Лекция 13. Возрастание, убывание функций, необходимые и достаточные условия существования экстремума. Исследование на экстремум с помощью высших производных. Выпуклость кривой, точки перегиба, асимптоты функции, исследование функции и построение графиков.

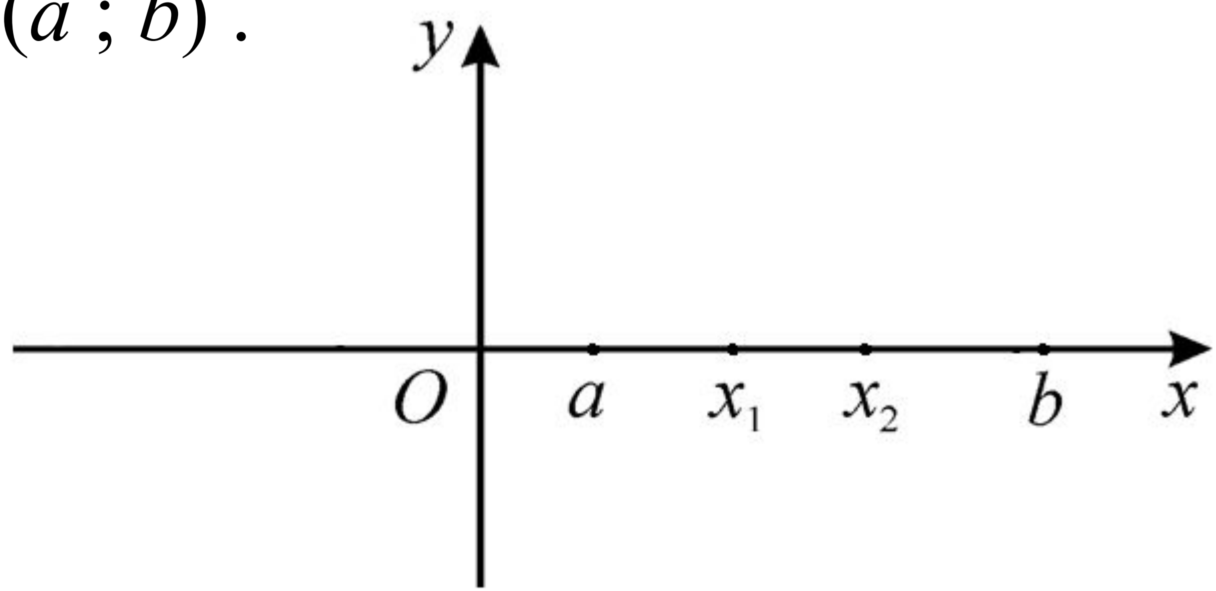
§ 1.Условия постоянства и монотонности функции.

<u>**Теорема**</u> (*критерий постоянства*). Функция $y = f(x)$ является постоянной на интервале $(a\ ;\ b)$ тогда и только тогда, когда её производная тождественно $= 0$ ($f'(x) = 0$) .

Доказательство

« $\Rightarrow$ » Это известно из предыдущего.
« $\Leftarrow$ » Пусть $\forall\ x \in (a\ ;\ b)\ (f'(x) = 0)$.
Требуется показать (**!**) , что $f(x) = \text{const}$.

Достаточно доказать, что $\forall\ x_{1,}\ x_2 \in (a\ ;\ b)$:
$(f(x_1) = f(x_2))$. Действительно, пусть $x_1 < x_2$
и $x_{1,}\ x_2 \in (a\ ;\ b)$.



На отрезке $[x_1 ; x_2]$ функция удовлетворяет всем условиям теоремы Лагранжа. Действительно, она непрерывна на этом отрезке, поскольку она непрерывна на интервале $(a ; b)$.

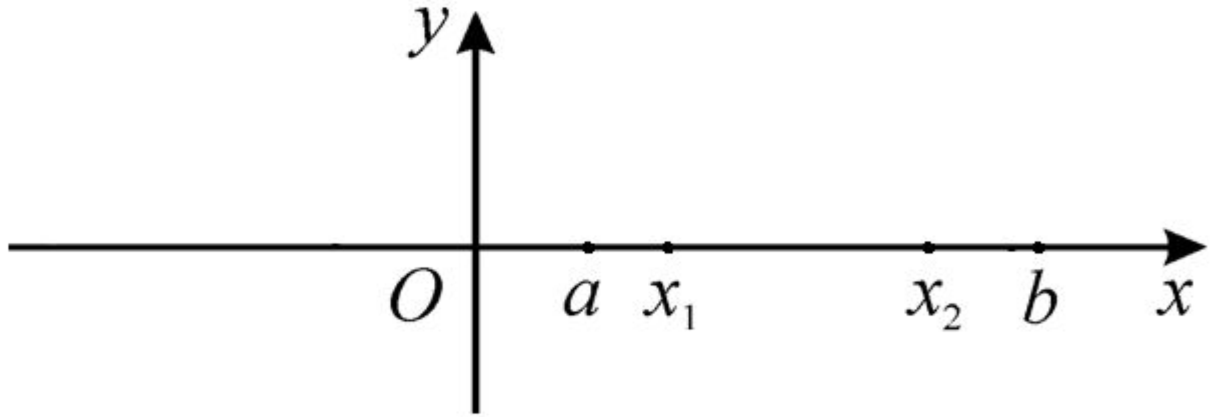
В силу теоремы Лагранжа имеем:
$f(x_2) - f(x_1) = f'(C)(x_2 - x_1)$, где C- некоторая точка из $C \in (x_1 ; x_2)$. Но $f'(C) = 0$, таким образом, $f(x_2) - f(x_1) = 0 \Rightarrow f(x_2) = f(x_1)$. Что и требовалось доказать.

<u>Теорема</u> (*достаточные условия монотонности*). Пусть $\forall\ x \in (a\,;b)\ (f'(x) > 0) \Rightarrow f(x)$ является возрастающей на интервале $(a\,;b)$.

Пусть $\forall\ x \in (a\,;b)\ (f'(x) < 0) \Rightarrow f(x)$ является убывающей на интервале $(a\,;b)$.

Доказательство

<u>1 часть</u>. $f'(x) > 0$ на интервале $(a\,;\,b)$.



(**!**) $\forall\ x_1, x_2 \in (a\,;\,b)\ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$.
Возьмём произвольную пару точек $x_1 < x_2 \in (a\,;\,b)$. На отрезке (x_1, x_2) функция удовлетворяет всем условиям теоремы Лагранжа, и значит, $\exists\, C \in (x_1, x_2)$, что $f(x_2) - f(x_1) = f'(C)\,(x_2 - x_1)$. По условию $f'(C) > 0$, и , стало быть, вся часть положительна, т.е. $f(x_1) - f(x_2) > 0$, т.е. $f(x_1) > f(x_2)$. Ч.т.д.

<u>2 часть</u>. Возьмём произвольную пару точек $x_1, x_2 \in (a\ ; b)$. На $[x_1\ ; x_2]$ функция удовлетворяет всем условиям теоремы Лагранжа. И, значит, $\exists C \in (x_1; x_2)$,

что $f(x_2) - f(x_1) = f'(C)\,(x_2 - x_1)$. По условию $f'(C) < 0$ и, стало быть, вся правая часть отрицательна, т.е. $f(x_2) - f(x_1) < 0$, т.е. $f(x_2) < f(x_1)$. Ч.т.д.

§ 2. Полное исследование функций и построение графика .

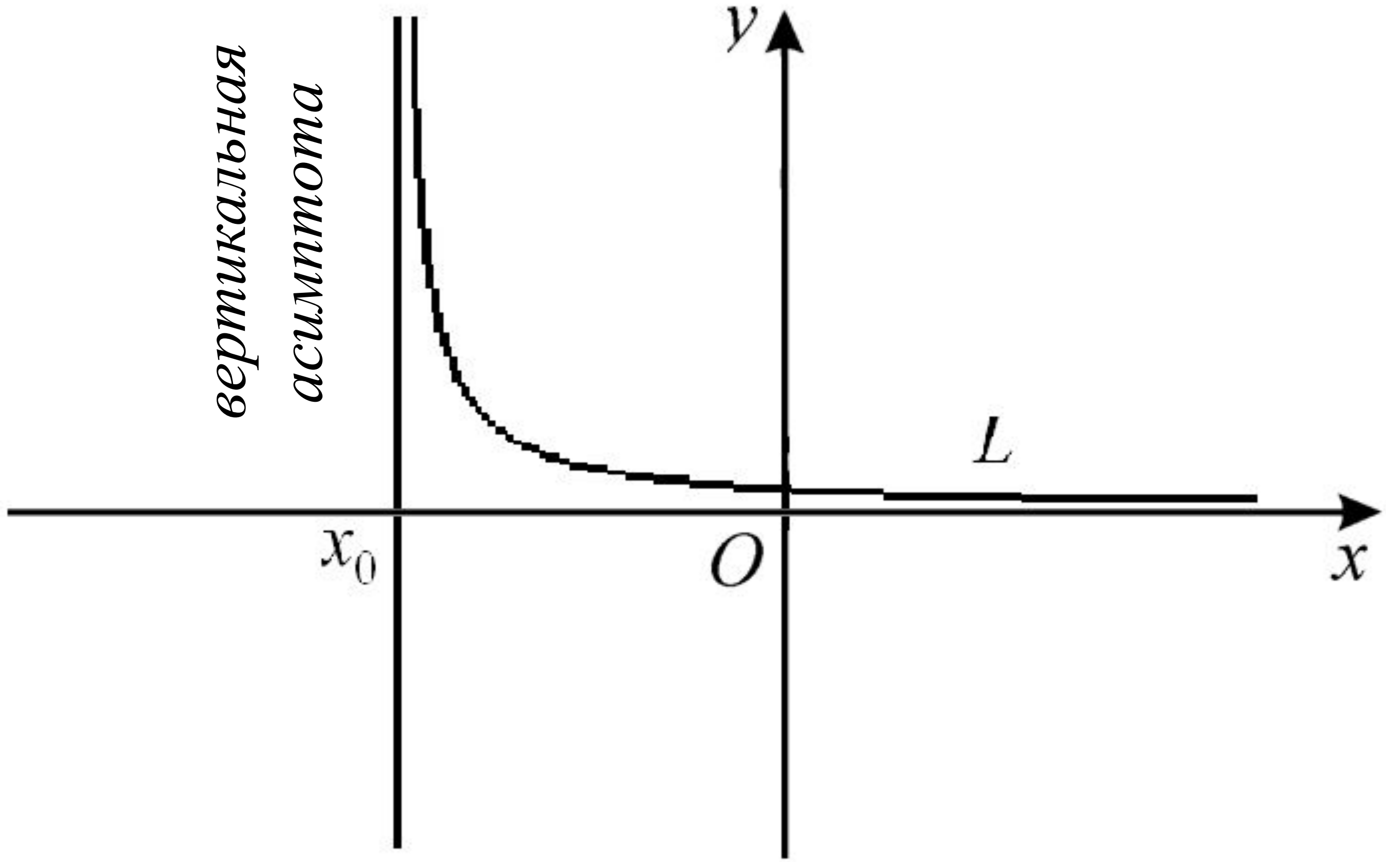
Задача исследования функции и построения графика одна из важнейших в математике. Обычно полное исследование функции производится по следующей схеме:

Алгоритм исследования функции:

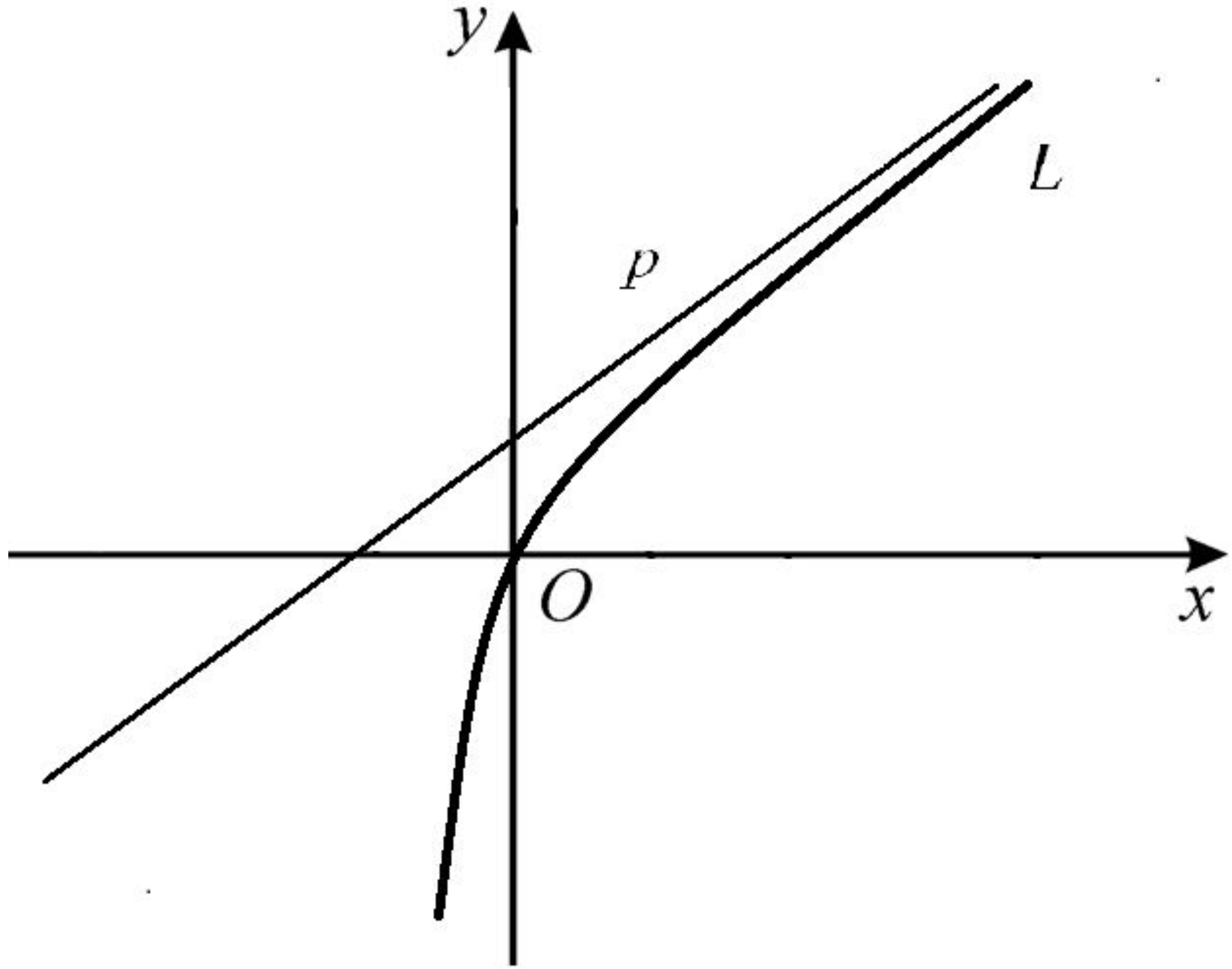
1) О.Д.З. $D(f)$ – область определения функции.
2) Чётность и периодичность.
3) Исследование на непрерывность. Нахождение асимптот.
4) Исследования, связанные с $f'(x)$ (монотонность, нахождение экстремума, возрастание, убывание).
5) Исследования, связанные с $f''(x)$ (промежутки выпуклости, вогнутости, точки перегиба).

6) Вычисление значений функции в некоторых характерных точках (точек пересечения графика с осями координат (если имеются), некоторые уточняющие значения).
7) Используя предыдущее, строим график функции $\Gamma(f)$.

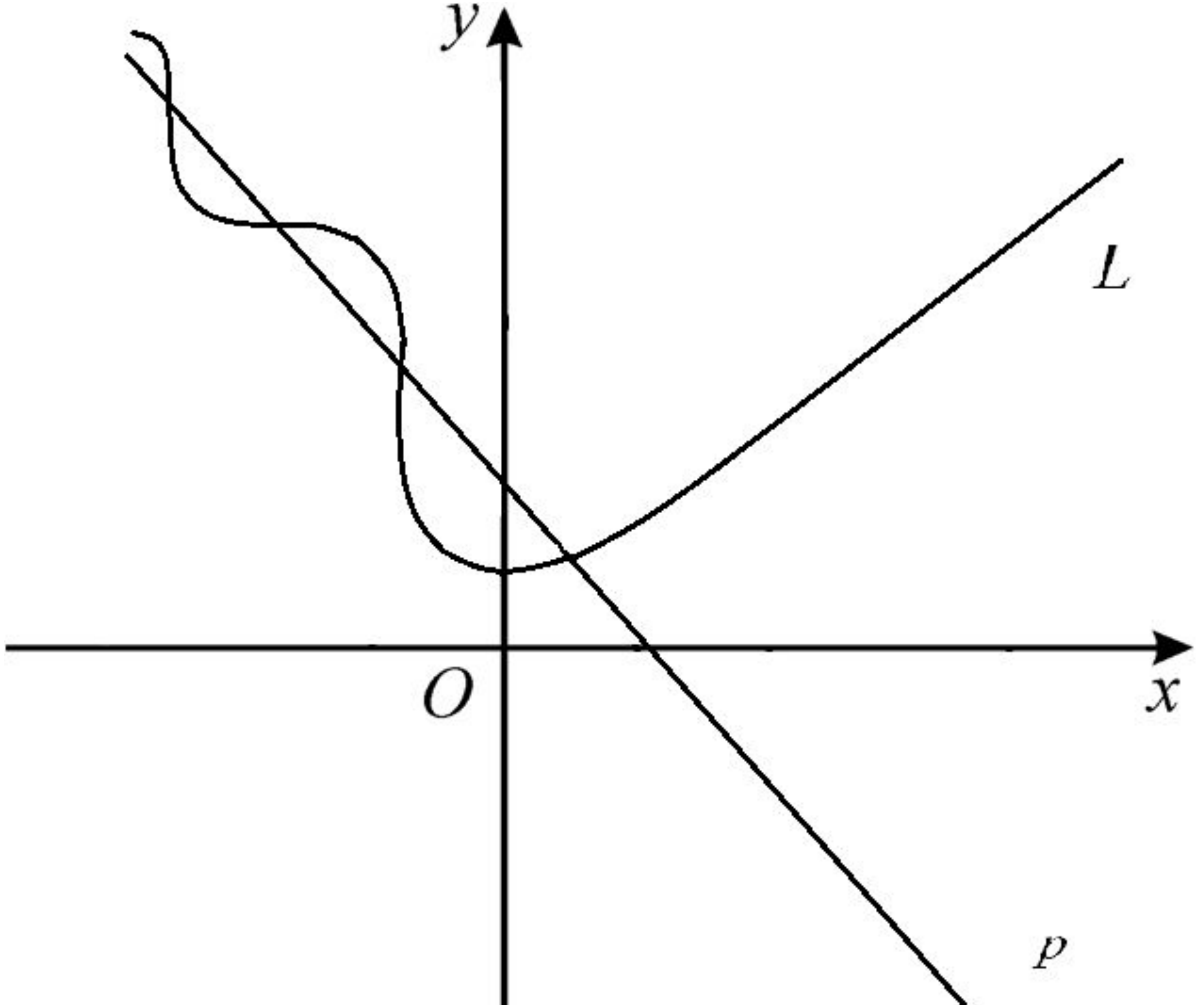
<u>Асимптоты</u>



$x = x_0$ – вертикальная асимптота



p – правая наклонная асимптота



p – левая наклонная асимптота

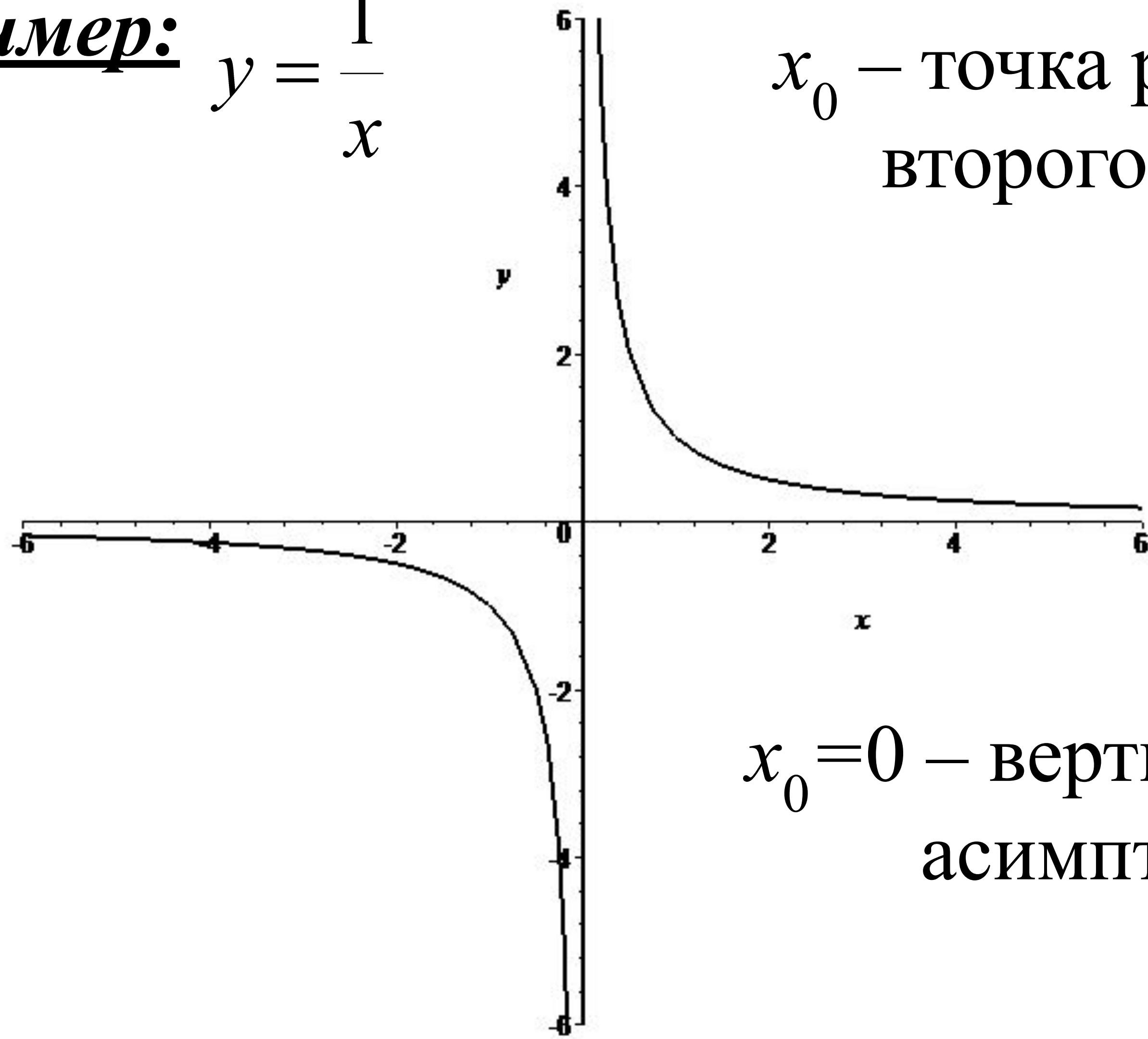
Нас интересуют асимптоты $y = f(x)$.

Определение. Прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов

$$\lim_{\Delta x \to x_{0-0}} f(x) = \infty \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta x \to x_{0+0}} f(x) = \infty$$

Очевидно, в этом случае x_0 является точкой разрыва второго рода.

<u>Пример:</u> $y = \frac{1}{x}$



x_0 – точка разрыва второго рода

$x_0 = 0$ – вертикальная асимптота

Замечание: Легко сделать вывод, что если функция непрерывна на всей числовой оси , то у неё нет вертикальных асимптот.

В рассматриваемом примере

$y = 0$ – горизонтальная асимптота

Общее определение асимптоты (начальное) определение . Прямая p называется асимптотой плоской кривой L, если переменная точка $M \in L$ неограниченно приближается к прямой p при своём стремлении по кривой к бесконечности.

Наклонные асимптоты функции бывают правыми и левыми. При этом $y = kx + b$ является правой наклонной асимптотой $y = f(x)$, если $k = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ и $b = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - kx)$

(оба предела конечные).

Прямая $y = kx + b$ является левой наклонной асимптотой, если $k = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ и

$$b = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - kx)$$

В этом случае, если $k = 0$, асимптота называется горизонтальной. Таким образом, чтобы найти наклонную асимптоты функции $y = f(x)$, нужно найти соответствующие пределы $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$

и $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx)$, и если они оказываются

конечными числами, составляется уравнение прямой $y = kx + b$. В таком случае, если хотя бы один из пределов не является конечным числом, наклонная асимптота не существует.

Пример.

Задача. Найти асимптоты функции $y=\sqrt{x^2+1}$.

$D(y) = R;$

Вертикальных асимптот нет, т.к. функция непрерывна на R как композиция двух непрерывных .

Найдём правую асимптоту:

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} =$$

$$= [\frac{\infty}{\infty}] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{x+\frac{1}{x^2}}}{x} = 1$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) =$$

$$= [\infty - \infty] = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right) = 0$$

$y = x$ – правая наклонная асимптота

Найдём левую асимптоту:

$$k_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} =$$

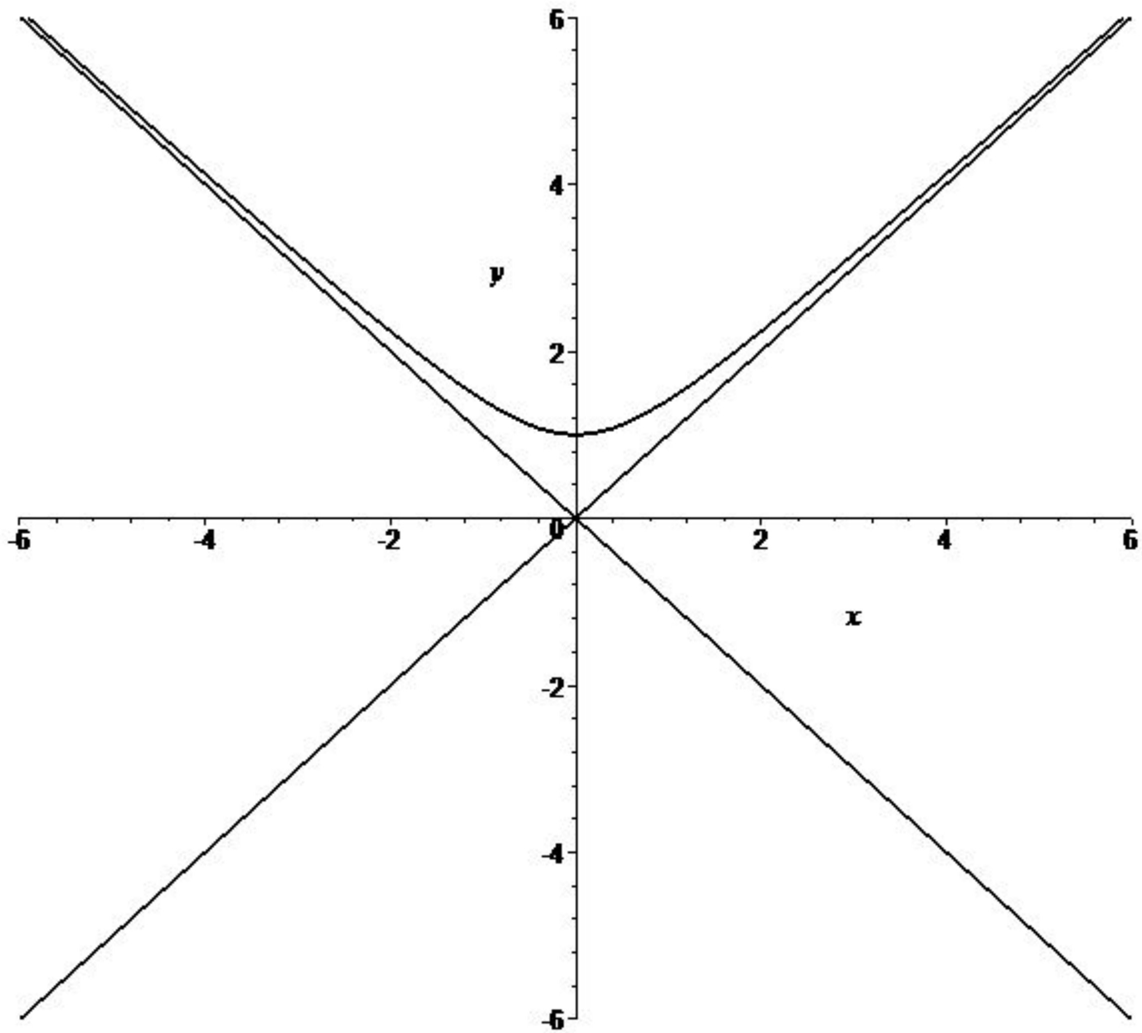
$$= [\frac{\infty}{\infty}] = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\sqrt{x + \frac{1}{x^2}}}{x} = -1$$

$$b_1 = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1} + x) =$$

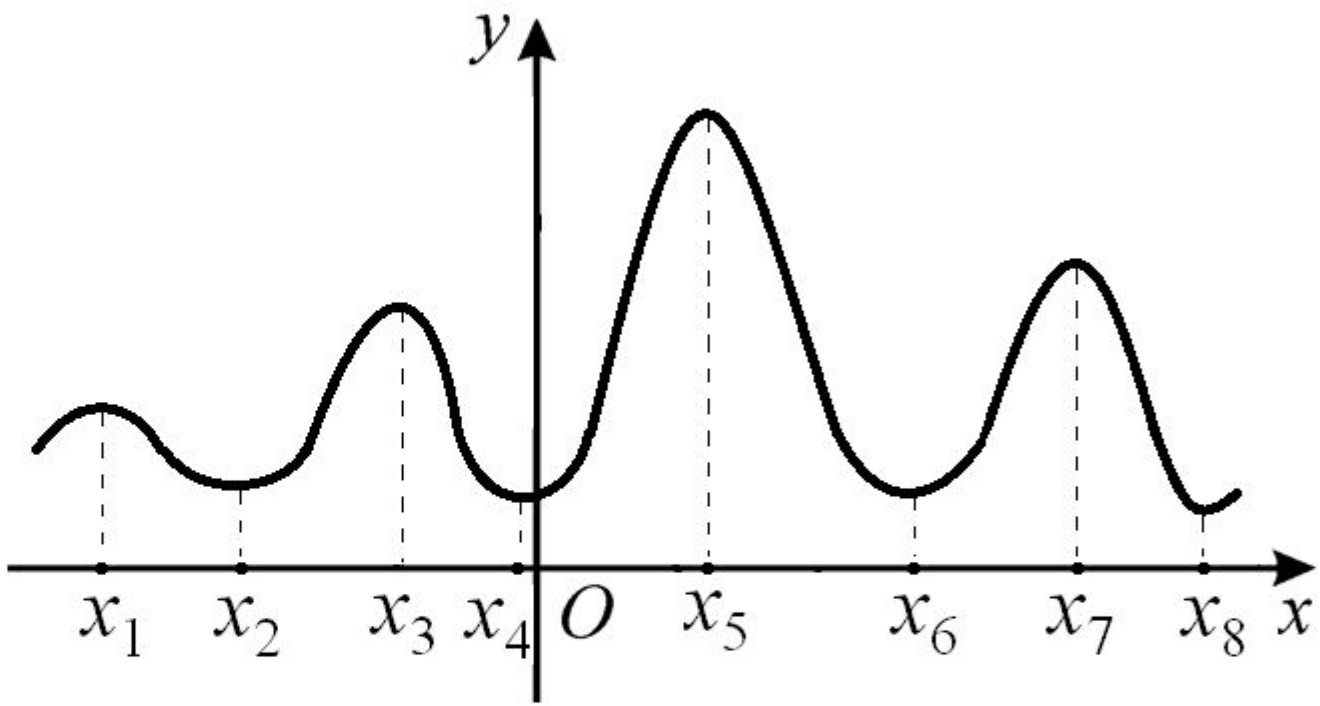
$$= [\infty - \infty] = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1} - x}\right) =$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x}\right) = 0$$

$y = -x$ – левая наклонная асимптота



6
4
y
2
0
-6
-4
-2
2
4
6
x
-2
-4
-6

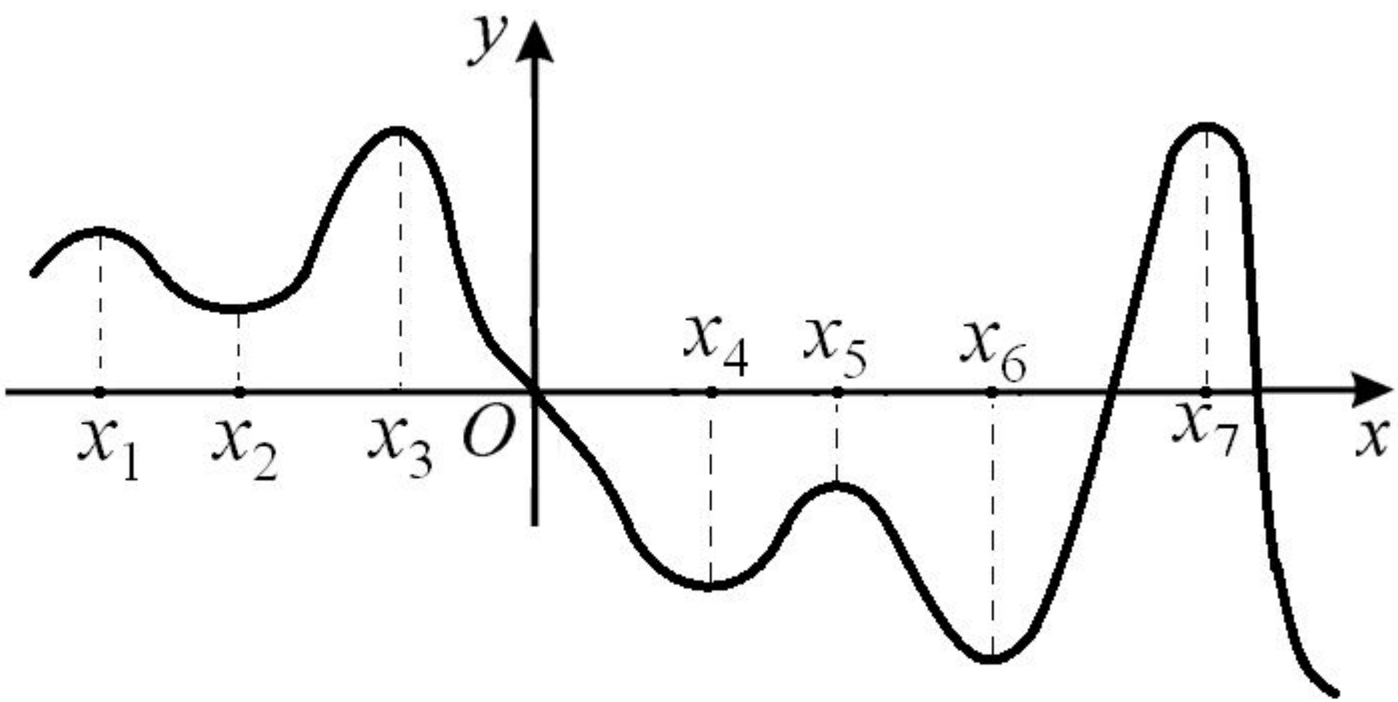


Как известно, чтобы исследовать функцию на экстремум нужно:

1) Найти все критические точки функции

2) Каждую из критических точек подвергнуть дополнительному исследованию.

Теорема (*достаточное условие экстремума*)
Если x_0 – критическая точка функции $y = f(x)$, то из того, что $f''(x) > 0 \Rightarrow$ что x_0 – точка минимума, а из того, что $f''(x) < 0 \Rightarrow$ что x_0 – точка максимума.



Внутренняя точка x_0 области определения функции $y = f(x)$ называется точкой максимума этой функции, если существует такая (быть может достаточно малая) окрестность $O x_0$, что

$\forall x \in O x_0 \, (x \neq x_0) \, (f(x_0) > f(x))$.

$f(x_0)$ называется максимальным значением функции, таким образом, максимальное значение функции – наибольшее значение в локальном смысле.

Аналогично определение точек минимума, лишь неравенство будет выглядеть так: $f(x_0) < f(x)$, т.е. минимальное значение это есть наименьшее значение в локальном смысле.

Определение. Точки минимума и точки максимума обозначаются под общим названием точки экстремума.

Замечание 1: Очень важным является то, что точка экстремума является внутренней для $D(f)$.

Замечание 2: Максимальные и минимальные значения следует отличать от наибольшего и наименьшего значений функции. Максимальных и минимальных значений функции может быть очень много. Наибольшее и наименьшее проставлено каждое единственным образом. Наибольшее значение является наибольшим в глобальном смысле, а максимальное – в локальном.

Аналогично о наименьшем и минимальном значениях.
Может случиться, что некоторое максимальное значение является меньше минимального.

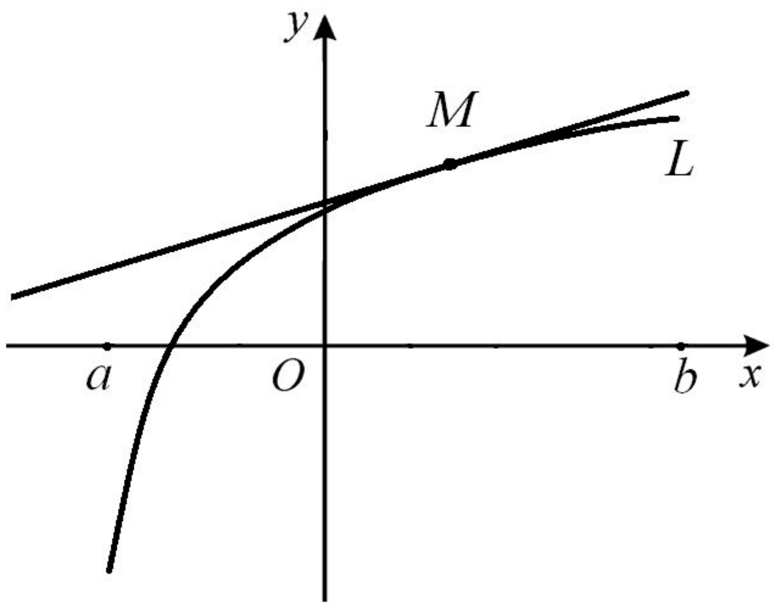
<u>Теорема</u> (*необходимость условия экстремума*)
Пусть x_0 – точка экстремума функции, тогда она является критической точкой данной функции (это легко вытекает из теоремы Ферма). Таким образом, точки экстремума нужно искать среди критических точек.

<u>Теорема</u> (*первое достаточное условие экстремума*). Если при прохождении через критическую точку производная меняет знак, то данная точка является точкой экстремума, а именно: точкой максимума, если знак производной меняется с «+» на «–» и точкой минимума, и точкой минимума, если знак меняется с «–» на «+».
Это легко вытекает из достаточного условия монотонности и теоремы Лагранжа.

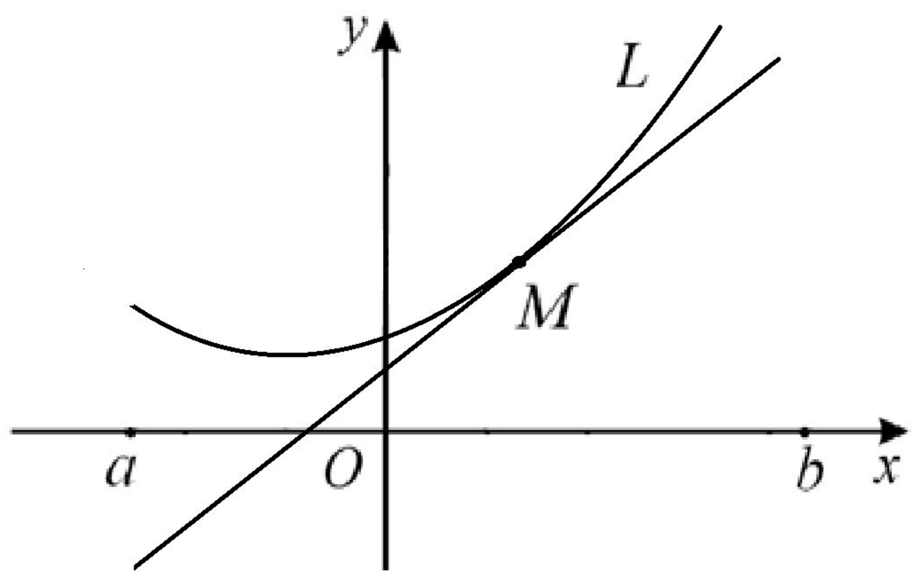
<u>Теорема</u> (*об интервалах монотонности*). Пусть $x_1, x_2, \ldots x_n$ – все критические точки функции $y = f(x)$, тогда на каждом из интервалов $(-\infty; x_1)$; $(x_1; x_2)$ …… $(x_{n-1}; x_n)$; $(x_n; +\infty)$ производная сохраняет знак (свой для каждого интервала). Считаем, что $D(f)=R$.

Без доказательства

Выпуклость и вогнутость



(Рис.1)



(Рис. 2)

На (рис. 1) изображена выпуклая кривая, на (рис. 2) –вогнутая кривая.

<u>Определение.</u> Гладкая кривая L называется выпуклой на интервале $(a\ ;\ b)$, если она находится под любой своей касательной (L: $y = f(x)$) и называется вогнутой, если она находится над любой своей касательной в пределах данного интервала.

<u>Определение.</u> Функция $y = f(x)$ называется выпуклой на интервале (a, b) , если её график является выпуклой кривой. И функция $y = f(x)$ называется вогнутой на $(a\ ;\ b)$, если её график является вогнутой кривой.

Пример.

$$y = \ln(x) \quad \text{– выпуклая функция}$$

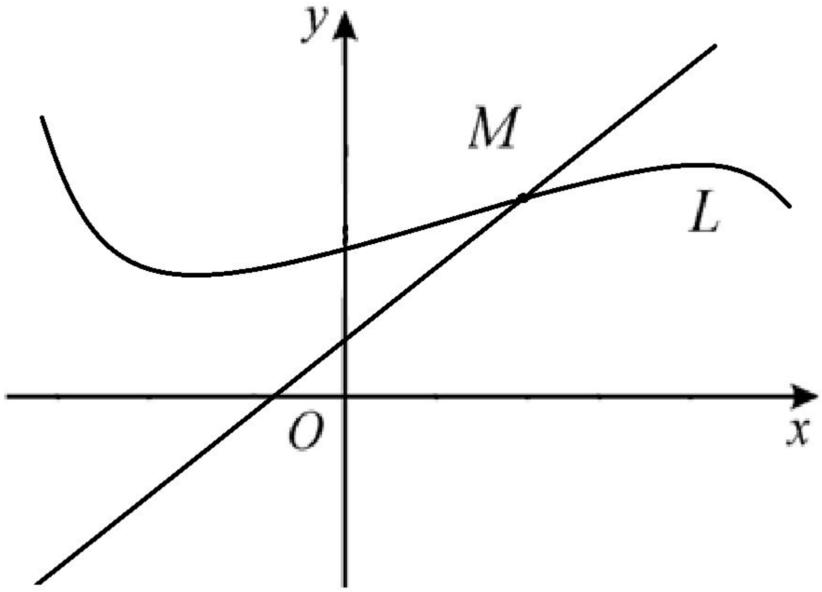
$$y = x^2 \quad \text{– вогнутая функция}$$

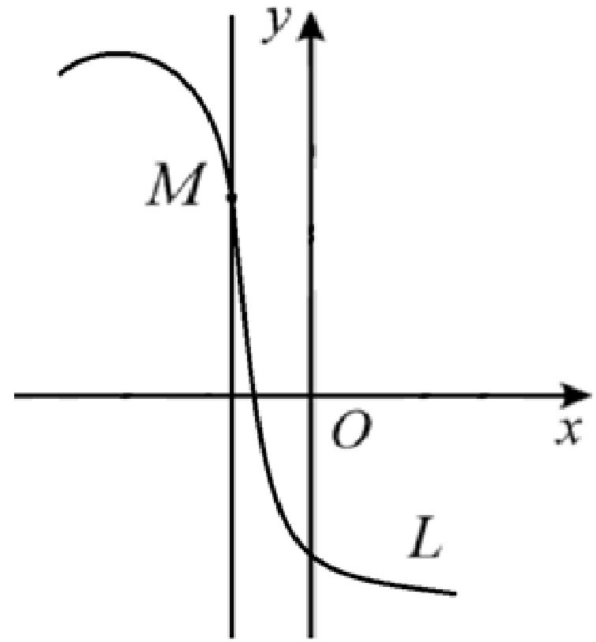
Справедлива Th.

Теорема (*достаточное условие выпуклости – вогнутости*). Если на $(a\,;\,b)$ $f''(x) < 0 \Rightarrow$ функция выпуклая, если на $(a\,;\,b)$ $f''(x) > 0 \Rightarrow$ функция вогнутая на интервале $(a\,;\,b)$.

Определение. Внутренняя точка $x_0 \in D(f)$ называется критической точкой второго рода, если вторая производная $f''(x)$ не существует, либо $f''(x) = 0$.

Точки перегиба





Точка *M* данной кривой *L* называется точкой перегиба этой кривой, если она отделяет выпуклый и вогнутый участки этой кривой. В точке перегиба кривая переходит с одной стороны касательной на другую.

Критические точки второго рода называются также точками, подозрительными на перегиб.
<u>Определение.</u> Внутренняя точка $x_0 \in D(f)$, называется точкой перегиба функции $y = f(x)$, если точка
$M(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба её графика.

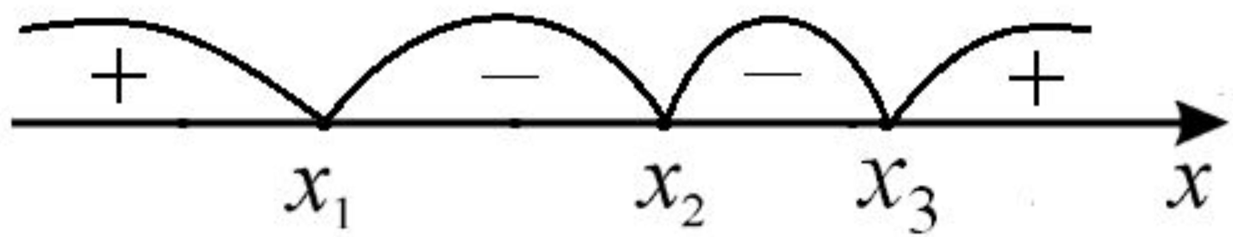
<u>Теорема</u> (*необходимое условие перегиба*).
Пусть x_0 – точка перегиба функции $y = f(x)$, тогда она является критической точкой второго рода этой функции , т.е. точки перегиба искать среди критических точек второго рода.

Теорема (*достаточное условие перегиба*). Если при прохождении через критическую точку второго рода знак второй производной меняется, то эта точка является точкой перегиба.

Теорема (*об интервалах выпуклости и вогнутости*). Пусть x_1 , x_2 , ...x_n – все критические точки второго рода функции $y = f(x)$, $D(f)=R$, тогда на каждом из интервалов $(-\infty; x_1)$; $(x_1 ; x_2)$ …… $(x_{n-1} ; x_n)$; $(x_n ;+\infty)$ вторая производная сохраняет знак.

Алгоритм исследования функции с помощью второй производной:

1) Находим все критические точки второго рода (находим $f''(x)$, приравниваем к «0» и смотрим, где она не существует). Они разбивают $D(f)$ на интервалы.
2) На каждом из полученных интервалов вычисляем знак $f''(x)$.



3) Каждую из критических точек второго рода подвергаем дополнительному исследованию: если знак $f''(x)$ при прохождении через данную точку меняется, то это точка перегиба, в противном случае точка таковой не является.