(f)$ *існує таке число x_0, що для всіх $x \in M$ виконується нерівність $f(x_0) \geq f(x)$. У такому випадку говорять, що число $f(x_0)$ —* ***найбільше значення функції f на множині M,*** і записують

$$\max_M f(x) = f(x_0).$$



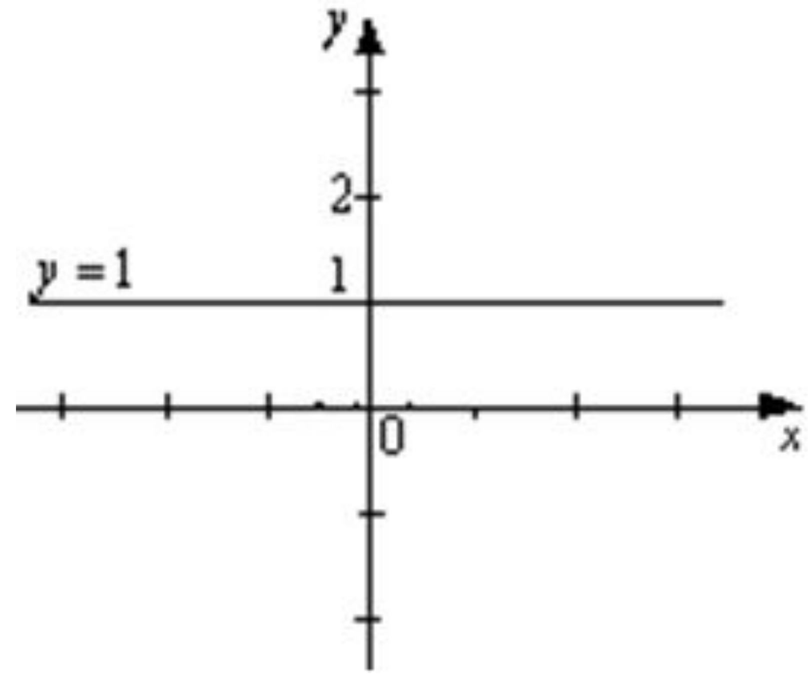
Якщо для всіх $x \in M$ виконується нерівність $f(x_0) \leq f(x)$, то число $f(x_0)$ називають ***найменшим значенням функції f на множині M*** і

$$\min_M f(x) = f(x_0).$$



Найбільше і найменше значення функції

Якщо c — деяке число і $f(x) = c$ для будь-якого $x \in M$, то число c є і найбільшим, і найменшим значенням функції f на множині M.



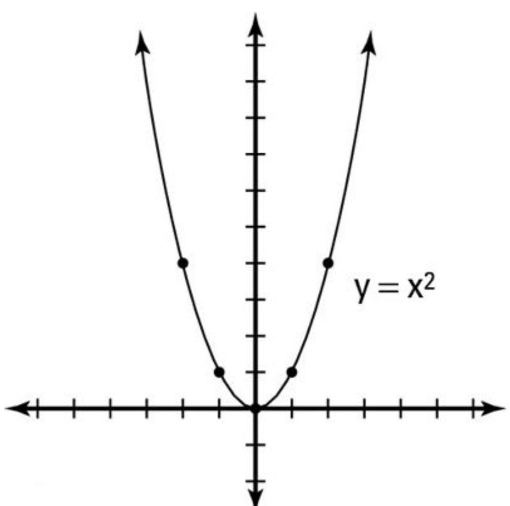
Найбільше і найменше значення функції

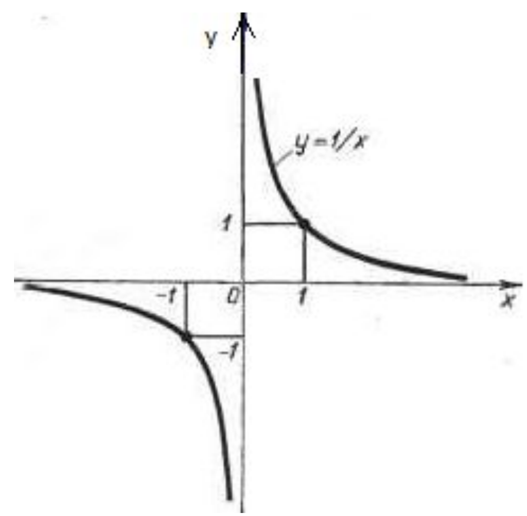
Не будь-яка функція на заданій множині M ⊂ D (f) має найменше або найбільше значення.

Так, для функції $f(x) = x^2$ маємо $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x) = 0$.

Найбільшого значення на множині R ця функція не має.

Функція $f(x) = \frac{1}{x}$ на множині M = (0; +∞) не має ні найбільшого, ні найменшого значень.



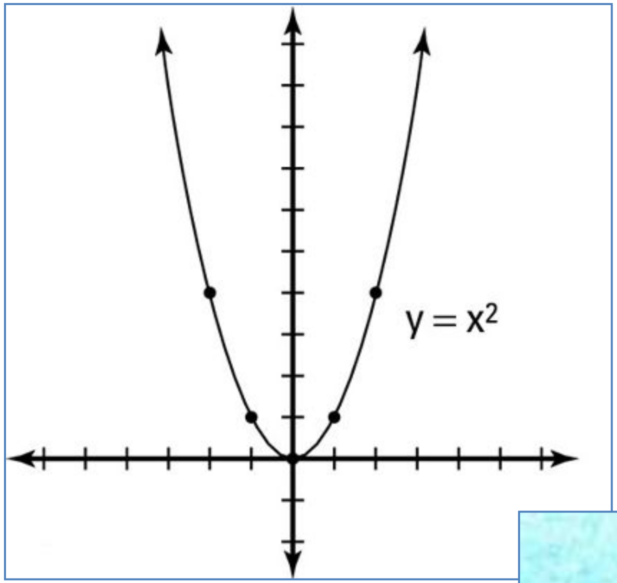


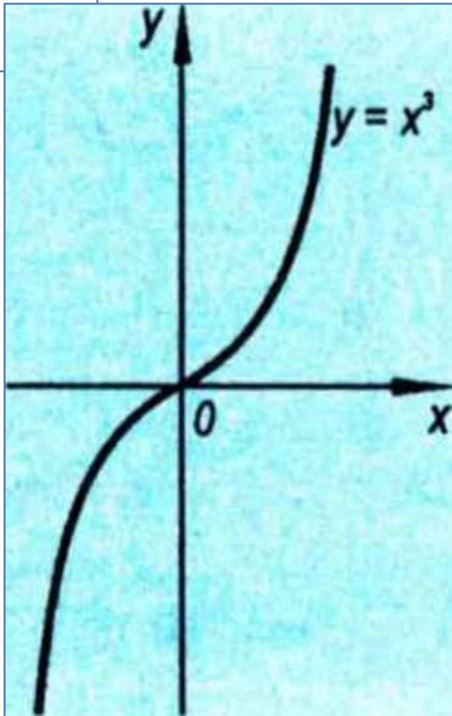
Парні і непарні функції

Означення. Функцію *f* *називають парною, якщо для будь-якого x з області визначення f (–x) = f (x).*

Означення. Функцію *f* *називають непарною, якщо для будь-якого x з області визначення f (–x) = –f (x).*

Очевидно, що функція $y = x^2$ є парною, а функція $y = x^3$ — непарною.





Парні і непарні функції

Виконання рівності $f(-x) = f(x)$ або рівності $f(-x) = -f(x)$ для будь-якого $x \in D(f)$ означає, що область визначення функції f має таку властивість: якщо $x_0 \in D(f)$, то $-x_0 \in D(f)$. Таку множину називають симетричною відносно початку координат.

Якщо область визначення функції не є симетричною відносно початку координат, то ця функція не може бути парною (непарною).

Наприклад,

$$y = \frac{1}{x-1}$$

Областю визначення функції є множина $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, яка не є симетричною відносно початку координат. Тому ця функція не є **ні парною, ні непарною.**

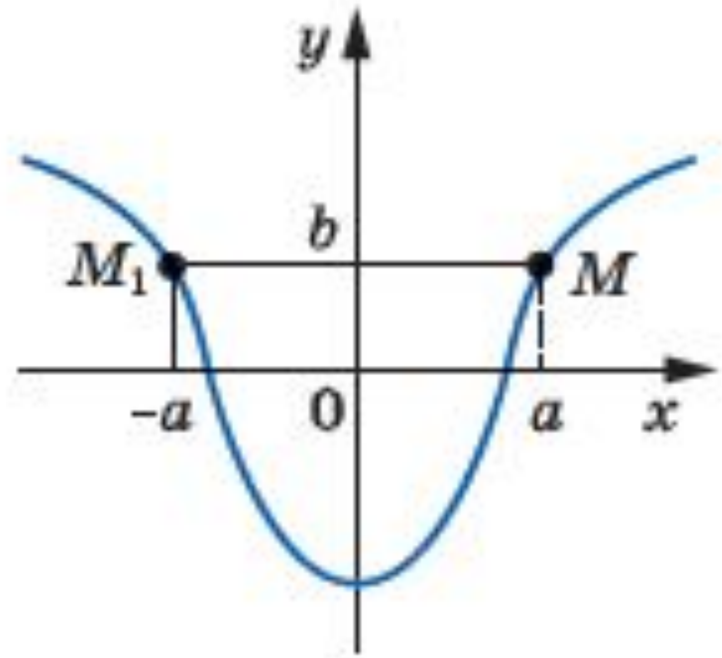


Рис. 19