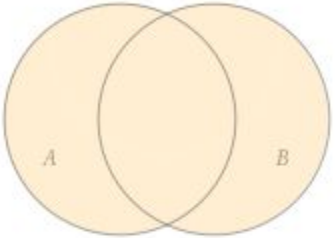
Лекция 2. Операции над множествами и их свойства.

Операции на множествах

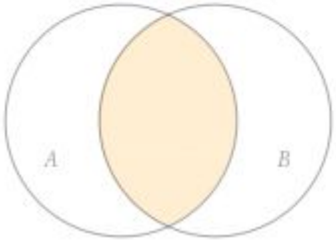
Объединением множеств А и В называется множество, состоящее из элементов принадлежащих множеству А или В, то есть хотя бы одному из множеств.

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$



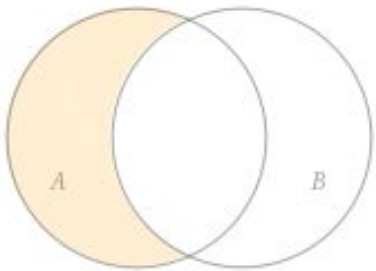
Пересечением множеств А и В называется множество, состоящее из элементов принадлежащих одновременно и множеству А и множеству В.

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$



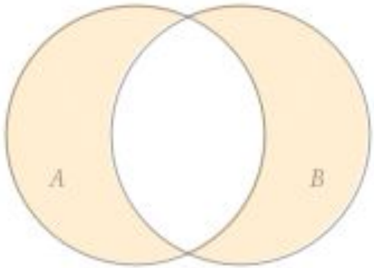
Разностью множеств А и В называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих А и не принадлежащих В.

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$$

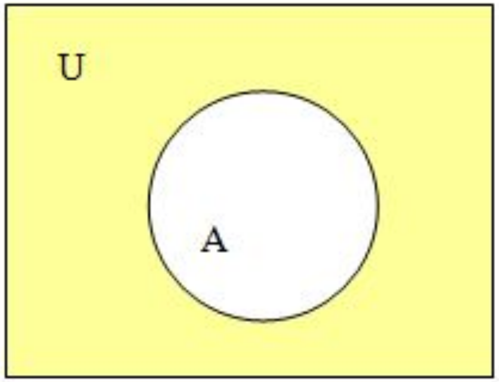


Симметрической разностью множеств А и В называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих либо только А, либо только В.

$$A \Delta B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B \quad \text{или} \quad x \notin A \text{ и } x \in B\}$$



Дополнением множества А называется множество, содержащее элементы, не принадлежащие А (и принадлежащие универсальному множеству U).



Свойства операций

1. Коммутативность

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$
$$A \Delta B = B \Delta A$$

Но $A \setminus B \neq B \setminus A$

2. Ассоциативность

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$$

Ассоциативность позволяет в дальнейшем писать без скобок:

$$A \cap B \cap C \cap D \text{ или } A_1 \Delta A_2 \Delta A_3,$$

не опасаясь разночтений. Также можно встретить записи вида $\bigcup\limits_i A_i$ или $\bigcap\limits_{k=1}^{n} B_k$, означающие объединение или пересечение конечного или даже бесконечного числа множеств.

3. Дистрибутивность

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- дистрибутивность объединения относительно пересечения слева и дистрибутивность пересечения относительно объединения слева.

Очевидно, ввиду коммутативности операций, дистрибутивность пересечения и объединения относительно друг друга справедлива также и справа.

4. Идемпотентность

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

Но $\boxed{\begin{array}{l} A \setminus A = \varnothing \\ A \Delta A = \varnothing \end{array}}$

5. $A \cup U = U$

$$A \cup \varnothing = A$$

$$A \cap U = A$$

$$A \cap \varnothing = \varnothing$$

5. Законы де Моргана

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

6. Законы поглощения

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

7.Свойства операции разности

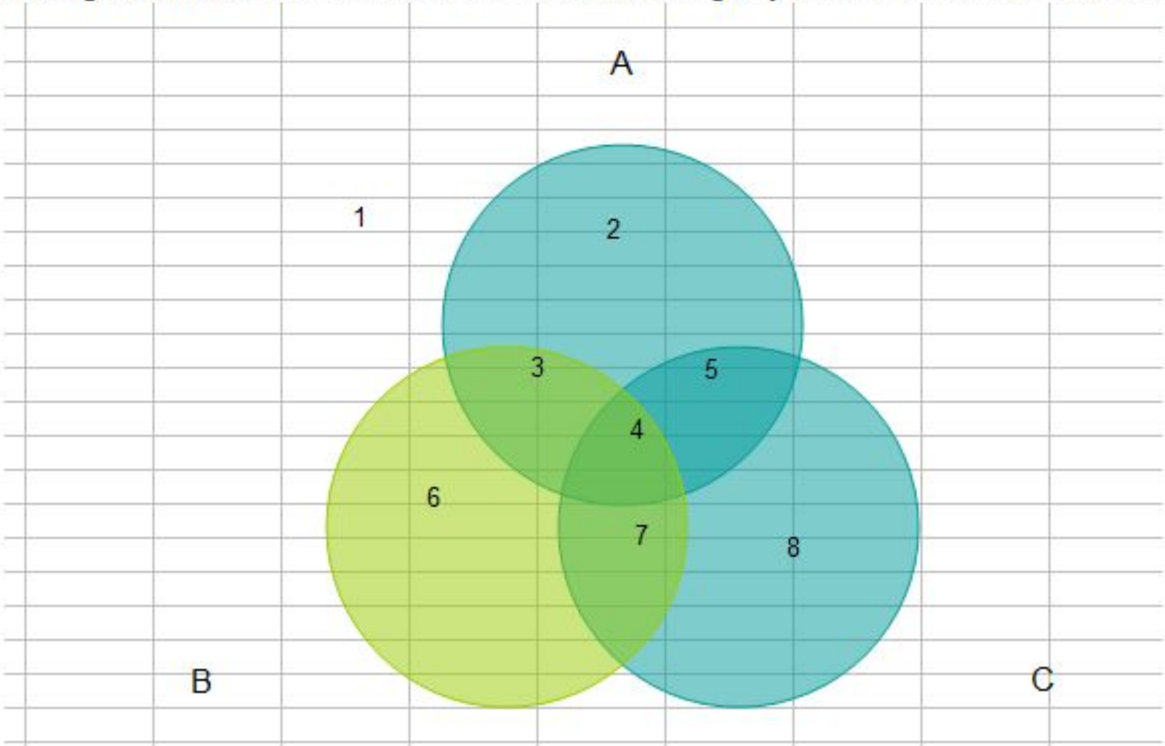
7.1	$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$	7.5	$A \setminus B = A \cap \overline{B}$, $A \setminus A = \varnothing$
7.2	$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$	7.6	$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
7.3	$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$	7.7	$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$
7.4	$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$	7.8	$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$

8.Свойства операций симметрической разности

8.1	$A \,\Delta\, B = B \,\Delta\, A$
8.2	$A \,\Delta\, B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
8.3	$(A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C = A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C)$
8.4	$A \cap (B \,\Delta\, C) = (A \cap B) \,\Delta\, (A \cap C)$

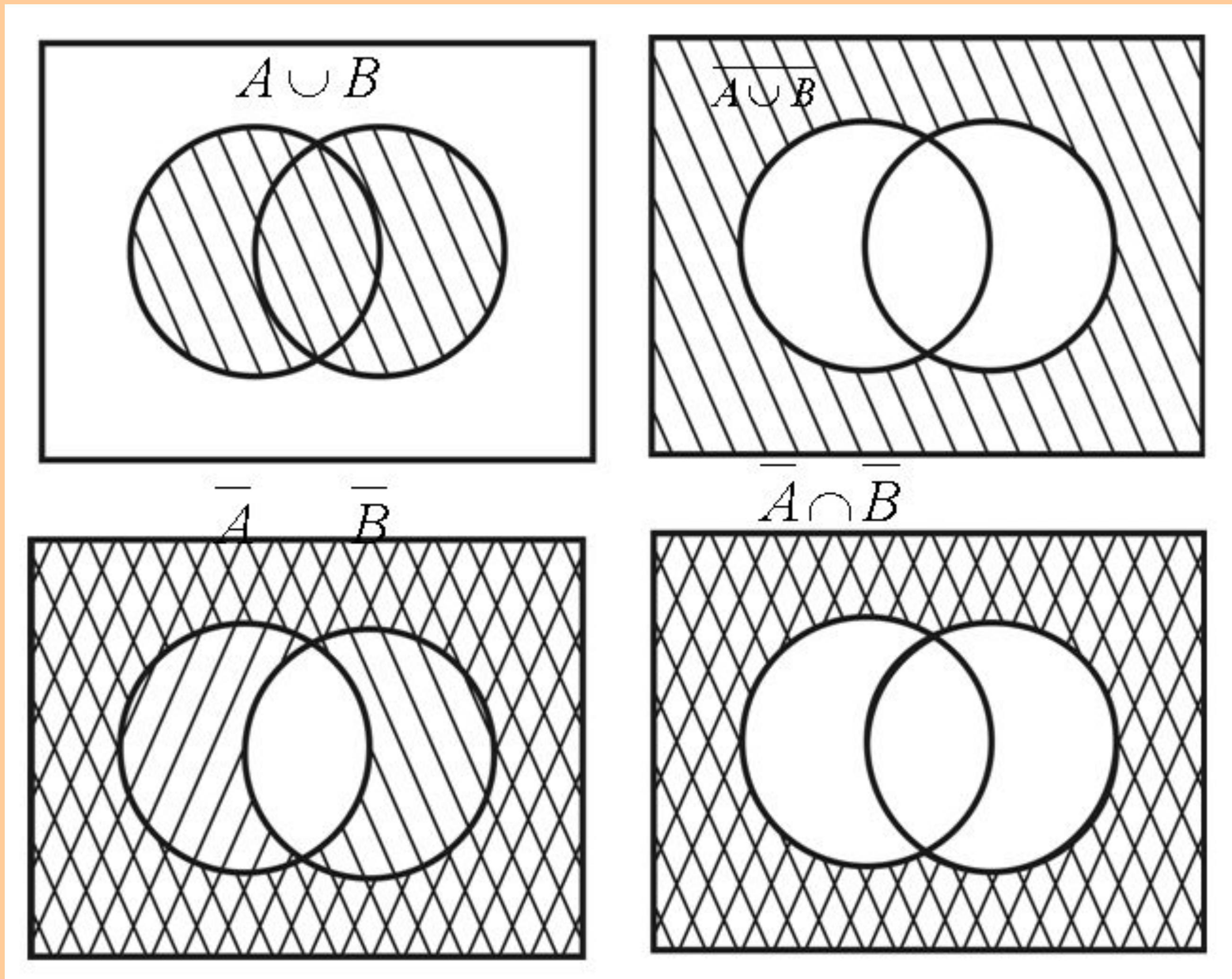
О доказательстве тождеств

Некоторые из рассмотренных свойств достаточно очевидны – свойства коммутативности или ассоциативности, например. Другие же свойства не столь очевидны и требуют доказательства. Доказательства свойств операций обычно проводят двумя способами: с помощью определения операций и с помощью диаграмм Эйлера-Венна. Если первый способ достаточно универсальный, то второй годится только для двух или трех множеств. При этом рисовать диаграмму для трех множеств необходимо так, чтобы присутствовали все 8 областей:



Доказательства с помощью диаграмм Эйлера-Венна

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$



Доказательство по определению операций

Более универсальным является способ доказательств, основанный на определении операций. Докажем с помощью него второе тождество де Моргана.

Доказать: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Обозначим левую часть как $M = \overline{A \cap B}$, а правую как $N = \overline{A} \cup \overline{B}$. Для доказательства равенства множеств необходимо показать, что $M \subseteq N$ и $N \subseteq M$.

1. Докажем, что $M \subseteq N$.

Пусть произвольный $x \in M$, то есть $x \in \overline{A \cap B}$. По определению отрицания это означает, что $x \notin A \cap B$. Далее, по определению пересечения последнее означает, что возможны три случая:

1) $x \notin A$ и $x \notin B$
2) $x \in A$ и $x \notin B$
3) $x \notin A$ и $x \in B$

Для случаев 1) и 3) из $x \notin A$ по определению дополнения следует, что $x \in \overline{A}$. Далее по определению объединения из $x \in \overline{A}$ следует, что $x \in \overline{A} \cup T$, где T - любое множество, в том числе и $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. А это означает, что $x \in N$. Для случая 2 из $x \notin B$ по определению дополнения следует $x \in \overline{B}$ и далее по определению объединения $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$, $x \in N$. Мы получили, что если произвольный элемент $x \in M$, то $x \in N$, это означает по определению подмножества, что $M \subseteq N$, ч.т.д.

2. Докажем, что $N \subseteq M$.

Пусть произвольный $x \in N$, то есть $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. По определению объединения возможны три случая:

1) $x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{B}$, по определению дополнения $x \notin A$ и $x \notin B$

2) $x \in \overline{A}$ и $x \notin \overline{B}$, по определению дополнения $x \notin A$ и $x \in B$

3) $x \notin \overline{A}$ и $x \in \overline{B}$, по определению дополнения $x \in A$ и $x \notin B$

Для случаев 1) и 2) из $x \notin A$ по определению пересечения следует, что $x \notin A \cap T$, где T - любое множество, в том числе и $x \notin A \cap \mathbf{B}$. Тогда по определению дополнения $x \in \overline{A \cap \mathbf{B}}$. А это означает, что $x \in M$. Для случая 3) из $x \notin B$ по определению пересечения следует, что $x \notin B \cap T$, где T - любое множество, в том числе и $x \notin A \cap \mathbf{B}$. Тогда по определению дополнения $x \in \overline{A \cap \mathbf{B}}$, то есть $x \in N$. Мы получили, что если произвольный элемент $x \in N$, то $x \in M$, это означает по определению подмножества, что $N \subseteq M$, ч.т.д.

По определению равенства множеств из $M \subseteq N$ и $N \subseteq M$ следует $N = M$.

Покрытия и разбиения

Опр. Пусть $E = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ - некоторое семейство подмножеств А.
Семейство Е называется **покрытием** множества А, если каждый элемент из А принадлежит хотя бы одному из множеств $E_i, i \in \{1, \dots, n\}$.

Пример.
$A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$
$E_1=\{1,2,5,8\}$
$E_2=\{3,4,7,10\}$
$E_3=\{1,6,9\}$
$E=\{E_1,E_2,E_3\}$ – покрытие А.

Таким образом, $E = \{E_i\}$, $i \in I$, где $(\forall\ i \in I)\ E_i \subseteq A$ – покрытие множества $A \Leftrightarrow A = \bigcup_{i \in I} E_i$.

Пример пусть $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$. Выяснить, какие из следующих семейств являются покрытиями множества A:

$E_1 = \{\{a\}, \{c, d\}, \{f, g, h\}, \{i, j, k\}\}$;

$E_2 = \{\{i, j, k\}, \{e, f, g, h\}, \{a, b, c, d\}\}$;

$E_3 = \{\{a, f, i, k, d\}, \{b, c, g, h\}, \{d\}, \{e, j\}\}$;

$E_4 = \{\{c, d, e, f\}, \{a, b, c\}, \{i, j, k\}, \{g, k\}\}$.

Определение [illegible]. Покрытие E называется *разбиением* множества A, если каждый элемент множества A принадлежит в точности одному множеству семейства E.

Таким образом, $E = \{E_i\}$, $i \in I$, где $(\forall\ i \in I)\ E_i \subseteq A$ – разбиение множества $A \Leftrightarrow$ $\mathrm{A} = \bigcup_{i \in I} E_i$ и $E_i \cap E_j = \varnothing$, если $i \neq j$.

Пример [illegible]. Пусть $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Выяснить, какие из следующих семейств образуют разбиения множества B:

$E_1 = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6, 8\}, \{7, 9\}\}$;

$E_2 = \{\{5\}, \{2, 4, 8, 9\}, \{1, 6\}\}$;

$E_3 = \{\{1, 3, 7\}, \{4, 6, 8\}, \{2, 5, 6, 9\}\}$;

$E_4 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{8\}, \{9\}\}$.

Число разбиений множества

Пусть A={a,b,c}
Тогда все разбиения будут
1) {{a,b,c}}
2) {{a},{b},{c}}
3) {{a},{b,c}}
4) {{a,b},{c}}
5) {{a,c},{b}}

Число (неупорядоченных) разбиений конечного множества $|A| = n$ равно числу Белла

$$B_n = \sum_{m=0}^{n} S(n,m)$$

где S(n,m) – числа Стирлинга второго рода – число неупорядоченных разбиений n-элементного множества на k подмножеств.

Числа Стирлинга второго рода удовлетворяют рекуррентным соотношениям

1) $S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k)$ для $0 < k \le n$

2) $S(n,k) = \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^{j} \cdot S(j,k-1)$ при S(0,0)=1, S(n,0)=0 при n>0 и S(j,k)=0 при k>j

где $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ - число сочетаний (лекция 1)

B(4) = S(4,0)+S(4,1)+S(4,2)+S(4,3)+S(4,4)

S(1,0)=0 **S(1,1)**=S(0,0)+1*S(0,1)=1+1*0=**1**

S(2,0)=0 **S(2,1)**=S(1,0)+1*S(1,1)=0+1*1=**1** **S(2,2)**=S(1,1)+2*S(1,2)=1+2*0=**1**

S(3,0)=0 **S(3,1)**=S(2,0)+1*S(2,1)=0+1*1=**1** **S(3,2)**=S(2,1)+2*S(2,2)=1+2*1=**3**

S(3,3)=S(2,2)+3*S(2,3)=1+3*0=**1**

S(4,0)=0 S(4,1)=S(3,0)+1*S(3,1)=0+1=**1** **S(4,2)**=S(3,1)+2*S(3,2)=1+2*3=7

S(4,3)=S(3,2)+3*S(3,3)=3+3*1=**6** **S(4,4)**=S(3,3)+4*S(3,4)=1+4*0=**1**

B(4)=0+1+7+6+1=15

Значения B_n для $n = 0, 1, 2, \ldots$ образуют последовательность[1]:

1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21 147, 115 975, ...

$S(n, k)$

n\k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	1	3	1						
4	0	1	7	6	1					
5	0	1	15	25	10	1				
6	0	1	31	90	65	15	1			
7	0	1	63	301	350	140	21	1		
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1	
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1

1. Сколько существует способов раздать 8 писем(разных) 3 почтальонам, так чтобы каждый получил хотя бы по одному письму ?

Ответ. S(8,3)=966

2. Сколькими способами число 122 можно разложить на простые множители?
Ответ. 122 имеет **простые** делители 1,2,61. Число всевозможных их разбиений равно B(3)=5.

Из теста при собеседовании на IT-специальность:

6. Все вороны собирают картины. Некоторые собиратели картин сидят в птичьей клетке. Значит, некоторые вороны сидят в птичьей клетке.

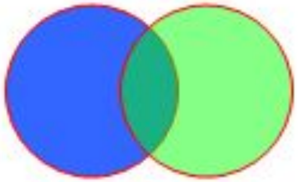
- ○ правильно
- ○ неправильно

-вороны

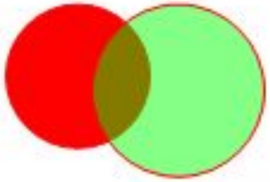
-собиратели картин

-жильцы клеток

Все вороны собирают картины.
$A \subseteq B$



Некоторые собиратели картин сидят в птичьей клетке.
$B \cap C \neq \varnothing$



Значит, некоторые вороны сидят в птичьей клетке.
$A \cap C \neq \varnothing$ - верно ли это?

2. Все крокодилы умеют летать. Все великаны являются крокодилами. Значит, все великаны могут летать.
а)верно
б)неверно

3. Только плохие люди обманывают или крадут. Катя - хорошая.
а) Катя обманывает
б) Катя крадет
в) Катя не крадет
г) Катя обманывает и крадет
д) ни одно из вышеперечисленных